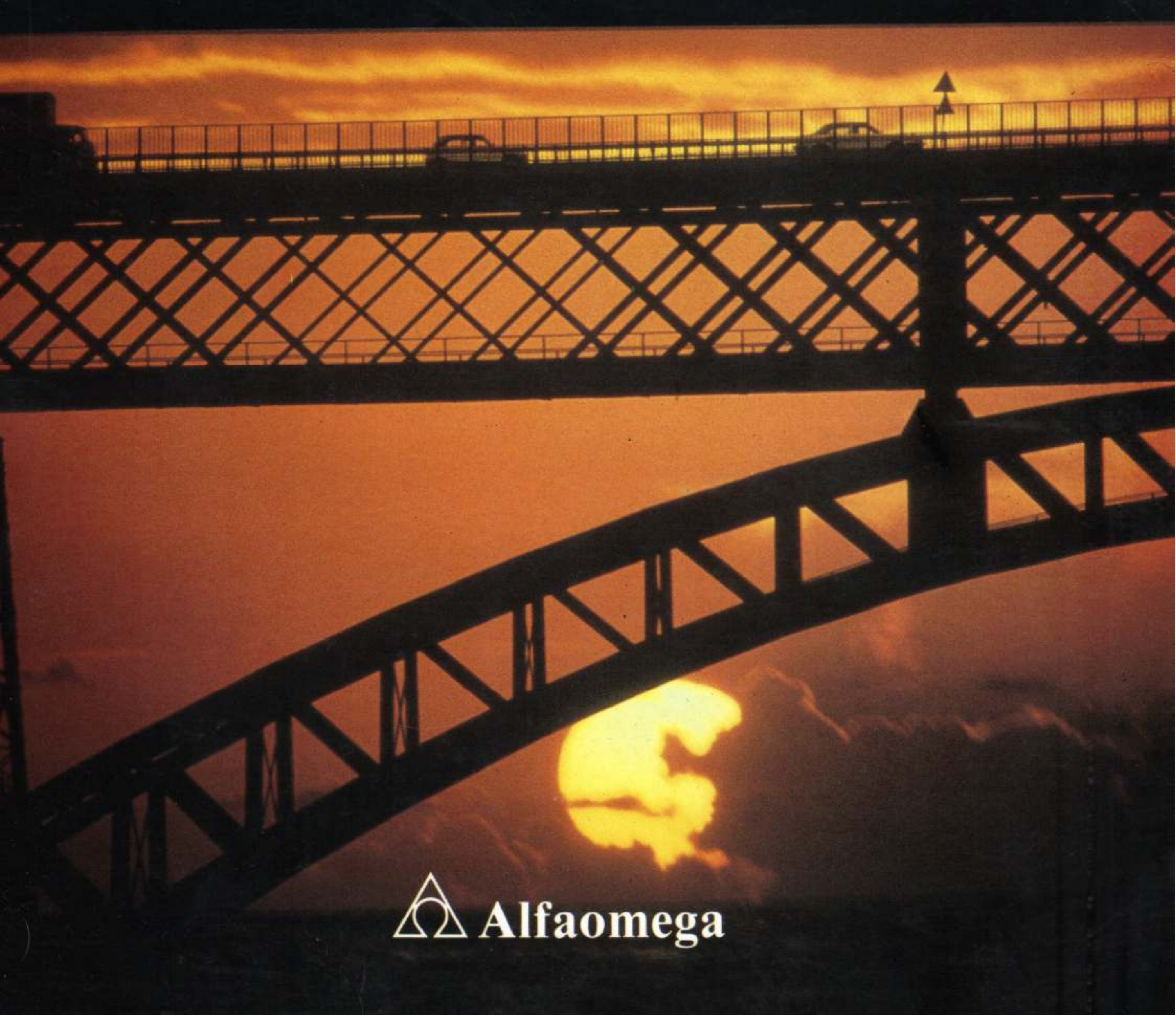
MECANICA DE MATERIALES

Edición revisada

Fitzgerald



La Mecánica de materiales es la rama de la ingeniería que proporciona los principios de diseño que tienen aplicación general.

El objeto de este libro de texto es desarrollar un conocimiento de la relación existente entre las fuerzas exteriores aplicadas a un cuerpo, las fuerzas interiores resultantes llamadas esfuerzos y las deformaciones resultantes.

Un conocimiento fundamental de la reacción interna o resistencia del cuerpo causada por las fuerzas exteriores es la base de este libro.

Apoya la exposición de cada tema y sus aplicaciones con una gran variedad de problemas de análisis y de diseño, recomendando para su solución el uso de croquis y diagramas.

Para agilizar el estudio, los apéndices proporcionan el material complementario de matemáticas junto con un repaso de estática. Algunos de sus capítulos son:

- Esfuerzo y deformación
- Torsión
- Esfuerzos en vigas
- Deflexión en vigas
- Vigas estáticamente indeterminadas

Foto de la cubierta: THE IMAGE BANK-MEXICO, Gianalberto Cigolini



ISBN 970-15-0154-3

MECANICA DE MATERIALES

Robert W. Fitzgerald
Worcester Polytechnic Institute

Edición revisada



Versión en castellano

Ing. Luis Ordóñez Reyna
Ingeniero Civil de la Universidad
Nacional Autónoma de México
Maestro en Ingeniería, U.N.A.M.

Con la colaboración de:

Jairo Uribe Escamilla
Ingeniero Civil, M.S., Ph. D.
Profesor Universidad de los Andes,
Bogotá, Colombia

Revisión técnica de esta edición:

Ma. Yolanda de la Paz

Edición revisada: México, 1996
Décimosexta reimpresión: México, octubre 2007

Versión en español de la obra *Mechanics of Materials*, second edition,
de Robert W, Fitzgerald, publicada originalmente por © Addison-Wesley
Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A.
Esta edición en español es la única autorizada.

ISBN 0-201-04073-5, versión original en inglés

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100 México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **libreriapitagoras@alfaomega.com.mx**

ISBN 970-15-0154-3

Impreso en México - Printed in Mexico

Prólogo

El objeto del estudio de la mecánica de materiales es proporcionar al estudiante un conocimiento de la relación entre las fuerzas exteriores aplicadas a una estructura de ingeniería y el comportamiento resultante de los miembros de la misma. La mecánica proporciona la base para el diseño en ingeniería. Los principios básicos de la mecánica son relativamente simples y directos. Este libro de texto aplica dichos principios a una amplia variedad de problemas que tienen niveles variables de complejidad, de modo que pueden analizarse de una manera lógica y simple.

El énfasis de este libro ha sido el procurar hacer que el tema de la materia sea lógico y fácil de entender por el estudiante que se inicia en estos temas. El término "fácil" no implica falta de rigor. Al contrario, las deducciones y análisis mantienen el grado usual de rigor de los libros estándar sobre mecánica de materiales. Sin embargo, se ha puesto cuidado en la presentación para impedir que las matemáticas ensombrezcan los principios de la teoría de la mecánica. Se da importancia a la comprensión del comportamiento y la aplicación de los principios y técnicas para la solución de problemas. Consecuentemente, se ha enfatizado sobre el fraccionamiento de un problema en elementos relativamente simples, combinados con una descripción comparativamente larga del comportamiento físico y de los detalles de las técnicas para resolver problemas.

Desde la aparición de la primera edición de esta obra, titulada *Resistencia de Materiales,* han ocurrido muchos cambios en la enseñanza de la ingeniería. Además, muchos usuarios del libro han dado sugerencias útiles para su mejoramiento. En la preparación de esta edición a cada comentario se le dio una cuidadosa consideración. Como resultado de ello, se han hecho extensas modificaciones al texto original. Estas modificaciones han dado por resultado la adición de material que no estaba incorporado en la primera edición y un rearreglo del tema de la materia. Sin embargo, se ha conservado el formato, el estilo y la flexibilidad del desarrollo de los tópicos de la primera edición.

Este libro trata casi todos los tópicos usualmente consignados en los textos convencionales sobre mecánica de materiales. El arreglo secuencial de los capítulos separa los principios básicos de los temas más avanzados. Este enfoque permite el estudio de aplicaciones simples y prácticas sobre cargas axiales, de torsión, y de flexión, en una etapa temprana. Sin em-

bargo, más bien que consignar algunos de los tópicos avanzados como "muestreos" introductorios de los temas, las discusiones posteriores tratan el tema de la materia con mayor profundidad. De esta manera los estudiantes pueden tener oportunidad para una profundización más completa en la teoría y en el comportamiento de los materiales, en menos tiempo; y los instructores, debido a que los temas avanzados son, en mucho, tan autónomos como es posible, pueden extender o limitar la amplitud y la profundidad del contenido de su curso, de acuerdo con los requisitos de un curriculum específico de los alumnos y de la preferencia personal. Lo que sigue es una breve descripción del contenido de los capítulos y los apéndices, con algunas sugerencias para su uso.

- Los Capítulos 2, 3, 4 y 5 describen el comportamiento fundamental de los materiales sujetos a carga axial, de torsión, y flexionante. Los temas se desarrollan como paquetes completos, que darán a los estudiantes un fundamento para el análisis y diseño, básicos, para estas cargas.
- El Capítulo 6 cubre esfuerzos combinados. La Parte A trata la superposición de esfuerzos axiales y de flexión; la Parte B trata los esfuerzos normales y cortantes.

  Además, se describe el análisis tridimensional de esfuerzos, y se introduce el análisis de deformaciones.
- El Capítulo 7, al describir los métodos para calcular las deflexiones de vigas, consta de cuatro partes: Sección A, procedimientos de doble integración; Sección B, el método del área de momentos; Sección C, superposición usando fórmulas estándar para vigas; y la Sección D, peso elástico. Cada una de estas partes está escrita como una unidad independiente, y los instructores pueden escoger aquellas que satisfagan sus necesidades y restricciones de tiempo.
- Las vigas estáticamente indeterminadas se estudian en el Capítulo 8, con énfasis sobre la técnica de superposición. Aunque el material presentado involucra el uso de fórmulas estándar para vigas con el objeto de ayudar a los estudiantes a comprender el proceso de resolver problemas más claramente, el instructor puede desear proporcionar práctica adicional al calcular deflexiones, haciéndoles usar las técnicas descritas en el Capítulo 7 —o los métodos energéticos de Castigliano y los métodos del trabajo virtual, ambos descritos en el Capítulo 13.
- El comportamiento y diseño de columnas se presenta en el Capítulo 9. El énfasis se dirige hacia el entendimiento del comportamiento de las columnas. Consecuentemente, después de una discusión de la acción de columna, se presentan solamente las condiciones de Euler y las fórmulas del AISC para el diseño de acero estructural y la fórmula de J. B. Johnson para el diseño de máquinas. No se incluye la fórmula, de la secante por la razón filosófica de que es una solución algo acomodada que usa deducciones elásticas para condiciones inelásticas.
- El Capítulo 10 presenta tópicos adicionales sobre esfuerzo y deformación que involucran sistemas de fuerzas axiales estáticamente indeter-

minados, sistemas estáticamente indeterminados para problemas de torsión, problemas relacionados con esfuerzo por temperatura, recipientes a presión, y concentraciones de esfuerzos y fatiga. Cada uno de estos temas está escrito como una sección autónoma. Un instructor puede asignar cualquiera de las secciones, ya sea como una unidad separada de estudio, o como parte del trabajo de los Capítulos 2 y 3.

- El Capítulo 11 incluye temas adicionales sobre flexión asimétrica y centros de cortante. Nuevamente, las secciones de este capítulo pueden tratarse como temas avanzados independientes, o pueden incorporarse en el tema de la materia del Capítulo 5.
- El Capítulo 12 describe la acción inelástica de miembros sujetos a cargas axiales, de torsión y de flexión. Cada tema está cubierto con profundidad suficiente para capacitar al estudiante a apreciar el comportamiento estructural y el del material, y ganar así un discernimiento más profundo en el diseño elástico. Como antes, estos tópicos pueden incorporarse a otros capítulos, particularmente a los Capítulos 2, 3 y 5
- La energía de deformación, el trabajo virtual, y el teorema de Castigliano se describen en el Capítulo 13 para condiciones axiales, de torsión, y de flexión. El tema de la materia está desarrollado cuidadosamente para capacitar a los estudiantes a comprender las interrelaciones de los temas más fácilmente.
- Las conexiones se cubren en el Capítulo 14. Este tema se retuvo en esta segunda edición debido a que un número de usuarios de la primera edición lo encontró útil para sus cursos y expresaron el deseo de que se incluyera en esta edición.
- El Capítulo 5 sobre las propiedades de los materiales, así como el Capítulo 10, puede usarse como una unidad independiente o presentarse con el Capítulo 2, sobre esfuerzo y deformación.
- El Apéndice A es una revisión relativamente breve de estática que contiene la mayoría de los temas que se cubren normalmente en un curso de estática. Algunos usuarios anteriores de este libro han suplementado y usado este material en conjunto con un curso combinado de estática y de mecánica de materiales. Otros han optado por ignorarlo, confiando en el conocimiento de los estudiantes proveniente de un curso previo de estática. Sin embargo, las que siguen son unas cuantas de la características que han llegado a ser útiles para otros usuarios. Diagramas de cuerpo libre y cargas distribuidas sobre vigas, que a menudo necesitan la atención continua de los estudiantes, se consignan cuidadosamente. Además los centroides, los momentos y productos de inercia, los ejes principales y el análisis del Círculo de Mohr, un conocimiento que es necesario para varios temas en *Mecánica de Materiales* requieren a menudo un repaso en el momento en que se introducen estos temas. En este apéndice se incluye un tratamiento detallado completo de dichos temas por repasar.
- El Apéndice B proporciona deducciones sin uso del cálculo, de las fórmulas de torsión, flexión y esfuerzos cortantes en vigas. Otra vez, éstas pueden usarse, o no, dependiendo de las necesidades de los estudiantes y del curso.

- Los Apéndices del C al J proporcionan fórmulas útiles para propiedades, descripciones y datos tabulares sobre materiales comúnmente usados que también se discuten en el texto.

Los ejemplos, problemas ilustrativos, y problemas de tarea para los estudiantes, en este libro, varían considerablemente en dificultad y alcance, dependiendo de su propósito. En algunos casos los ejemplos y problemas tienen la intención de ilustrar definiciones o aplicaciones simples. Otros involucran un rango mayor de consideraciones, incluyendo problemas prácticos de diseño y tratamientos teóricos avanzados. Los problemas requieren destreza en álgebra y trigonometría, algo de cálculo elemental, y el uso de ambos sistemas de unidades de medida, el Inglés y el SI.

Los Estados Unidos están en clara transición del sistema de unidades de medida Inglés, al sistema métrico internacional (Denominado SI por *Le Systeme International d' Unités*). Sin embargo, los principios de mecánica y el comportamiento de los materiales no cambian cualquiera que sea el sistema de medidas que se use. Esta edición, para ser más práctica al estudiante, usa ambos sistemas en los ejemplos, y en los problemas ilustrativos y de tarea. Pero los cálculos no se convierten de un sistema al otro, y al estudiante nunca se le pide convertir medidas de un sistema al otro. Sin embargo, se requiere que el estudiante sea experto en ambos sistemas. A través del libro de texto se proporciona al estudiante ayuda para ser "bilingüe" en sistemas de unidades, así como se hace énfasis en lo invariable de los principios del comportamiento de los materiales, por medio de problemas y ejemplos similares desarrollados en unidades inglesas y SI. Además, las equivalencias incluidas en las contratapas ilustran valores físicos comunes en ambos sistemas.

Se reconocen con agradecimiento las contribuciones en forma de comentarios y críticas de los usuarios de la primera edición de este libro de texto. Sus sugerencias han ayudado enormemente en el desarrollo de esta edición.

Worcester, Massachusetts R. W. F.

Contenido

A APENDICES

Repaso de estática 447

B Deducción sin uso del cálculo de fórmulas de esfuerzos básicos 507

Símbolos y abreviaturas

A	área
a	distancia, dimensión
b	ancho, dimensión
C	fuerza de compresión
c	distancia del eje neutro a la fibra extrema (en flexión); distancia del centro de torsión a la fibra extrema (torsión)
D,d	diámetro, distancia
E	módulo de elasticidad
e	excentricidad
F	fuerza
FS	factor de seguridad
G	módulo de elasticidad al esfuerzo cortante (módulo de rigidez)
G	giga—(10^9)
h	altura, profundidad o espesor, distancia
hp	caballo de potencia
Hz	hertz
I	momento de inercia
J	momento polar de inercia
K	constante, factor de concentración de esfuerzos
k	constante de resorte; kilo (10^3)
kip, klb	kilolibra (1 000 lb)
kN	kilonewton (1 000 N)
ksi, klb/plg^2	kilolibras por pulgada cuadrada
L,l	longitud
M	momento, momento flexionante
M	mega—(10^6)
N	velocidad angular (revoluciones por minuto)
N	newtons
e.n.	eje neutro
P	fuerza, carga concentrada
p	presión de un fluido (libras por pulgada cuadrada)
psi, lb/plg^2	libra por pulgada cuadrada
Q	momento estático (primer momento) de una área

q	flujo de cortante; fuerza cortante por unidad de longitud
R	reacción, radio
r	radio de giro
rad	radianes
rpm	revoluciones por minuto
S	módulo de la sección
T	fuerza de tensión, torque, momento torsionante o de torsión, temperatura
t	espesor, desviación tangencial
w	peso o carga por unidad de longitud
W	peso total o carga total
y	distancia del eje neutro; deflexión
z	distancia

Símbolos Griegos

α	(alfa)	Coeficiente de dilatación lineal; ángulo en general
β	(beta)	Angulo en general
γ	(gama)	Deformación unitaria por esfuerzo cortante; ángulo en general
δ	(delta minúscula)	Deflexión, elongación, contracción
Δ	(delta mayúscula)	Cambio en una función
ϵ	(épsilon)	Deformación unitaria
θ	(teta)	Angulo de torsión; pendiente de una viga; ángulo en general
μ	(mu)	Relación de Poisson
ρ	(ro)	Distancia radial
σ	(sigma minúscula)	Esfuerzo unitario normal
Σ	(sigma mayúscula)	Sumatoria
τ	(tau)	Esfuerzo unitario cortante
ϕ	(fi)	Angulo en general

1

Introducción

1.1 Mecánica de materiales

La mecánica de materiales es una materia que investiga el efecto de las fuerzas aplicadas sobre los cuerpos. La mecánica de materiales es una continuación de la estática y de la dinámica. Si se aplican fuerzas a un cuerpo y no se produce movimiento, las reacciones que impiden el movimiento pueden calcularse aplicando las leyes de la estática. Si se produce movimiento, las aceleraciones y el movimiento pueden determinarse mediante los principios de la dinámica. Sin embargo, puede desearse alguna información que va más allá de la determinación de las fuerzas exteriores y del movimiento resultante.

Considérese, por ejemplo, el sistema mostrado en la Fig. 1.1; como está en equilibrio, las reacciones de la viga *BC* que son debidas a las fuerzas ejercidas por la barra soporte *AB* y el poste *CD*, pueden determinarse aplicando los principios de la estática. Sin embargo, hay otras preguntas que pueden hacerse relacionadas con esta estructura. Algunas de las preguntas más obvias pueden ser:

1. Sobre la viga *BC*:
   a) Si es una viga ya existente, ¿es lo suficientemente resistente para soportar las cargas aplicadas?
   b) ¿Se flexionará o deformará excesivamente? y ¿cuál será la deflexión real?
   c) Si se va a diseñar (es decir, si se van a determinar sus dimensiones), ¿qué forma y medidas son más económicas y a la vez suficientemente seguras para evitar la contracción y la deflexión excesiva?
2. Sobre la barra soporte *AB:*
   a) Si existe, ¿es lo suficientemente resistente para soportar la reacción en B?
   b) ¿Cuál es la máxima fuerza que puede soportar y cuánto se alargará?
   c) Si se va a diseñar, ¿qué forma y dimensiones debe tener la barra para prevenir una falla o una deflexión excesiva?
3. Sobre el poste *CD:*

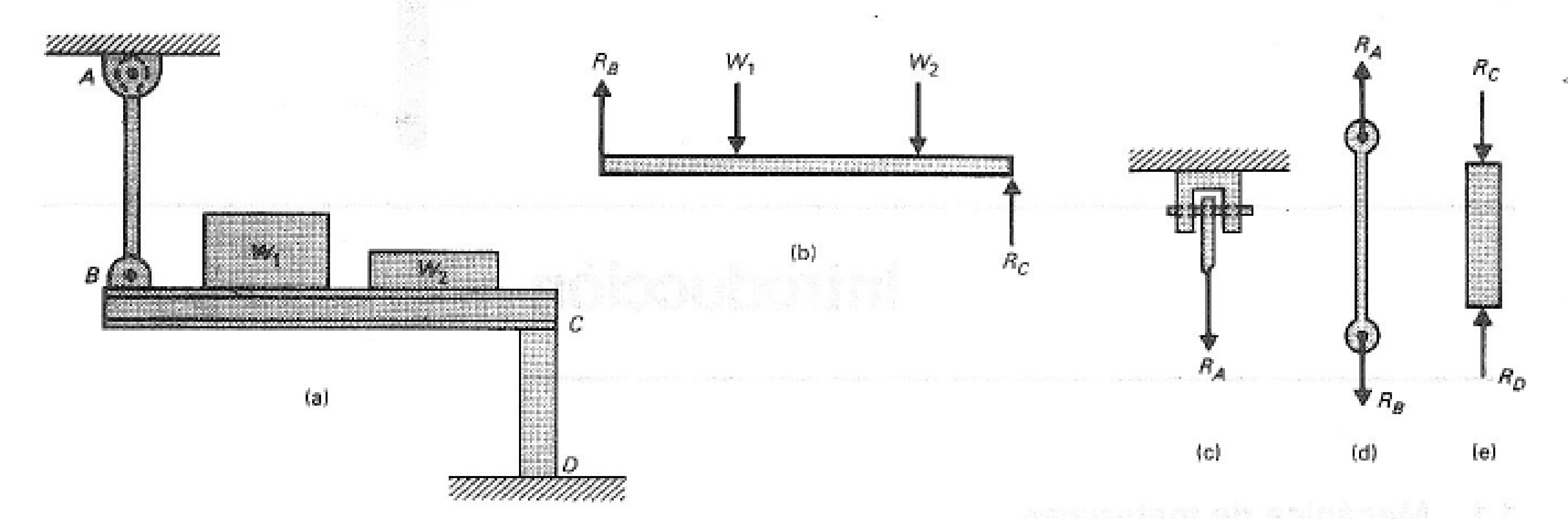


FIGURA 1.1

   a) Si existe, ¿es lo suficientemente resistente para soportar la reacción necesaria en C?
   b) ¿Cuál es la máxima fuerza que puede soportar?
   c) Si se va a diseñar, ¿qué forma y dimensiones son más económicas y a la vez suficientemente seguras para prevenir la contracción?
4. Sobre el pasador en A o en B:
   a) Si existe, ¿es lo suficientemente resistente para soportar la fuerza en la barra soporte?
   b) ¿Cuál es la carga máxima que puede soportar?
   c) Si se va a diseñar, ¿qué tan grande debe ser?

Preguntas de este tipo pueden contestarse mediante el estudio de la mecánica de materiales. Además de las preguntas ilustradas por la Fig. 1.1, hay una amplia variedad de otras aplicaciones apropiadas a todas las ramas de la ingeniería y la arquitectura. Los principios de estas aplicaciones son la base de este libro de texto.

1.2 Estructuras de ingeniería

Todas las estructuras de ingeniería, ya sean máquinas, automóviles, aeroplanos, edificios, o puentes, se construyen ensamblando diversas partes, generalmente llamadas *miembros,* para formar el producto terminado. Una estructura se diseña determinando las dimensiones adecuadas a los distintos miembros de manera que puedan soportar las cargas aplicadas sin deformación excesiva ni fractura. La mecánica de materiales es la ciencia aplicada que proporciona los principios básicos para el diseño.

En este libro, el término "estructura" se usa en un sentido amplio para representar no solamente edificios y puentes comparativamente grandes, sino también máquinas, aviones, y realmente cualquier cosa que se diseñe para soportar cargas aplicadas. La mecánica de materiales

no es un curso de diseño de máquinas ni de diseño estructural, pero proporciona las bases para esos cursos ofreciendo una teoría de diseño científico.

En el diseño de estructuras, además de la resistencia y de los requisitos de rigidez, se necesitan otras consideraciones. Algunas de ellas son costo, accesibilidad, lubricación, durabilidad, y detalles generales. La interrelación entre esos requisitos y los principios de la mecánica de materiales se estudia en los cursos de diseño de máquina y de diseño estructural.

El estudio de la mecánica de materiales no pertenece a ninguna rama de la ingeniería, pero proporciona los principios de diseño que tienen aplicación general. Por ejemplo, el diseño de una viga en un puente o un edificio, y el diseño de la estructura de una máquina sujeta a flexión, se basan exactamente en los mismos principios. La acción básica de los miembros es la misma. Las únicas diferencias reales están en la magnitud y tipo de cargas, en los detalles de forma y construcción, y en las especificaciones y requisitos sobre los cuales se basa el diseño.

1.3 Análisis y diseño

El objeto de este libro de texto es desarrollar un conocimiento de la relación existente entre las fuerzas exteriores aplicadas a un cuerpo, las fuerzas interiores resultantes, llamadas *esfuerzos*, y las *deformaciones* resultantes. Los términos "esfuerzo" y "deformación" se definirán completamente en el capítulo 2. Los principios básicos y las definiciones que se van a desarrollar pueden aplicarse, generalmente, a cualquier material estructural, tal como el acero, aluminio, concreto, plásticos, madera, vidrio, etc.

Aunque los principios básicos de la mecánica de materiales son relativamente pocos en número y no son particularmente difíciles, sus aplicaciones son muchas y variadas. La forma más eficiente de aprender cada tema y sus aplicaciones es resolver una gran variedad de problemas. La importancia de la resolución de problemas no puede ser sobrenfatizada.

Se encuentran dos tipos de problemas. El primero es el de análisis. En problemas de este tipo se conocen las dimensiones y el tipo de material de que está hecho el miembro. El problema tomará alguna de las dos formas siguientes:

1. Determinar el esfuerzo o la deformación para las cargas dadas.
2. Determinar las cargas máximas que pueden aplicarse, de manera que no se exceda un esfuerzo o una deformación dados.

Un segundo tipo de problemas es el de diseño. En este caso se dan a conocer las cargas aplicadas y los valores permisibles del esfuerzo o de la deformación. El problema es determinar las dimensiones del miembro que las soporta. Las preguntas (a) y (b) descritas en la sección 1.1 se refieren al análisis, mientras que las preguntas (c) corresponden a un problema de diseño.

En cada tipo de problema se necesita tener conocimiento de los tipos particulares de esfuerzo y deformación involucrados. Un conocimiento fundamental de la acción interna o resistencia del cuerpo causada por las fuerzas exteriores es la base de este libro.

En la solución de problemas, haga uso líberal de croquis y diagramas. Particularmente recomendamos esto por dos razones: (1) el tratamiento y el método general de solución de un problema puede entenderse más rápidamente después de que se ha dibujado una figura que represente el problema: (2) los dibujos ayudan al estudiante a visualizar la acción de los esfuerzos y deformaciones que se presentan por la acción de las cargas.

Otro asunto de extrema importancia es el arreglo ordenado de la solución. Debe desarrollarse el hábito de la pulcritud tanto como sea posible. Un trabajo hecho de una manera descuidada, además de ser poco útil para una referencia posterior, tiende a complicar la solución del problema. El tiempo y el esfuerzo gastados en hacer estos diagramas y en resolver el problema con nitidez, producirá una mejor comprensión del mismo.

1.4 Sistemas de unidades

Los Estados Unidos de Norteamérica son la última nación industrial en adoptar el sistema métrico. Sin embargo, es claro que dicho sistema llegará a ser, finalmente, el estándar. Esto no ocurrirá sin un gasto y resistencia, considerables, por parte de algunos sectores de la industria americana. Actualmente está teniendo lugar un periodo de transición hasta que la población y la industria lleguen a adoptar plenamente este sistema de medida.

Los cálculos en ingeniería están utilizando clara y rápidamente las unidades del SI.* Sin embargo la nación está aún predominantemente acostumbrada al sistema Inglés de medida, y muchas componentes comerciales disponibles aún usan estas unidades. En un tema orientado hacia el diseño práctico tal como es la mecánica de materiales, estamos encarados al problema dual de prepararnos con destreza y práctica, para hoy y el futuro. Consecuentemente, durante este periodo de transición, debemos familiarizarnos con ambos sistemas de unidades.

Sin embargo, los *principios* de la mecánica de materiales se conservan iguales. El comportamiento de los materiales y los miembros no cambian con el sistema de medida. Solamente resulta diferente la representación de los valores cuantitativos. Consecuentemente, debe ser relativamente fácil la transición en lo que se refiere a la mecánica de materiales.

---

* Del nombre francés, *Le System International d'Unités.*

2

Esfuerzo y deformación

2.1 Introduccion

Una fuerza externa aplicada a un cuerpo, hace que éste se deforme o cambie ligeramente de forma. También produce fuerzas internas (esfuerzos) que actúan dentro del cuerpo. La mecánica de materiales es la ciencia que analiza los esfuerzos y las deformaciones producidas por la aplicación de fuerzas externas.

En este capítulo se cubre el análisis y diseño de miembros cargados axialmente. La carga axial se encuentra en una amplia variedad de aplicaciones prácticas en todas las disciplinas de ingeniería. Aunque las aplicaciones tienen algún interés, los conceptos, definiciones y procedimientos son de particular significado. Forman la base del trabajo futuro, y se aplican y extienden para desarrollar la teoría y práctica para otros tipos de colocación de carga.

En la solución de todos los problemas de mecánica de materiales, es deseable tener un conocimiento de las acciones físicas que tienen lugar dentro del miembro. Por consiguiente, es importante ser capaz de "visualizar" el esfuerzo y la deformación que ocurren en un cuerpo. Se necesita memorizar muy pocas fórmulas para la solución de estos problemas. Sin embargo, el hábito de hacer diagramas completos, cuidadosamente trazados, de los miembros bajo carga, ayudará enormemente a comprender esta materia.

2.2 Esfuerzo

El esfuerzo es una función de las fuerzas internas en un cuerpo que se producen por la aplicación de las cargas exteriores. La mecánica de materiales es un estudio de la magnitud y distribución de estas fuerzas internas. Para entender la composición y distribución de las fuerzas internas, consideremos una barra simple sujeta a una fuerza axial P en cada extremo, como se indica en la Fig. 2.1. (a). Supóngase que esta barra está formada de un gran número de fibras alineadas paralelamente. Si se hace una sección de la barra, se obtiene un diagrama de cuerpo libre similar al indicado en la Fig. 2.1 (b).

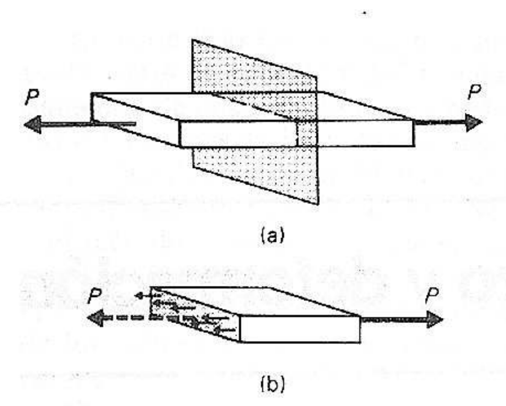


FIGURA 2.1

Una regla básica de estática es que si una estructura está en equilibrio, cualquier porción de la estructura debe estar en equilibrio. En el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 2.1 (b), la fuerza externa aplicada está a la derecha. Como el cuerpo está en equilibrio, debe también haber fuerzas que actúan hacia la izquierda. Estas fuerzas que resisten la carga aplicada, son transmitidas por las fibras de la barra. Esto es análogo al caso de los hilos de una cuerda. Cuando una cuerda soporta una carga, cada hilo individual soporta una fracción de esa carga. De una manera semejante, aunque no tan evidente, cada fibra de la barra transmite una porción de la carga. La suma de las cargas soportadas por cada fibra es igual a la carga aplicada.

La fuerza interior total en la barra es la resultante de todas las fuerzas en las fibras, y es igual a P lb. Sin embargo, no es común hablar de la fuerza total en la barra, sino más bien de la intensidad de la fuerza en las fibras. Esta *intensidad de la fuerza* se llama el *esfuerzo*, o *esfuerzo unitario*. El esfuerzo unitario se define como la fuerza por unidad de área. En términos algebraicos,

$$\sigma = \frac{P}{A}, \tag{2.1}$$

donde

σ = esfuerzo unitario en lb/plg² o en N/m²,
P = carga aplicada en lb o en N,
A = área sobre la cual actúa la carga, en plg² o en m².

Por ejemplo, supóngase en la Fig. 2.1 que la fuerza exterior P es de 10 000 lb, y el área de la sección transversal de la barra es de 2 plg². La fuerza interior total en la barra sería de 10 000 lb. El esfuerzo unitario sería

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10\,000 \text{ lb}}{2 \text{ plg}^2} = 5\,000 \text{ lb/plg}^2.$$

Si el área de la sección transversal de la barra fuera de ½ plg², en vez de 2 plg², la fuerza interior total aún sería de 10 000 lb, pero el esfuerzo unitario sería de

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10\,000 \text{ lb}}{\frac{1}{2} \text{ plg}^2} = 20\,000 \text{ lb/plg}^2 .$$

Esto significa que cada fibra de la segunda barra soportaría una carga cuatro veces mayor que cada fibra de la primera barra. La intensidad del esfuerzo en la segunda barra es entonces cuatro veces el de la primera barra.

En la práctica de ingeniería, el término "esfuerzo" se usa vagamente algunas veces para indicar ya sea la fuerza interior total o el esfuerzo unitario. El contexto de la discusión en cada caso, generalmente indica el significado adecuado del término. Sin embargo, en este libro, el término "esfuerzo" se usará para significar *esfuerzo unitario*.

Las unidades del esfuerzo son libras por pulgada cuadrada. Esto se abrevia a menudo como lb/plg² o #/plg². En este libro se usará la abreviatura *lb/plg²*. Cuando la magnitud de las fuerzas y los esfuerzos es muy grande, es más conveniente expresar estos términos en kilolibras por pulgada cuadrada (abreviada klb/plg²). klb es una abreviatura para kilolibra, que corresponde a 1 000 lb.

En el sistema Inglés, la distinción entre una libra fuerza y una libra masa es, a menudo, ambigua, ya que la palabra "libra" se usa para ambas. El SI distingue más claramente entre fuerza y masa. Las unidades básicas del SI para la mecánica de los sólidos son el metro (longitud), el kilogramo (masa), y el segundo (tiempo). El kilogramo es una medida de masa, no de fuerza. El newton* es la medida de fuerza. En unidades del SI el esfuerzo se mide en newton por metro cuadrado (N/m²). Esto se denomina un pascal (Pa).

En muchos casos, la fuerza en newtons (N), y el esfuerzo en pascales (Pa) son unidades tan pequeñas que se usan más convenientemente múltiplos de estas unidades. Prefijos, simbolizando múltiplos de 10^3, se usan como sigue:

$$\begin{aligned}
1 \text{ kN} &= 1 \text{ kilonewton} = 1 \times 10^3 \text{ N} \\
1 \text{ MN} &= 1 \text{ meganewton} = 1 \times 10^6 \text{ N} \\
1 \text{ GN} &= 1 \text{ giganewton} = 1 \times 10^9 \text{ N} \\
1 \text{ kPa} &= 1 \text{ kilopascal} = 1 \times 10^3 \text{ Pa} = 1 \times 10^3 \text{ N/m}^2 \\
1 \text{ MPa} &= 1 \text{ megapascal} = 1 \times 10^6 \text{ Pa} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \\
1 \text{ GPa} &= 1 \text{ gigapascal} = 1 \times 10^9 \text{ Pa} = 1 \times 10^9 \text{ N/m}^2
\end{aligned}$$

* Un newton es una fuerza que le produciría a la unidad de masa, una unidad de aceleración. Así, F (newton) $= ma =$ (1 kg) (1 m/s²). Por consiguiente, las unidades del newton son kg · m/s².

El procedimiento para calcular el esfuerzo es, por supuesto, el mismo, sin importar el sistema de medida. Por ejemplo, en el brazo mostrado en la Fig. 2.2, el miembro horizontal AC es una barra circular de 30 mm de diámetro, y el miembro inclinado BC es una barra sólida con una sección transversal de 60 mm × 100 mm. Queremos determinar el esfuerzo en cada uno de los miembros cuando la fuerza $P = 24$ kN.

La solución requiere primero el cálculo de la fuerza axial en cada miembro, según la estática. La Fig. 2.2 (b) muestra un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que concurren en el punto C, y la Fig. 2.2 (c) muestra las componentes rectangulares de esas fuerzas. Aplicando las

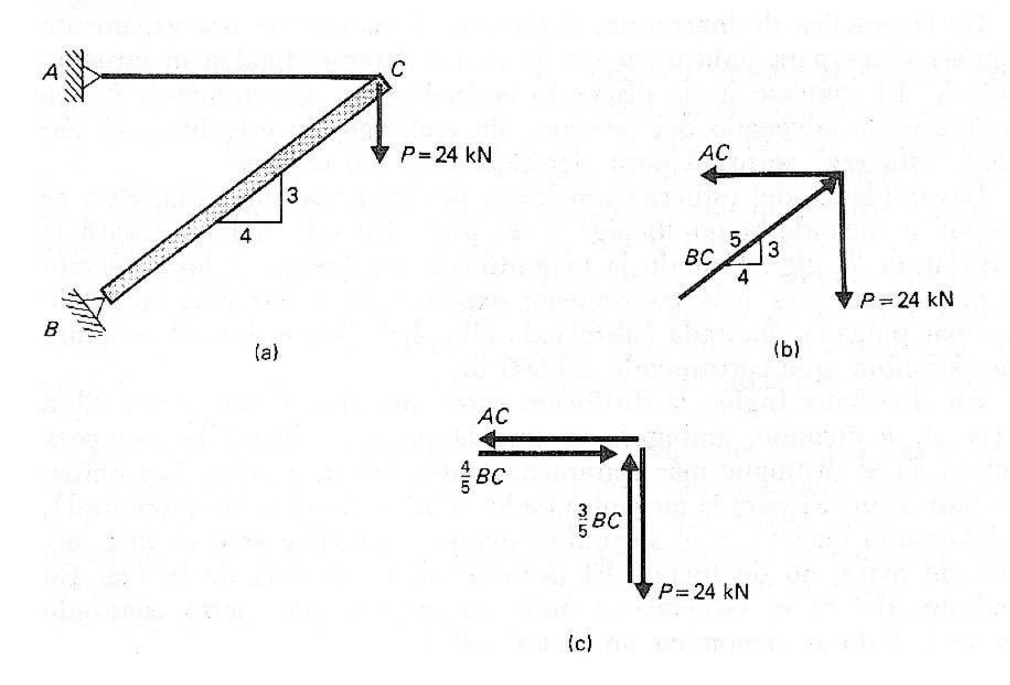


FIGURA 2.2

ecuaciones de equilibrio a las fuerzas de la Fig. 2.2 (c) da por resultado

$$+\uparrow \sum F_Y = 0: \quad \frac{3}{5}BC - 24 = 0$$

$$BC = 40 \text{ kN (Compresión)}$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum F_X = 0: \quad AC - \frac{4}{5}BC = 0$$

$$AC = \frac{4}{5}(40)$$

$$AC = 32 \text{ kN (Tensión)}$$

En seguida se calcula el área de la sección transversal de cada miembro

$$\text{Miembro } AC: \quad A = \frac{\pi D^2}{4} = \pi r^2$$
$$= \pi(15 \times 10^{-3})^2$$
$$= 706.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$
$$\text{Miembro } BC: \quad A = bd = (60 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-3})$$
$$= 6\,000 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Finalmente, se calcula el esfuerzo en cada miembro aplicando la definición de esfuerzo según la ecuación (2.1)

$$\text{Miembro } AC: \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{\text{Fuerza axial en } AC}{\text{Area de } AC}$$
$$\sigma = \frac{32 \times 10^3\ \text{N}}{706.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 45.3 \times 10^6\ \text{N/m}^2$$
$$\sigma = 45.3 \times 10^6\ \text{Pa} = 45.3\ \text{MPa}$$
$$\text{Miembro } BC: \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{\text{Fuerza axial en } BC}{\text{Area de } BC}$$
$$\sigma = \frac{40 \times 10^3\ \text{N}}{6 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = 6.67 \times 10^6\ \text{N/m}^2$$
$$\sigma = 6.67 \times 10^6\ \text{Pa} = 6.67\ \text{MPa}$$

La definición $\sigma = P/A$ es una fórmula muy importante y útil. Deben notarse dos cosas. La primera es que esta fórmula se aplica a partes que están cargadas ya sea a tensión o a compresión. La segunda, y más importante, es que *las cargas deben aplicarse a través del centroide de la sección transversal y deben coincidir con el eje*. Si una carga axial no pasa por el centroide de la sección tranversal del miembro la fórmula $\sigma = P/A$ no se aplica directamente. Casos de este tipo se estudian en el capítulo 6.

Problemas

2.1 Una varilla redonda de acero de 20 mm de diámetro está sujeta a una carga de tensión de 60 kN. Determinar el esfuerzo en la varilla.
2.2 Un cubo que tiene una sección transversal cuadrada de 80 mm de lado soporta una carga de compresión de 200 kN. Determinar el esfuerzo de compresión en el cubo.
2.3 Un cilindro hueco de latón soporta una carga axial de compresión de 10 000 N. Si el diámetro exterior es de 50 mm y el diámetro interior es de 30 mm, ¿cuál es el esfuerzo de compresión en el cilindro?
2.4 Una varilla roscada de acero, de $1\frac{1}{2}$ plg de diámetro soporta una carga de tensión de 26 klb. Determinar el esfuerzo en:

a) Una sección a través del cuerpo de la varilla.
b) Una sección a través de las roscas de la varilla. (*Nota*: Véase el Apéndice G para las áreas netas de roscas estándar para tornillos.)

2.5 Una varilla roscada de acero, de 1 plg de diámetro soporta una carga

de tensión. El esfuerzo de tensión no debe exceder de 18 000 lb/plg². Determinar la carga máxima que puede aplicarse. (*Nota*: Véase el Apéndice G para las áreas netas de roscas estándar de tornillos.)

2.6 Un poste de madera de 2 plg × 4 plg (tamaño nominal) soporta una carga axial de compresión. Determinar la carga máxima que puede aplicarse sin exceder un esfuerzo unitario de 1 000 lb/plg². (*Nota*: Véase el Apéndice I para las dimensiones de madera pulida.)

2.7 Una mesa de 1 m × 1.5 m soporta una carga uniformemente distribuida sobre su superficie. Determinar la carga máxima que puede soportar la mesa. Cada una de las cuatro patas de madera tiene una sección transversal de 50 mm × 50 mm (tamaño natural). El esfuerzo unitario de compresión no debe exceder de 4 MPa.

2.8 Una carga de 700 N debe ser soportada por un alambre de cobre. Determinar el diámetro requerido. El esfuerzo en el alambre no debe exceder de 120 MPa.

2.9 ¿Qué tamaño de tubería estándar de acero se requeriría para soportar una carga de compresión de 30 000 lb si el esfuerzo en la tubería no debe exceder de 16 000 lb/plg²? (*Nota*: Véase el Apéndice H para las dimensiones estándar de tuberías de acero.)

2.10 Una varilla roscada de acero soporta una carga de 16 klb. El esfuerzo unitario de tensión no debe exceder de 20 klb/plg². Determinar el diámetro de la varilla necesaria. (*Nota*: Véase el Apéndice G para las áreas netas de roscas estándar para tornillos.)

2.11 Un tubo de latón soporta una carga axial de 360 kN. Si el diámetro interior es de 30 mm, ¿cuál debe ser el diámetro exterior? El esfuerzo unitario no debe exceder de 80 MPa.

2.3 Deformación

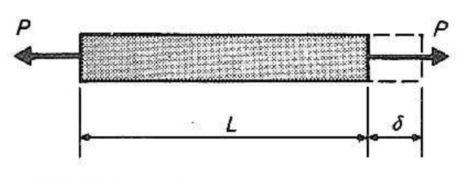


FIGURA 2.3

Considérese una barra sujeta a una carga axial de tensión P, como se muestra en la Fig. 2.3. Cuando se aplica la carga, se desarrolla un esfuerzo unitario en la barra que es igual a $\sigma = P/A$. Además, la barra se alarga ligeramente debido a la aplicación de la carga. En resistencia de materiales, estos cambios de longitud (también se conocen como elongaciones, o contracciones) se conocen como *deformaciones*. Una deformación es, por consiguiente, el cambio de longitud de una parte.

Las definiciones de deformación total y deformación unitaria se necesitan en la solución de muchos problemas. La *deformación total* es el cambio total de longitud del miembro. Es la dimensión δ indicada en la Fig. 2.3. Un método para calcular la deformación total se dará en la sección 2.6. La *deformación unitaria* se define como el cambio en longitud por unidad de longitud. Expresada algebraicamente, la deformación unitaria es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}, \tag{2.2}$$

donde

ϵ = deformación unitaria en plg/plg o en m/m.
δ = deformación total (cambio total de longitud) en plg o en m.
L = longitud original en plg o en m.

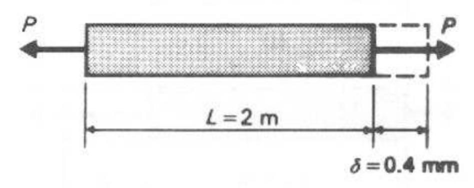


FIGURA 2.4

EJEMPLO 2.1 La longitud original de la barra indicada en la Fig. 2.4 es de 2 m y la deformación total debida a la aplicación de la carga P es de 0.4 mm. Determinar la deformación unitaria de la barra.

SOLUCION

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.4 \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \text{ m}}, \qquad \epsilon = 0.0002 \text{ m/m}.$$

La deformación unitaria es una cantidad adimensional. Por consiguiente, el valor numérico de la deformación unitaria es el mismo, sin importar el sistema de unidades. Por ejemplo, las dimensiones en el SI podrían convertirse en unidades del sistema Inglés como sigue:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.4 \text{ mm} \times 0.03937 \text{ plg/mm}}{2 \text{ m} \times 39.37 \text{ plg/m}} = 0.0002 \text{ plg/plg}$$

Aunque la deformación unitaria es una cantidad adimensional, y pueden omitirse las unidades, se acostumbra conservar las unidades originales en la expresión. Así, $\epsilon = 200 \times 10^{-6}$ m/m, o $\epsilon = 200 \times 10^{-6}$ plg/ plg son las formas preferidas para describir la deformación unitaria. Otra alternativa es expresar la deformación unitaria como $\epsilon = 200\ \mu/\mu$, donde el símbolo μ significa micrones. ■

Problemas

2.12 Una barra de 3 m de longitud está sujeta a una carga axial de tensión que produce una elongación de 0.7 mm. Determinar la deformación unitaria de la barra.
2.13 Un alambre de 20 pies de longitud tiene una deformación unitaria de 0.00625 plg/plg. Determinar la deformación total del alambre.
2.14 Un alambre tiene una deformación unitaria de 0.0002 μ y una deformación total de 7 mm. ¿cuál es la longitud de este alambre?

2.4 Elasticidad

El concepto de elasticidad es importante en mecánica de materiales. Mucha gente tiene el falso concepto de que un cuerpo es elástico si puede

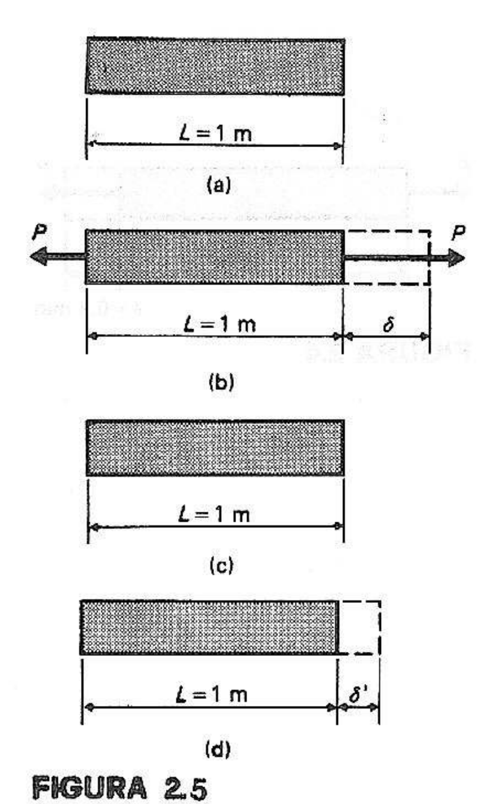


FIGURA 2.5

estirarse una gran distancia sin romperse, como en el caso de una banda de caucho. Sin embargo, esta no es la definición correcta usada en mecánica de materiales.

Elasticidad es la propiedad que hace que un cuerpo que ha sido deformado regrese a su forma original después de que se han removido las fuerzas deformadoras. Por ejemplo, consideremos la barra de la Fig. 2.5. Supóngase que esta barra que era de 1 m de longitud antes de cargarla se ha estirado una cantidad δ debido a la aplicación de una carga P. Si la barra regresa a su longitud original de 1 m después de quitar la carga, como en la Fig. 2.5 (c), se dice que el material es perfectamente elástico (con esta carga). Sin embargo, si la barra no recobra su longitud original después de cesar la acción de la carga, como en la Fig. 2.5 (d), se dice que el material es parcialmente elástico. La deformación δ' se llama la deformación permanente; permanece después de que se ha quitado la carga.

Según esta definición, casi todos los materiales de ingeniería tales como el acero, aluminio, vidrio, concreto, madera, etc., pueden considerarse como elásticos. A los esfuerzos normales a los que se usan los materiales, generalmente se consideran como perfectamente elásticos. Sin embargo, si los esfuerzos en un cuerpo llegan a ser demasiado grandes, el cuerpo nunca regresará a sus dimensiones originales.

2.5 Relación entre esfuerzo y deformación

Ya han sido discutidas dos de las definiciones más importantes y básicas de la mecánica de materiales —las que corresponden al esfuerzo unitario y a la deformación unitaria—. De igual importancia es la relación entre estos términos.

En el siglo diecisiete (1658), Robert Hooke publicó un artículo en que estableció que el esfuerzo era directamente proporcional a la deformación unitaria. Este hecho se conoce como Ley de Hooke. Matemáticamente puede expresarse como $\sigma \propto \epsilon$, que significa, por ejemplo, que si una barra está sujeta a una carga de tensión de 100 lb, se alargará una cierta cantidad. Si la carga se incrementa a 200 lb, el alargamiento se duplicará.

Esta proporción puede convertirse en una ecuación introduciendo una constante de proporcionalidad. Esta constante de proporcionalidad fue calculada a principios del siglo diecinueve (1802) por Thomas Young, un científico inglés. Se conoce como el *módulo de elasticidad,* o *módulo de Young.* El módulo de elasticidad (al que se ha dado como símbolo E) se ha determinado para los diversos materiales de ingeniería. En el Apéndice C se incluye una lista de los módulos de elasticidad para muchos de los materiales más comunes en ingeniería.

Al incluir el módulo de elasticidad, la Ley de Hooke, $\sigma \propto \epsilon$ se convierte en una ecuación importante y útil, que se expresa como

$$\sigma = E\epsilon, \tag{2.3}$$

donde

σ = esfuerzo unitario en lb/plg², o N/m² o Pa.
ϵ = deformación unitaria en plg/plg, o m/m,
E = módulo de elasticidad en lb/plg², o N/m², o Pa.

EJEMPLO 2.2 Una barra de acero de ¾ plg de diámetro está sujeta a una fuerza de tensión de 7 000 lb. El módulo de elasticidad del acero es de 30 000 000 lb/plg². Determinar la deformación unitaria.

SOLUCION

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{7\,000\text{ lb}}{0.442\text{ plg}^2} = 15\,800\text{ lb/plg}^2$$
$$\sigma = E\epsilon; \quad 15\,800 = 30\,000\,000\epsilon,$$
$$\epsilon = 0.000528\text{ plg/plg}.$$

Si la longitud original de la barra fuera de 8 pies, la deformación total sería:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}; \quad \delta = \epsilon L = (0.000528)(8 \times 12) = 0.051\text{ plg.} \quad ■$$

Problemas

Nota: Véase el Apéndice C para los módulos de elasticidad.

2.15 Una varilla de acero de 10 mm de diámetro y 2 m de longitud está sujeta a una fuerza de tensión de 18 000 N. Determinar:

a) la deformación unitaria en la varilla,
b) la deformación total de la varilla.

2.16 Un bloque de aluminio de 250 mm de longitud y 80 mm por lado está sujeto a una fuerza de compresión de 600 kN. Determinar:

a) la deformación unitaria en el bloque,
b) la deformación total en el bloque.

2.17 Un bloque de madera (de abeto Douglas) de 2 plg × 2 plg de sección transversal nominal y de 8 plg de longitud se somete a una fuerza axial de compresión de 3 600 lb. Determinar:

a) la deformación unitaria en el bloque,
b) la deformación total del bloque.

2.6 Cálculo de la deformación

Si un miembro se somete a una fuerza exterior axial P, como se indica en la Fig. 2.6, la barra se deforma (se alarga, en este caso). Puede demos-

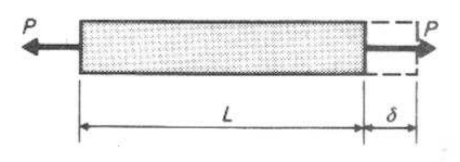


FIGURA 2.6

trarse experimentalmente que la deformación δ es directamente proporcional a la carga P y a la longitud L, e inversamente proporcional al área de la sección transversal A. Expresado matemáticamente, $\delta \propto PL/A$.

Esto es razonable, ya que a mayor carga, mayor deformación (Ley de Hooke), y a mayor longitud de varilla, más moléculas se presentan en cada fibra. Por consiguiente, el alargamiento acumulado de cada fibra será mayor. La deformación es inversamente proporcional al área ya que a medida que aumenta el área, se presentan más fibras para soportar la carga, y cada fibra soportará una menor parte de esa carga.

Para convertir esta proporción en una ecuación, debe incluirse la constante de proporcionalidad. Esta constante es el inverso del módulo de elasticidad de Young. La ecuación para la deformación total de una barra cargada axialmente puede entonces escribirse como;

$$\delta = \frac{PL}{AE}, \tag{2.4}$$

donde

δ = deformación total en plg o m,
P = carga aplicada en lb, o N,
L = longitud en plg o m,
A = área de la sección transversal en plg² o m²,
E = módulo de elasticidad en lb/plg² o N/m² o Pa.

La ecuación (2.4) es exactamente la misma que la ec. (2.3), excepto que tiene una forma más conveniente para resolver problemas que involucran cambios de longitud. Para mostrar la correlación entre las ecuaciones, pueden substituirse $\sigma = P/A$ y $\epsilon = \delta/L$ en la ec. (2.3), como se indica a continuación:

$$\sigma = \epsilon E, \tag{2.3}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{\delta E}{L},$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}. \tag{2.4}$$

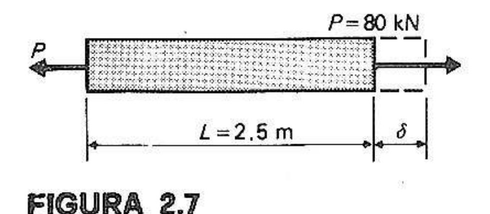


FIGURA 2.7

EJEMPLO 2.3 La barra de acero indicada en la Fig. 2.7 es de 2.5 m de longitud y tiene una área en su sección transversal de 3×10^{-4} m². Determinar la deformación total producida por una fuerza de tensión de 80 kN. El módulo de elasticidad es de 200 GPa. (Véase el Apéndice C).

SOLUCION

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(80 \times 10^3 \text{ N})(2.5 \text{ m})}{(3 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} = 0.0033 \text{ m}.$$

$$\delta = 3.3 \text{ mm}.$$

■

Problemas

2.18 Una barra de aluminio, de 4×10^{-4} m^2 de sección transversal y de 2 m de longitud, está sujeta a una fuerza axial de tensión de 25 kN. Determinar:
a) el esfuerzo unitario,
b) la deformación total,
c) la deformación unitaria.

2.19 Un bloque de cobre, de 4 plg × 4 plg de sección transversal y 12 plg de longitud, está sujeto a una fuerza de compresión de 90 klb. Determinar:
a) el esfuerzo unitario,
b) la deformación total,
c) la deformación unitaria.

2.20 Una solera de acero está sujeta a una fuerza de tensión de 70 kN. Las dimensiones de la lámina son 40 mm × 10 mm × 3 m. Determinar:
a) el esfuerzo unitario,
b) la deformación total,
c) la deformación unitaria.

2.21 Una barra de aluminio, de 1 plg de diámetro y 8 pies de longitud, está sujeta a una carga axial de tensión. Determinar la magnitud de la fuerza que hará que la deformación total sea de 0.075 plg.

2.22 Un ángulo de acero estructural de 3 plg × 3 plg × ¼ plg × 10 pies de longitud está sujeto a una fuerza axial de tensión *P*. La deformación total no debe exceder de 0.080 plg. Determinar la fuerza máxima que puede aplicarse.

2.23 Una varilla redonda de acero de 2 m de longitud está sujeta a una fuerza axial de tensión de 80 kN. La elongación total no debe exceder de 1 mm. Determinar el diámetro necesario.

2.24 Una varilla redonda de aluminio de 1 plg de diámetro soporta una fuerza de tensión de 75 kN. El alargamiento total no debe exceder de 1 mm. Determinar la longitud máxima permisible.

2.25 Determinar la carga máxima de tensión que puede soportar una barra de aluminio de 1.5 m de longitud y de 10 mm × 30 mm de sección transversal. El esfuerzo de tensión no debe exceder de 100 MPa y el alargamiento debe ser menor que 2 mm.

2.26 Una varilla redonda de acero de 8 pies de longitud está sujeta a una carga axial de tensión de 8 000 lb. ¿Qué diámetro debe tener la varilla si el esfuerzo de tensión no debe exceder de 16 000 lb/plg^2 y el alargamiento debe ser menor que 0.075 plg? Supóngase que se consiguen varillas con incrementos de $\frac{1}{16}$ plg de diámetro.

2.7 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria

Cuando se elige un material para un edificio o una máquina, se deben conocer sus propiedades, así como su capacidad para soportar esfuerzos. Las diversas propiedades mecánicas de un material se determinan mediante una serie de pruebas de laboratorio. Las máquinas de ensayos y los aditamentos para medir deformaciones se discuten brevemente en el capítulo 15 de este libro. Sin embargo, en esta sección, se estudiará en forma general los resultados de los diagramas esfuerzo-deformación uni-

taria obtenidos a partir de ensayos a tensión, ya que explican algunas definiciones importantes y algunas propiedades de los materiales que son útiles en el desarrollo de la materia.

Un ensayo a tensión para un material, puede describirse sencillamente, como sigue. Se coloca una varilla redonda de diámetro conocido en una máquina de ensayo, tal como la mostrada en la Fig. 15.3. La máquina de ensayo ejerce una fuerza sobre esta probeta que puede medirse en cualquier tiempo durante el ensayo. Se adhiere a la probeta un extensómetro, que es un instrumento para medir cambios de longitud con exactitud. Después se aplica a la probeta una carga de tensión que se va incrementando lentamente hasta que se presenta la fractura. A ciertos intervalos durante el ensayo, se hacen medidas simultáneas de la carga y la deformación, y a partir de estos datos se traza una gráfica de esfuerzos contra deformaciones unitarias.

Al construir esta gráfica, trazamos los valores del esfuerzo unitario (P/A) como las ordenadas y los valores correspondientes de las deformaciones unitarias (δ/L) como las abscisas. El resultado es una gráfica similar a la de la Fig. 2.8, que es la gráfica típica para acero dulce. Un análisis cuidadoso de esta curva ilustrará varias definiciones y propiedades importantes que debemos conocer cuando estudiamos mecánica de materiales.

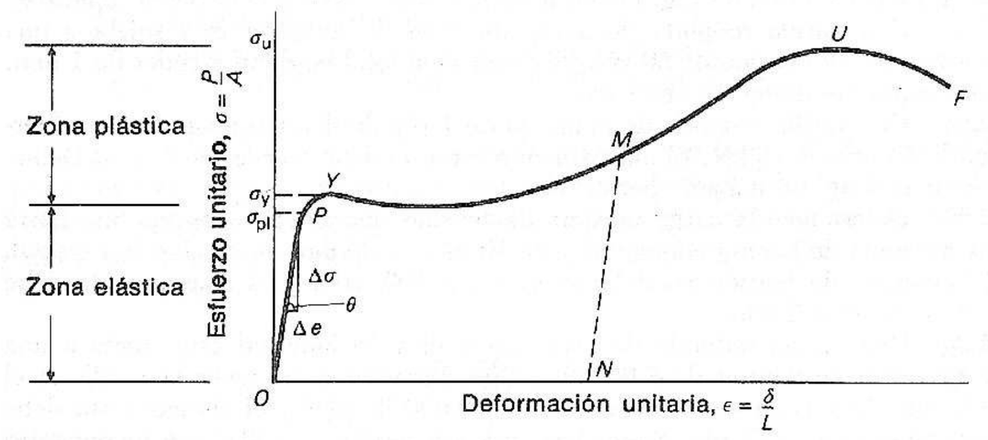


FIGURA 2.8

La curva empieza en el origen y continúa como una línea recta hasta que llega a P. Más adelante se encuentra el punto Y donde la curva disminuye su pendiente, se hace más horizontal e incluso puede bajar ligeramente. Después de continuar aproximadamente horizontal una cierta distancia, la curva tiende otra vez a subir hasta U, y luego decrece hasta alcanzar el punto F, donde ocurre la fractura.

Cada uno de esos puntos, o segmentos de la curva, recibe un nombre. El punto P es el *límite de proporcionalidad* del material. Para un esfuerzo mayor que, el esfuerzo en el límite de proporcionalidad (σ_{pl}), ya no se cumple la Ley de Hooke. Es muy importante notar que *cualquiera de las fórmulas que se hayan deducido o vayan a deducirse en este libro, son*

válidas solamente cuando el esfuerzo unitario en el material es menor que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad. En diseño, el esfuerzo en el material se limita a valores menores que el límite de proporcionalidad. Si los esfuerzos exceden este valor, el esfuerzo ya no es proporcional a la deformación unitaria, y las fórmulas ya no son válidas.

Justamente después del límite de proporcionalidad, (en Y), la curva disminuye su pendiente y el material se deforma con muy poco o ningún aumento de la carga. El material fluye o se deforma plásticamente en este punto. El esfuerzo para el cual comienza esta fluencia, se llama el esfuerzo en el punto de fluencia σ_y. Puede notarse que el límite de proporcionalidad y el punto de fluencia están muy próximos. Es difícil notar la diferencia entre los dos puntos, a menos que se hagan las medidas y los dibujos con mucha exactitud.

Posteriormente, la curva incrementa su pendiente y alcanza un valor máximo en U. El esfuerzo correspondiente a este punto (σ_u) se llama el esfuerzo último del material, que es el máximo esfuerzo que el material es capaz de soportar. Después la curva desciende hasta el punto F, donde ocurre la fractura.

Si se observara cuidadosamente la probeta durante el experimento, se notaría que mientras el espécimen se está alargando, su diámetro también se está reduciendo. Los valores del esfuerzo en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria se obtuvieron usando el área original del espécimen y no el área real en los diversos tiempos a lo largo del ensayo. Esta es una práctica usual, y explica por qué la curva desciende en vez de elevarse a partir del esfuerzo último, hasta el punto de ruptura. Después de que se alcanza el esfuerzo último, y justamente antes de la fractura, el espécimen forma un cuello o acinturamiento en el lugar de la fractura. Por consiguiente, el esfuerzo real en este punto es considerablemente mayor que el valor mostrado en la curva. Para ilustrar la forma del cuello o acinturamiento se muestra en la Fig. 2.9 un espécimen antes y después de la falla.

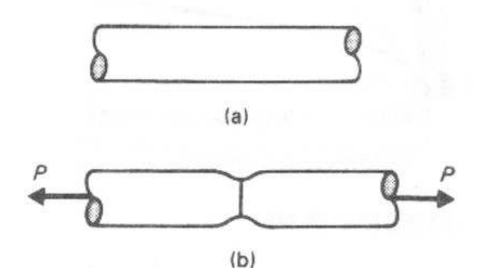


FIGURA 2.9 **(a) Antes de la falla, (b) después de la falla.**

Cada día se hace más común el analizar los esfuerzos en el intervalo *elástico* o en el *intervalo plástico* con respecto a las diferentes teorías de diseño. El *intervalo elástico* de un material es el intervalo de esfuerzos, dentro del cual el material permanece elástico; es decir, regresa a su forma original después de descargarlo. En el intervalo elástico, los esfuerzos son menores que el punto de fluencia. Cuando los esfuerzos exceden el punto de fluencia, tiene lugar un flujo plástico, y el material nunca vuelve a recuperar su forma original. Este intervalo de esfuerzos se llama *intervalo plástico.*

El diagrama esfuerzo-deformación unitaria indica también la rigidez de un material. Considerando la porción recta de la curva (tramo OP), se encuentra que la pendiente de la recta es igual a la variación en el esfuerzo unitario dividido por la variación en la deformación unitaria. La expresión para la pendiente puede escribirse como:

$$\tan\theta = \frac{\text{variación de esfuerzo}}{\text{variación en deformación}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}.$$

Esto es también la definición del módulo de elasticidad ($E = \sigma/\epsilon$). Una indicación del módulo de elasticidad (o rigidez relativa) del material puede obtenerse observando la pendiente de la porción inicial de la curva. Entre mayor es la pendiente de la curva, mayor es el módulo de elasticidad (o rigidez relativa) del material.

Si el espécimen sujeto a tensión se carga hasta un esfuerzo menor que el límite de proporcionalidad y después se descarga, los puntos trazados sobre el diagrama durante la descarga quedarán sobre la recta original OP. Sin embargo, si el espécimen se carga por encima del límite de proporcionalidad, como el punto M de la Fig. 2.8, y después se descarga, los puntos trazados sobre el diagrama caerán sobre la recta MN. Si el esfuerzo se reduce a cero, se conservará una deformación permanente ON en la barra.

2.8 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria para otros materiales

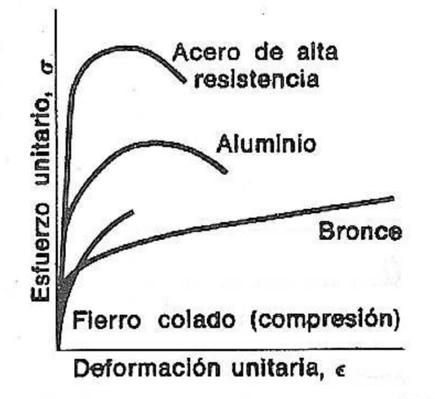


FIGURA 2.10

Para otros materiales diferentes al acero dulce, pueden trazarse diagramas esfuerzo-deformación unitaria de una manera semejante a la descrita en la sección 2.8. La 2.10 muestra la forma típica de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria para diversos materiales usuales. Cada material tiene una forma y propiedades peculiares. Por consiguiente, las curvas mostradas en la Fig. 2.10 difieren considerablemente de la correspondiente al acero mostrada en la Fig. 2.8. Las características del diagrama esfuerzo-deformación unitaria influyen sobre los esfuerzos especificados para el diseño de partes fabricadas con el material correspondiente.

En la mayoría de los materiales no se presenta tanta proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitarias como para el acero. Sin embargo, esta falta de proporcionalidad no causa problemas en los casos usuales de análisis y diseño, ya que los diagramas de la mayoría de los materiales estructurales más comunes son casi en forma de línea recta hasta alcanzar los esfuerzos que normalmente se usan en el diseño. Sin embargo, si se usa un material que se aparta de la linealidad aun para esfuerzos pequeños, debe tenerse en cuenta que las deformaciones calculadas usando la Ley de Hooke tendrán algún error.

Las características del comportamiento dúctil o frágil de un material pueden reconocerse en un diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Un material dúctil, tal como el acero estructural dulce, el aluminio, o el latón, exhibirán un amplio intervalo de deformación en el intervalo plástico, antes de la fractura. El segmento que va de A a B en la Fig. 2.11 ilustra este tipo de comportamiento. Por otro lado, un material frágil, tal como el hierro colado o el vidrio, se romperán sin ninguna o muy pequeña deformación plástica. El segmento que va de C a D en la Fig. 2.11 indica este comportamiento.

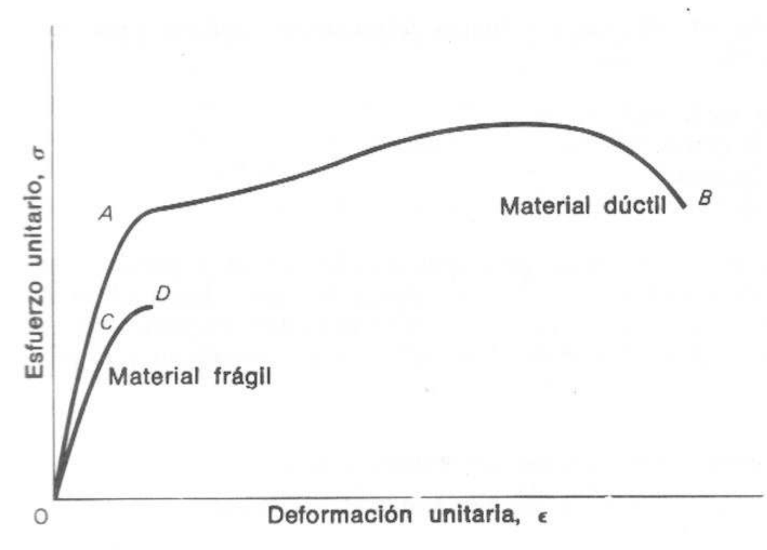


FIGURA 2.11

El módulo de elasticidad es la pendiente del diagrama esfuerzo deformación unitaria. Para materiales que no tienen una porción inicial recta, el módulo de elasticidad debe definirse arbitrariamente. En estos casos, el módulo de elasticidad se toma generalmente ya sea como la pendiente de la tangente inicial a la curva, o como la pendiente de una línea que une el origen y algún esfuerzo unitario arbitrario, que, en general, es el esfuerzo de diseño. La Fig. 2.12 ilustra gráficamente estos módulos de elasticidad.

La mayoría de los materiales no exhiben un punto de fluencia tan preciso como el acero dulce. Cuando el punto de fluencia no se puede determinar claramente como, por ejemplo, en el diagrama general de esfuerzo-deformaciones unitarias mostrado en la Fig. 2.12 el esfuerzo° de fluencia debe definirse arbitrariamente. Esto generalmente se hace especificando una pequeña cantidad de deformación permanente (generalmente el 0.2%) que es aceptable en el diseño. Para determinar el esfuerzo de fluencia por este método, se traza una recta paralela a la del módulo de elasticidad, a partir de una deformación unitaria igual a la cantidad aceptable, que, como ya se mencionó anteriormente, es generalmente de 0.2%. La Fig. 2.12 ilustra este método para determinar el esfuerzo de fluencia para un material que no exhibe un punto de fluencia bien definido.

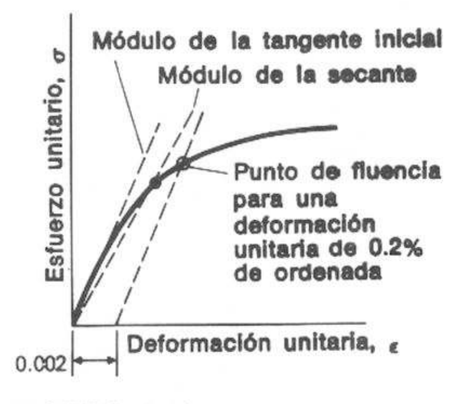
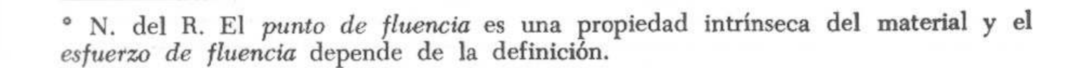


FIGURA 2.12

Problemas

2.27 Un ensayo a tensión de un acero dulce produjo los datos mostrados en


° N. del R. El *punto de fluencia* es una propiedad intrínseca del material y el *esfuerzo de fluencia* depende de la definición.

la Tabla 2.1. Trazar un diagrama esfuerzo-deformación unitaria para este material, determinando además:

a) el módulo de elasticidad,
b) el límite de proporcionalidad,
c) el punto de fluencia,
d) el esfuerzo último.

Debe escogerse una escala adecuada para que toda la gráfica se pueda trazar en una sola hoja. Es conveniente volver a dibujar la curva hasta el punto de fluencia usando una escala mayor para deformaciones unitarias con el objeto de determinar más exactamente el límite de proporcionalidad y el punto de fluencia.

TABLA 2.1 Prueba a tensión de un acero dulce

Diámetro inicial del espécimen = 0.506 plg. Longitud inicial entre marcas de la probeta = 2 plg.

Carga (lb)	Alargamiento en la longitud de 2 plg	Carga (lb)	Alargamiento en la longitud de 2 plg
0	0.00	7 200	0.017
1 000	0.00025	8 800	0.050
2 000	0.00068	10 000	0.094
3 000	0.00102	11 200	0.17
4 000	0.00144	12 800	0.30
5 000	0.00170	13 300	0.48
6 000	0.00204	13 000	0.62
7 000	0.00238	12 400	0.77
7 600	0.0064	9 600	0.80
7 400	0.0096		

2.28 La Tabla 2.2 da los resultados de un ensayo a compresión de hierro fundido. Dibujar el diagrama esfuerzo-deformación unitaria y determinar:

a) el módulo de elasticidad considerando la tangente inicial a la curva.
b) el punto de fluencia usando el método de la deformación unitaria de 0.2%.

TABLA 2.2 Prueba a compresión en una fundición de hierro

Esfuerzo unitario (klb/plg^2)	Deformación unitaria (plg/plg)	Esfuerzo unitario (klb/plg^2)	Deformación unitaria (plg/plg)
0	0	40	0.0046
10	0.0004	50	0.0068
20	0.0014	60	0.0097
30	0.0028	66	0.014

2.9 Módulo o relación de Poisson

Siempre que un cuerpo se somete a la acción de una fuerza, se deformará en la dirección de la fuerza. Este concepto y los métodos para calcular la deformación se discutieron en las secciones 2.2 y 2.6. Sin embargo, siempre que se producen deformaciones en la dirección de la fuerza aplicada, también se producen deformaciones laterales. La Fig. 2.13 muestra la deformación total de un cuerpo durante la carga.

Las deformaciones laterales que se producen tienen una relación constante con las deformaciones axiales. Mientras que el material se mantenga dentro del rango elástico de esfuerzos, esta relación es constante:

$$\mu = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

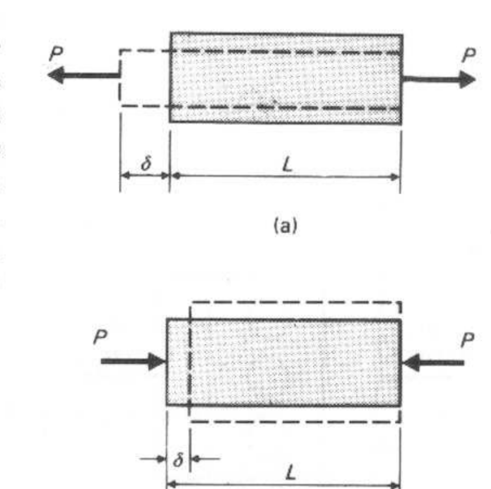
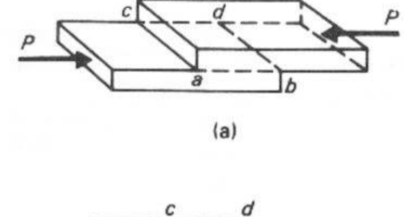


FIGURA 2.13

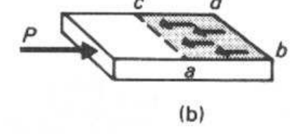
El término μ se llama módulo de Poisson, en honor de S.D. Poisson, quien expresó este concepto en 1828. En general, el valor de μ para la mayoría de los materiales está comprendido entre 0.25 y 0.35. El módulo de Poisson para el acero estructural es aproximadamente 0.25. Aunque las deformaciones laterales se producen en todos los cuerpos sometidos a esfuerzos, generalmente no afectan los esfuerzos longitudinales. La única excepción se presenta cuando se impide que se efectúe libremente el movimiento lateral. Este no es el caso en la mayoría de los diseños.

2.10 Esfuerzos cortantes

Los esfuerzos cortantes se producen en un cuerpo cuando las fuerzas aplicadas tienden a hacer que una parte del cuerpo se corte o deslice con respecto a la otra. La Fig. 2.11 ilustra un método de cómo se pueden producir los esfuerzos cortantes. En este caso, la porción superior del bloque tiende a cortarse o deslizarse con respecto a la porción inferior. Las fuerzas cortantes que resisten la carga aplicada P actúan sobre el área *abcd* mostrada en la Fig. 2.14 (b). Estas fuerzas actúan en un plano paralelo a la carga aplicada, y no en un plano perpendicular a la carga como en el caso de los esfuerzos normales discutidos en la sección 2.2.



(a)



(b)

FIGURA 2.14

El esfuerzo cortante es igual a la fuerza cortante dividida entre el área sobre la cual actúa. O sea:

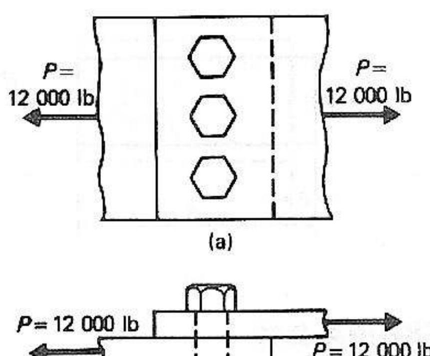
$$\tau = \frac{P}{A}, \tag{2.5}$$

donde

τ = esfuerzo cortante, en lb/plg², o Pa en N/m²,
P = fuerza cortante en lb, o N,
A = área sobre la cual actúa la fuerza cortante, en plg², o en m².

La ec. (2.5) parece indicar que el esfuerzo cortante está uniformemente distribuido sobre el área. Esta es la suposición usual, mas no es cierta. El esfuerzo obtenido usando la ec. (2.5) es el esfuerzo cortante promedio en esa área. La distribución real del esfuerzo es de naturaleza no uniforme. En la práctica, la distribución real no es muy importante, ya que los valores límites para el esfuerzo cortante están basados en el valor medio.

Puede notarse que el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 2.11 no está en equilibrio. Aquí $\Sigma F_x = 0$, pero hay un desequilibrio de momentos producido por las dos fuerzas P, que actúan separadas por una pequeña distancia. Este par es resistido por otro par (no indicado) que actúa normalmente a la superficie sometida al esfuerzo cortante. Sin embargo, en la mayoría de los casos que se encuentran, este par es suficientemente pequeño como para poder despreciarse.



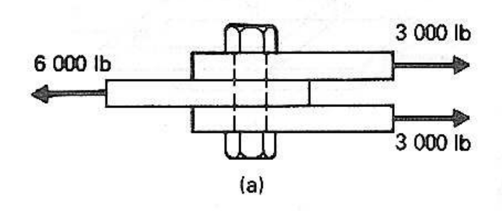


FIGURA 2.15

EJEMPLO 2.4 Se usan tres pernos de ¾ plg para unir las dos placas de acero mostradas en la Fig. 2.15. La conexión transmite una fuerza de 12 000 lb. Determinar el esfuerzo cortante en los pernos.

SOLUCION Cuando la línea de acción de la fuerza aplicada pasa a través del centro de gravedad del conjunto de los pernos, se considera que cada perno soporta una parte igual de la carga. Este es el caso de la Fig. 2.15; la fuerza cortante sobre cada perno es de 4 000 lb.

El esfuerzo sobre cada perno puede calcularse como:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{4\,000}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4})^2}, \quad \tau = 9\,050 \text{ lb/plg}^2. \quad ■$$

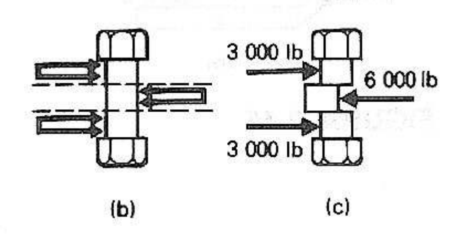


FIGURA 2.16

EJEMPLO 2.5 Un perno de ¾ plg se usa para unir las tres placas mostradas en la Fig. 2.16. Determinar el esfuerzo cortante en el perno.

SOLUCION En este caso, el perno puede fallar a lo largo de dos planos, como se muestra en la Fig. 2.16 (b). Los esfuerzos cortantes sobre los dos planos se suponen iguales. Considerando cualquiera de los planos sometidos a esfuerzo cortante, se encuentra que la fuerza cortante es 3 000 lb. Entonces, el esfuerzo cortante sobre el perno es de:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{3\,000}{0.442}, \quad \tau = 6\,790 \text{ lb/plg}^2.$$

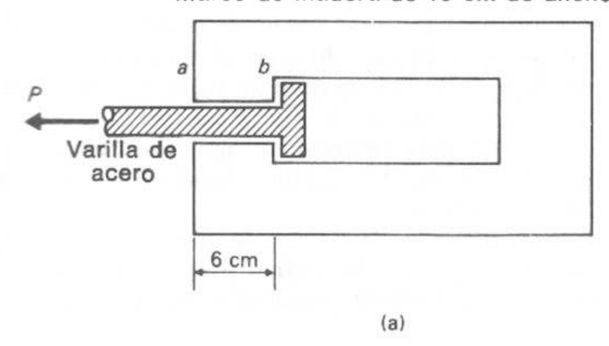
Otra forma de analizar este problema es considerar la fuerza cortante total transmitida que actúa sobre el área total en cortante. El resultado es, por supuesto, el mismo, como lo muestran los cálculos siguientes:

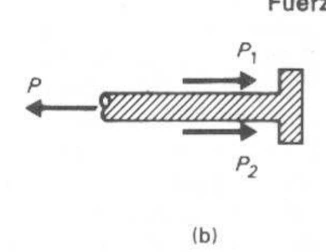
$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{6\,000}{2(0.442)}, \quad \tau = 6\,790 \text{ lb/plg}^2. \quad ■$$

EJEMPLO 2.6 Una barra de acero con una placa rectangular soldada a su extremo se apoya contra un marco de madera, como se indica en la Fig. 2.17.

El marco de madera es de 100 mm de ancho, y el espesor de la proyección extrema es de 60 mm. Determinar la fuerza máxima P que puede aplicarse a la barra si el esfuerzo cortante último en la madera es de 3 200 kPa.

SOLUCION La Fig. 2.17 (b) es un diagrama de cuerpo libre de la barra de acero. Las fuerzas P_1 y P_2 son las fuerzas de las proyecciones extremas del marco de madera contra la placa de acero. La Fig. 2.17 (c) es un diagrama de cuerpo libre de la proyección extrema superior a lo largo del plano *abcd*. La fuerza cortante resultante F actúa paralelamente a este plano. El valor último de esta fuerza cortante es





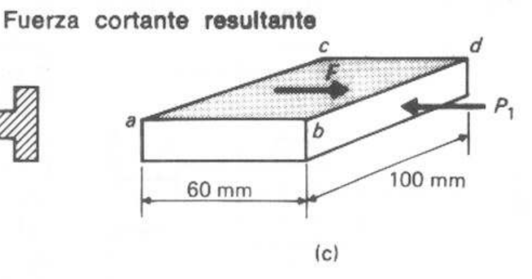


FIGURA 2.17

$$\tau = \frac{F}{A}; \quad F = \tau A = (3\,200 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(0.06 \text{ m} \times 0.10 \text{ m})$$

$$F = 19.2 \text{ kN}.$$

La fuerza máxima, P_1, de la placa de acero contra la proyección extrema superior del marco es

$$\overset{+}{\leftarrow}\sum F_X = 0: \quad P_1 - F = 0$$

$$P_1 = 19.2 \text{ kN}.$$

Suponemos que $P_1 = P_2$ debido a la simetría del marco. Aplicando la ecuación de equilibrio a la Fig. 2.17 (b) da

$$\overset{+}{\leftarrow}\sum F_X = 0: \quad P - P_1 - P_2 = 0,$$

$$P = 19.2 + 19.2,$$

$$P = 38.4 \text{ kN}. \quad \blacksquare$$

Problemas

2.29 Determinar el esfuerzo cortante en el bloque mostrado en la Fig. P2.29.
2.30 Dos placas se unen por medio de dos pernos de ⅝ plg, como se muestra en la Fig. P2.30. Determinar el esfuerzo cortante en cada perno debido a una fuerza P = 5 000 lb.

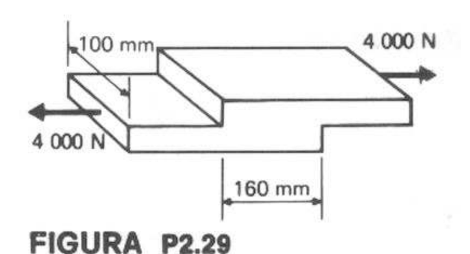


FIGURA P2.29

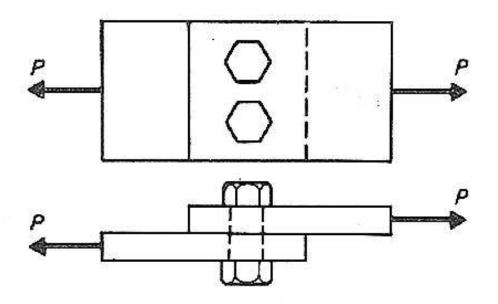
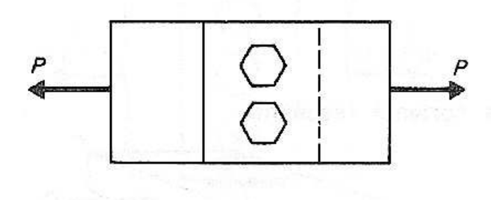


FIGURA P2.30



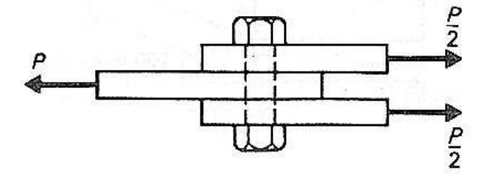
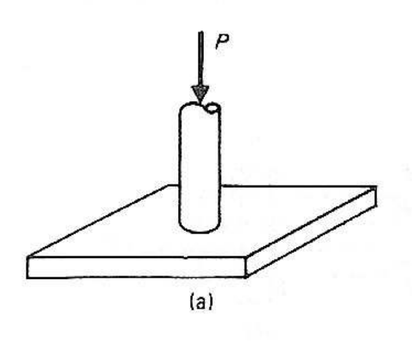


FIGURA P2.31



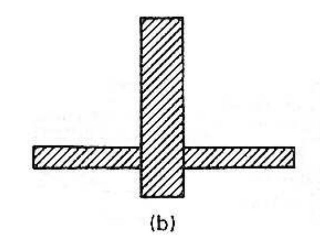


FIGURA P2.35

2.31 Tres placas se unen por medio de dos pernos de $\frac{3}{4}$ plg, como se indica en la Fig. P2.31. Determinar el esfuerzo cortante en cada perno debido a una fuerza $P = 12$ klb.

2.32 Determinar la máxima fuerza P que puede aplicarse a la unión mostrada en la Fig. P2.30. El esfuerzo cortante en los pernos no debe exceder de 10 000 lb/plg^2. El diámetro de los pernos es $\frac{5}{8}$ plg.

2.33 Determinar la máxima fuerza P que pueda aplicarse a la unión mostrada en la Fig. P2.31. El esfuerzo cortante en los pernos no debe exceder de 10 000 lb/plg^2. El diámetro de los pernos es de $\frac{3}{4}$.

2.34 En la unión mostrada en la Fig. P2.31, $P = 31\,000$ lb y el esfuerzo cortante en los pernos no debe exceder de 10 000 lb/plg^2. Determinar el diámetro de los pernos.

2.35 Determinar la fuerza necesaria para perforar un agujero redondo de 20 mm de diámetro en una placa de acero de 10 mm de espesor. El esfuerzo cortante último para el acero es de 34.5 GPa. El agujero se hace forzando un punzón a través de la placa, como se muestra en la Fig. P2.35.

2.36 Se requiere una fuerza de 8.5 kN para perforar un agujero redondo de 1.9 mm de diámetro en una placa de 10 mm de espesor. ¿Cuál es el esfuerzo cortante último sobre el material de la placa?

2.37 Se desea perforar un agujero redondo de $\frac{3}{4}$ plg de diámetro en una placa de acero cuyo esfuerzo cortante último es de 48 000 lb/plg^2. Si la capacidad de la máquina perforadora es de 100 000 lb ¿cuál es el máximo espesor de la placa que puede perforarse?

2.38 La placa A de la Fig. P2.38 es de 128 mm de ancho, y está pegada a los bloques B y C en las superficies de contacto. Determinar la longitud de la unión, L, necesaria para soportar una carga de 40 kN, si el esfuerzo cortante a lo largo de las superficies pegadas va a ser de 600 kPa.

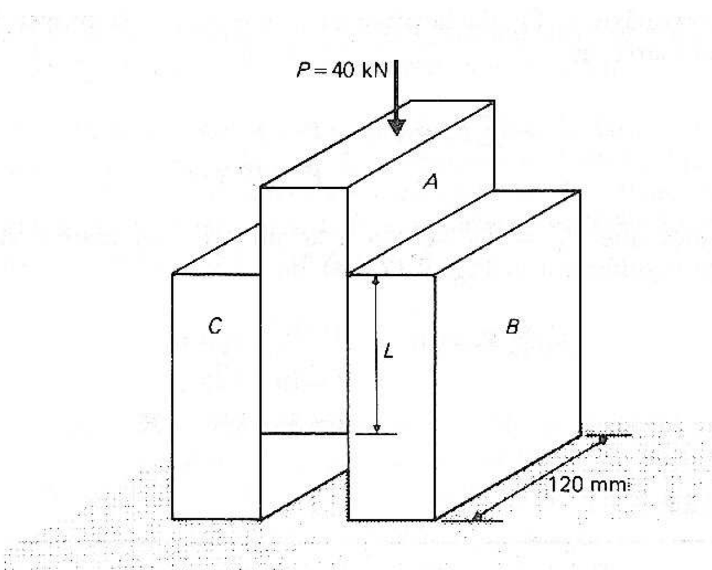


FIGURA P2.38

2.11 Esfuerzo de aplastamiento

Un caso especial de esfuerzo normal ocurre cuando un cuerpo es soportado por otro. El esfuerzo de compresión desarrollado entre dos cuerpos en su superficie de contacto se llama *esfuerzo de aplastamiento.*

La Fig. 2.18 muestra un poste soportado por una zapata, que a su vez, está soportada por el terreno. El esfuerzo de apoyo ocurre en la superficie de contacto entre el poste y la zapata, y también entre la zapata y el terreno, como se muestra en la Fig. 2.18 (b) y (c). Su magnitud puede determinarse como $\sigma = P/A$ si las cargas se aplican a través del centroide de la sección transversal. Nuevamente es muy importante notar que las cargas deben aplicarse a través del centroide de la sección transversal para que la fórmula sea válida. Los casos donde la carga se aplica excéntricamente se estudiarán en el capítulo 6.

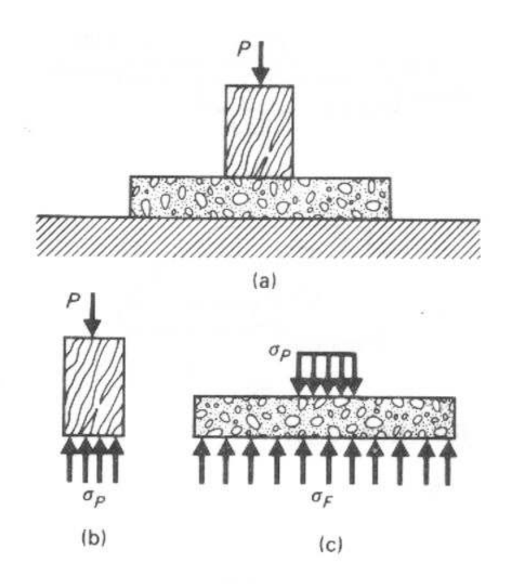
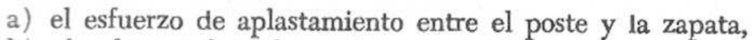


FIGURA 2.18

EJEMPLO 2.7 En la Fig. 2.18, la carga P = 8 000 lb; el poste de madera tiene 4 plg × 4 plg, y la zapata de concreto es un cuadrado de 2 pies de lado. Determinar



a) el esfuerzo de aplastamiento entre el poste y la zapata,
b) el esfuerzo de aplastamiento entre la zapata y el terreno.

SOLUCION

a) El esfuerzo de aplastamiento entre el poste y la zapata es de:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8\,000}{(4)(4)}, \quad \sigma = 500 \text{ lb/plg}^2$$

b) El esfuerzo de aplastamiento entre la zapata y el terreno es de:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8\,000}{(2)(2)}, \quad \sigma = 2\,000 \text{ lb/pie}^2$$

(*Nota*: Las presiones de apoyo en suelos generalmente se expresan en lb/pie².)

Los esfuerzos de aplastamiento también ocurren sobre superficies curvas, tales como entre el perno y la placa mostrados en la Fig. 2.19. La distribución real del esfuerzo sobre las superficies curvas es muy compleja, variando los esfuerzos desde cero en los lados, hasta un máximo en el centro de contacto entre el perno y la placa. El esfuerzo unitario máximo no se calcula. El valor del esfuerzo de aplastamiento se toma como la carga transmitida por el perno dividida entre el área proyectada del agujero. El área proyectada es igual al diámetro del perno multiplicado por el espesor de la placa, como se muestra mediante el área sombreada de la Fig. 2.19(c). Una discusión más completa de los esfuerzos de aplastamiento de remaches y pernos sobre placas se da en el capítulo 14. ■

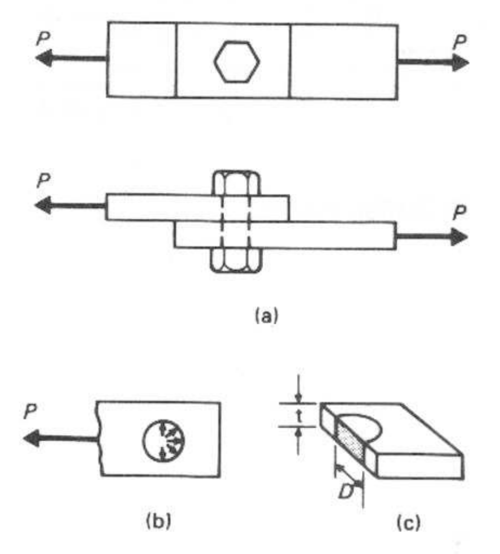
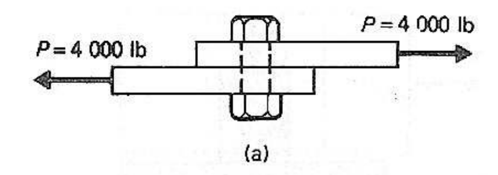


FIGURA 2.19

EJEMPLO 2.8 Un perno de ¾ plg se usa para unir dos placas de ⅜ plg de espesor, como se muestra en la Fig. 2.20. La conexión transmite una fuerza de 4 000 lb. Determine el esfuerzo de aplastamiento entre el perno y las placas.

SOLUCION El área proyectada es $A = Dt$. Entonces:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4\,000}{(\frac{3}{4})(\frac{3}{8})}, \quad \sigma = 14\,200 \text{ lb/plg}^2 \blacksquare$$



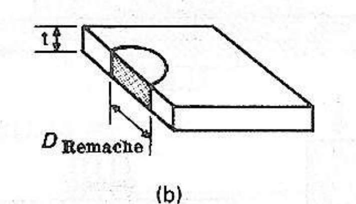


FIGURA 2.20

Problemas

2.39 Un poste de sección cuadrada de 6 plg de lado se soporta mediante una zapata de 2 pies × 3 pies. El poste soporta una carga de 18 000 lb. Determinar:

a) la presión de apoyo entre el poste y la zapata.
b) la presión de apoyo entre la zapata y el terreno.

2.40 Un poste de sección cuadrada de 100 mm × 100 mm se apoya sobre una solera de 100 mm × 100 mm, como se muestra en la Fig. P2.40. El poste soporta una carga de 20 kN. Determinar el esfuerzo de aplastamiento entre el poste y la solera.

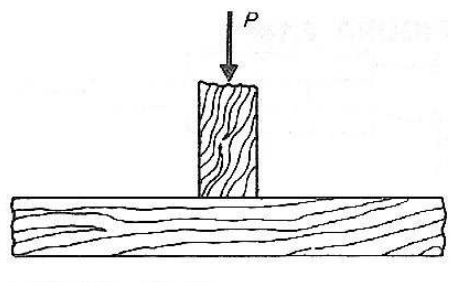


FIGURA P2.40

2.41 Una columna tubular que tiene en la base una placa de acero de 150 mm × 150 mm es soportada por un muro de concreto. El esfuerzo de aplastamiento entre el concreto y la placa de acero no debe exceder de 3.5 MPa. Usando este esfuerzo de aplastamiento, determinar la máxima carga que puede soportar la columna.

2.42 Una zapata cuadrada soporta una columna que lleva una carga axial de 64 klb. La presión de apoyo en el suelo no debe exceder de 4 000 lb/pie^2. Determinar las dimensiones necesarias de la zapata. Despreciar el peso de la zapata.

2.43 Un perno de 20 mm se usa para unir dos placas de 10 mm de espesor. Determinar el esfuerzo de aplastamiento entre el perno y las placas. Las placas llevan una carga de 20 kN.

2.44 Dos pernos de ½ plg se usan para unir dos placas de $^5/_{16}$ plg de espesor que soportan una carga de 4 000 lb. Determinar el esfuerzo de aplastamiento entre los pernos y las placas.

2.45 Dos pernos de ¾ plg se usan para unir tres placas, como se muestra en la Fig. P2.45. Determinar el esfuerzo de aplastamiento entre los pernos y las placas.

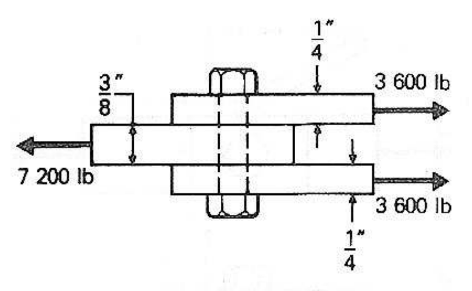


FIGURA P2.45

2.12 Definiciones

En la discusión de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria de la sección 2.7, se señalo que el esfuerzo último de la Fig. 2.5 es el máximo esfuerzo que un material puede soportar. Sin embargo, antes de que un material pueda cargarse hasta el esfuerzo último, ocurren deformaciones bastante grandes. En el acero dúctil la deformación correspondiente al esfuerzo último puede ser 150 o más veces la deformación en el punto

de fluencia. Por consiguiente, la máxima capacidad de un miembro para soportar carga se alcanza generalmente antes del esfuerzo último, y la limitación se debe más bien a la deformación que al esfuerzo. Esta deformación excesiva se presenta, por supuesto, en los materiales dúctiles, a diferencia de los materiales frágiles o quebradizos como el hierro colado.

La mayoría de los componentes estructurales están hechos de materiales dúctiles. Los componentes de las máquinas, edificios y puentes no pueden tolerar la deformación excesiva asociada con el esfuerzo último. Por consiguiente, como una limitación práctica, el punto de fluencia o la resistencia en el punto de fluencia, se considera generalmente como el máximo esfuerzo que puede tolerarse. Por esa razón, los factores de seguridad, que se discuten más adelante, se refieren generalmente al esfuerzo de fluencia más bien que al esfuerzo último del material.

El término "falla" frecuentemente se entiende como sinónimo de "fractura". Sin embargo, en el estudio de mecánica de materiales este no es el significado usual del término. *Se dice que ocurre la falla cuando un miembro cesa de realizar satisfactoriamente la función para la cual estaba destinado.* Por ejemplo, si una parte de una máquina se deforma excesivamente de modo que la máquina se vuelva inoperante, se considera que el miembro ha fallado, aunque los esfuerzos puedan ser bastante menores que los del punto de fluencia.

Por varias razones, algunas de las cuales se discuten a continuación, no es deseable diseñar un miembro para usarlo a su máxima capacidad. Se aplica un factor de seguridad al máximo esfuerzo utilizable (generalmente el del punto de fluencia) para obtener un esfuerzo de diseño *admisible* o de *trabajo*. Un esfuerzo admisible es aquel esfuerzo que no debería ser excedido en el diseño de un miembro. Algebraicamente, el esfuerzo admisible se determina como:

$$\sigma_{\text{admisible}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\text{factor de seguridad}}$$

El esfuerzo admisible, y por consiguiente, su factor de seguridad correspondiente, son especificados por alguna autoridad, en los códigos de construcción y especificaciones sobre edificios, o son elegidos por el proyectista después de considerar los requisitos especiales de diseño, las condiciones de servicio, y los materiales que se van a usar. En cualquier caso, debe elegirse un valor que esté basado en la experiencia y el buen criterio. El valor elegido debe tener en cuenta tanto la seguridad como la economía. En otras palabras, debemos estar razonablemente seguros de que la falla no ocurrirá, y al mismo tiempo debemos ser conservadores y evitar que el tamaño de los miembros haga imposible producirlos económicamente.

Algunas de las consideraciones más importantes y necesarias al elegir un factor de seguridad (y por consiguiente un esfuerzo permisible) son:

a) *Conocimiento y exactitud de las cargas aplicadas.* En el diseño de la mayoría de los miembros, debe estimarse la magnitud de las cargas aplicadas. Además, con frecuencia se hacen alteraciones en estructuras ya existentes, produciéndose de este modo cargas mayores que las anticipadas originalmente. El factor de seguridad proporciona cierta amplitud en aquellos casos donde las cargas reales exceden a las cargas de diseño estimadas.
b) *Tipo de falla que ocurrirá.* Los materiales frágiles ó quebradizos, como el hierro colado no proporcionan ninguna advertencia cuando su fractura es inminente. Sin embargo, los materiales dúctiles, tales como el acero, se deforman considerablemente antes de la fractura, proporcionando así una advertencia del peligro. Normalmente se deberá aplicar un factor de seguridad menor a estos materiales dúctiles.
c) *Naturaleza de las cargas.* Las cargas cíclicas, o que se repiten muchas veces, producen fatiga en los metales. Esta fatiga puede producir la fractura de un miembro a esfuerzos mucho menores que los que aceptaría si las cargas fueran estáticas. Cuando se elige un factor de seguridad, el proyectista debe considerar las cargas estáticas, dinámicas, cíclicas y variables.
d) *Efecto de la corrosión y deterioro.* Los miembros que se inspeccionan con frecuencia y se mantienen en buenas condiciones son menos propensos a fallar inesperadamente. El desgaste excesivo en las partes móviles o el posible abuso de la función de un miembro debe considerarse en la fase de diseño y debe compensarse mediante una selección adecuada del factor de seguridad.
e) *Otras consideraciones.* El proyectista debe también considerar factores tales como la confiabilidad del material, concentraciones de esfuerzos (discutidos en el capítulo 10), alta o baja temperatura de operación, gravedad de la falla, etc.

EJEMPLO 2.9

a) Diseñar una barra circular de acero que soporte una carga de tensión de 6 000 lb. El esfuerzo de diseño es de 22 000 lb/plg^2. Las barras se consiguen con incrementos de $\frac{1}{16}$ plg de diámetro.
b) Determinar el factor de seguridad. La resistencia en el punto de fluencia de este acero es de 36 000 lb/plg^2.

SOLUCION Para obtener un diseño económico, debemos elegir un área que haga que el esfuerzo en la barra sea tan cercano a 22 000 lb/plg^2 como sea posible, sin exceder ese valor. Por consiguiente,

$$\sigma = P/A; \qquad A_{\text{necesaria}} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{6\,000}{22\,000},$$
$$A_{\text{necesaria}} = 0.272 \text{ plg}^2$$

El diámetro necesario se calcula como:

$$A = \tfrac{1}{4}\pi D^2 = 0.272, \qquad D = 0.59 \text{ plg}$$

Usar una barra de ⅝ plg (D = 0.625 plg). El esfuerzo real en la barra es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{6\,000}{\frac{1}{4}\pi(0.625)^2}, \qquad \sigma = 19\,600\ \text{lb/plg}^2$$

El esfuerzo admisible de 22 000 lb/plg² tiene una factor de seguridad con respecto al esfuerzo de fluencia de:

$$\text{FS} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{real}}} = \frac{36\,000}{22\,000}, \qquad \text{FS} = 1.67.$$

El factor real de seguridad de la barra de ⅝ plg con respecto al esfuerzo de fluencia es de:

$$\text{FS} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\text{real}}} = \frac{36\,000}{19\,600}, \qquad \text{FS} = 1.84. \quad \blacksquare$$

2.13 Comentarios adicionales

Hasta aquí los problemas presentados han tenido el propósito de ilustrar los puntos pertinentes de la teoría expuesta en cada sección, y se basaron únicamente en las ideas o materiales explicados en el texto precedente. En lo posible, los problemas se diseñaron para minimizar los cálculos que requerían un conocimiento de la estática.

Sin embargo, en la práctica de ingeniería, los problemas de diseño y análisis requieren frecuentemente la investigación de varios aspectos diferentes de una estructura. Un buen conocimiento de la estática es supremamente importante en el análisis de estructuras y partes de máquinas. Antes de que un miembro pueda diseñarse, deben determinarse todas las cargas exteriores. Este análisis estático, a menudo se lleva la mayor parte del tiempo usado para el diseño. Una vez que se han determinado las cargas y las reacciones, generalmente cuesta poco trabajo darle dimensiones al miembro.

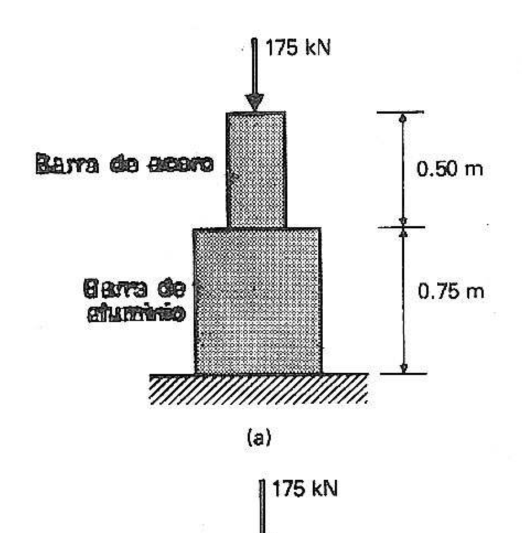
La mayoría de los problemas siguientes están planeados con la intención de ilustrar los aspectos más prácticos de diseño. Sin embargo, también se incluyen algunos problemas "académicos" para ilustrar mejor ciertos aspectos de la teoría.

Estos problemas reforzarán los conceptos básicos de mecánica de materiales y también mostrarán unas cuantas de las muchas aplicaciones que pueden considerarse con la cantidad limitada de material cubierto hasta ahora.

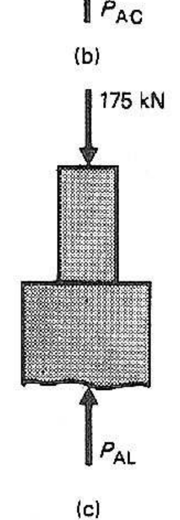
En las páginas siguientes se encuentran varios problemas ilustrativos cuyo objetivo es el de ilustrar algunos de los métodos para resolver problemas y algunos de los aspectos que deben considerarse. Debe considerarse que el mayor ahorro de tiempo, se logra mediante el uso liberal de esquemas y figuras. Cuando se estudia por primera vez una materia como la mecánica de materiales, se encontrará que trazar un esquema separado de cada miembro sujeto a esfuerzos es muy útil, ya que los dibujos le permitirán identificar mejor las características del problema.

Problema ilustrativo 2.1

Una barra de aluminio de 0.75 m de longitud y de 25×10^{-4} m² de sección transversal está unida a una barra de acero de 0.50 m de longitud y de 150×10^{-4} m² de sección transversal, como se indica en la figura adyacente. Determinar el esfuerzo unitario en cada barra y la deformación total debidos a una fuerza axial de compresión de 175 kN.



(a)



(b)

(c)

SOLUCION Aplicando las leyes de la estática a los diagramas de cuerpo libre de las Figs. (b) y (c), da

$$\sum F_Y = 0: \qquad P_{AC} = 175 \text{ kN};$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad P_{AL} = 175 \text{ kN}.$$

a) El esfuerzo unitario en cada barra es

$$\sigma_{AC} = \frac{P_{AC}}{A_{AC}} = \frac{175 \times 10^3 \text{ N}}{15 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 116.7 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 116.7 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{AL} = \frac{P_{AL}}{A_{AL}} = \frac{175 \times 10^3 \text{ N}}{25 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 70 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 70 \text{ MPa}.$$

b) La deformación total del sistema es igual a la suma de los acortamientos de las barras.

$$\delta_{\text{total}} = \delta_{AC} + \delta_{AL};$$

$$\delta_{\text{total}} = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AL}$$

$$= \frac{(175 \times 10^3 \text{ N})(0.50 \text{ m})}{(15 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} + \frac{(175 \times 10^3 \text{ N})(0.75 \text{ m})}{(25 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}$$

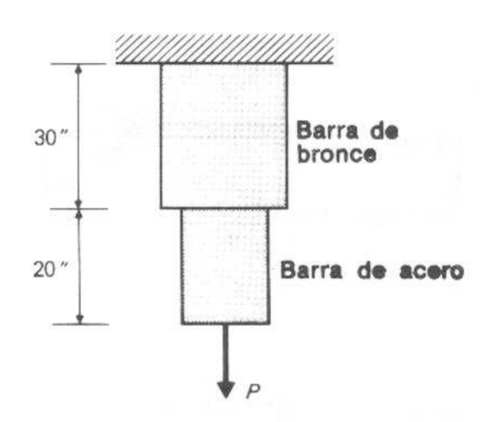
$$= 0.000292 + 0.00075$$

$$= 0.001042 \text{ m}$$

$$= 1.042 \text{ mm}.$$

Problema ilustrativo 2.2

Una barra de bronce de 30" de longitud y 2 plg² de área y una barra de acero de 20" de longitud y 1 plg² de área llevan una carga axial P, como se indica en la figura. El esfuerzo admisible en el acero es de 20 000 lb/plg² y del bronce es de 12 000 lb/plg², y la elongación total no debe exceder de 0.0325 plg. Determinar la carga máxima que puede aplicarse.



SOLUCION En este problema deben satisfacerse tres condiciones a saber: los esfuerzos admisibles en el acero y en el bronce no deben excederse, y el alargamiento total no debe exceder de 0.0325 plg. Nótese, sin embargo, que los valores obtenidos para cualesquiera de las tres condiciones pueden ser menores que los admisibles.

a) Carga máxima que puede soportar el acero:

$$\sigma = \frac{P}{A};$$

$$P = \sigma A = (20\,000)(1), \qquad P = 20\,000 \text{ lb.}$$

b) Carga máxima que puede soportar el bronce:

$$\sigma = \frac{P}{A};$$

$$P = \sigma A = (12\,000)(2), \qquad P = 24\,000 \text{ lb.}$$

c) Alargamiento máximo:

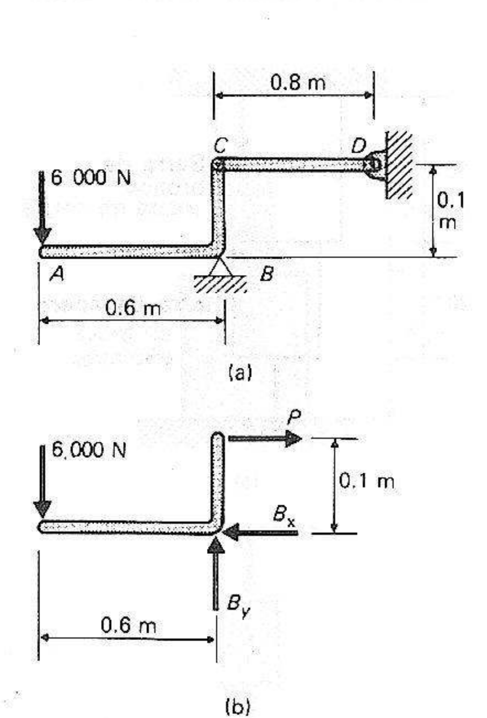
$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{\text{Acero}} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{\text{Bronce}}$$

$$0.0325 = \frac{P(20)}{(1)(30)(10^6)} + \frac{P(30)}{(2)(15)(10^6)}, \qquad P = 19\,500 \text{ lb.}$$

La carga máxima que puede aplicarse es de 19 500 lb (gobernada por la deformación). El esfuerzo real en el acero y el bronce es, por consiguiente, menor que el esfuerzo admisible para cada material.

Problema ilustrativo 2.3

El miembro CD del conjunto indicado es una barra de aluminio de 0.80 m de longitud. Determinar las dimensiones necesarias de la sección transversal de la barra, si su ancho debe ser tres veces su espesor. Para un diseño funcional de la barra CD, el esfuerzo axial admisible es de 70 MPa, y la elongación total no debe exceder de 0.65 mm. El módulo de elasticidad para el aluminio es $E = 70$ GPa (véase el Apéndice B). Supóngase que la conexión en C no reduce el área neta de la barra.



SOLUCION Primero calculamos la fuerza axial en la barra aplicando la estática al diagrama de cuerpo libre de la Fig. (b). Esto da

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0: \qquad P(0.1 \text{ m}) - (6\,000 \text{ N})(0.6 \text{ m}) = 0,$$
$$P = 36\,000 \text{ N}.$$

El área necesaria quedará limitada por el esfuerzo admisible que es:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad A_{\text{nec.}} = \frac{P}{\sigma} = \frac{36 \times 10^3 \text{ N}}{70 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 0.514 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

El área necesaria para satisfacer la deformación admisible es:

$$\delta = \frac{PL}{AE}; \qquad A_{\text{nec.}} = \frac{PL}{\delta E} = \frac{(36 \times 10^3 \text{ N})(0.80 \text{ m})}{(0.65 \times 10^{-3} \text{ m})(70 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} = 0.633 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

El área necesaria es de 0.633×10^{-3} m^2 (rige la deformación). Las dimensiones de la sección transversal serán

$$A = bt; \qquad 0.633 \times 10^{-3} = (3t)t$$
$$t = 0.0146 \text{ m} = 14.6 \text{ mm}$$
$$b = 3t = 43.8 \text{ mm}.$$

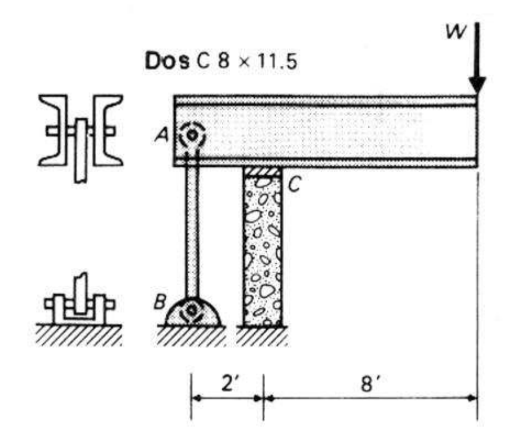
Problema ilustrativo 2.4

En la figura se indica una viga compuesta por dos canales, $C\ 8 \times 11.5$, soportada en el extremo izquierdo por medio de una barra de ojo de ¾ plg de diámetro que usa un pasador de ¾ plg en cada extremo. La viga está soportada en C por medio de una placa de apoyo de acero que mide 4 plg × 6 plg, y que se apoya a su vez sobre un muro de concreto. Determinar la carga máxima W que puede aplicarse. Los esfuerzos admisibles son los indicados a continuación. Supóngase que la viga en sí es lo suficientemente resistente para soportar la carga.

Esfuerzos admisibles:

esfuerzo cortante en el pasador = 10 000 lb/plg²
esfuerzo de aplastamiento en el concreto = 500 lb/plg²
esfuerzo de tensión en la barra de ojo = 18 000 lb/plg²
esfuerzo de aplastamiento en el acero = 45 000 lb/plg²

SOLUCION El primer paso consiste en determinar, por estática, las reacciones de la varilla y del muro, debidas a la aplicación de la fuerza W. Usando el diagrama de cuerpo libre, procedemos como sigue:

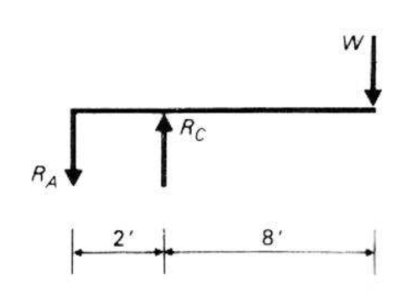


$$\circlearrowright \sum M_A = 0: \quad R_C(2) - W(10) = 0,$$
$$R_C = 5W;$$

$$\circlearrowleft \sum M_C = 0: \quad R_A(2) - W(8) = 0,$$
$$R_A = 4W.$$

Verificación:

$$\sum F_V = 0: \quad R_R - R_L - W = 0,$$
$$5W - 4W - W = 0,$$
$$0 = 0.$$



A continuación se verifican las condiciones donde es posible un esfuerzo excesivo. En este caso serían:

a) esfuerzo de tensión en la barra de ojo AB,
b) esfuerzo cortante en el pasador A ó B,
c) esfuerzo de aplastamiento entre el pasador y la barra de acero de los canales,
d) esfuerzo de aplastamiento entre la placa de acero y el muro de concreto.

Ahora se determinan las fuerzas máximas asociadas con las cuatro condiciones de esfuerzo descritas anteriormente.

a) Para el esfuerzo de tensión en la barra AB se tiene:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad P = \sigma A = (18\,000)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$= 7\,960 \text{ lb},$$

que es la fuerza de tensión máxima permitida en la barra de ojo.

b) Para el esfuerzo cortante en el pasador en A o B, tenemos:

$$\tau = \frac{P}{A}; \qquad P = \tau A = (10\,000)(2)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$P = 8\,840 \text{ lb},$$

que es la fuerza cortante máxima permitida en el pasador.

c) Para determinar el esfuerzo de aplastamiento entre el pasador y la barra de ojo sobre los canales, debemos considerar ambos miembros. Ya que el espesor del alma de una C 8 × 11.5 es de 0.220 plg, y el diámetro de la barra es de ¾ plg, el esfuerzo de aplastamiento sobre las almas de los canales es el que rige. Así que:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad P = \sigma A = (45\,000)(2)(0.220)\left(\frac{3}{4}\right),$$

$$P = 14\,900 \text{ lb},$$

que es la fuerza máxima de aplastamiento en los canales.

d) Para el esfuerzo de aplastamiento entre la placa de acero y el muro de concreto, tenemos:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad P = \sigma A = (500)(4 \times 6),$$

$$P = 12\,000 \text{ lb},$$

que es la fuerza máxima de aplastamiento sobre el muro de concreto.

Las condiciones (a), (b), y (c) se aplican a la reacción en A. Por consiguiente, la máxima reacción en A es de 7 960 lb y está limitada por el esfuerzo de tensión en la barra de ojo AB. La máxima reacción en C se encuentra mediante la condición (d) y es de 12 000 lb. Usando estos valores para la reacción, podemos calcular el valor máximo para W como sigue:

$$R_A = 4W, \qquad R_C = 5W,$$

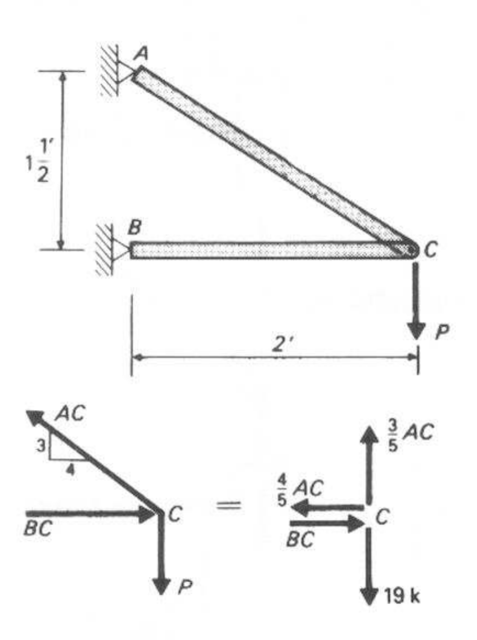
$$7\,960 = 4W, \qquad 12\,000 = 5W,$$

$$W = 1\,990 \text{ lb}. \qquad W = 2\,400 \text{ lb}.$$

La carga máxima que puede aplicarse es de 1 990 lb, ya que cualquier carga mayor sobrecargaría la barra de ojo AB.

Problema ilustrativo 2.5

Una ménsula está formada por dos barras AC y BC de sección rectangular, como se muestra en la figura. En el punto C se aplica una carga $P = 19$ klb Diseñar la barra AC, usando un esfuerzo admisible de tensión de 20 klb/plg². Supóngase que las conexiones para la varilla AC no reducen el área neta de la varilla sometida a tensión.



SOLUCION. El primer paso consiste en aplicar las leyes de la estática para determinar la fuerza de la barra AC. Ya que las líneas de acción de los miembros y la fuerza se intersecan en C, las barras AC y BC pueden considerarse como sujetas a dos fuerzas, y las incógnitas pueden determinarse mediante el diagrama de cuerpo libre de C (Véase figura). Así,

$$\sum F_Y = 0: \qquad \tfrac{3}{5}AC = 19, \qquad AC = 31.8 \text{ klb.}$$

El siguiente paso consiste en determinar el área de la sección transversal requerida para la barra AC. Se tiene:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad A_{\text{requerida}} = \frac{P}{\sigma} = 31.8/20, \qquad A_{\text{requerida}} = 1.59 \text{ plg}^2.$$

Finalmente se debe escoger una barra cuyas dimensiones proporcionen un área de sección transversal de por lo menos 1.59 plg². Como no se ha establecido nada acerca de las dimensiones relativas, se puede escoger cualquier tamaño. Algunas dimensiones que serían satisfactorias son las siguientes:

$$2 \text{ plg.} \times \tfrac{7}{8} \text{ plg}^2., \qquad A = 1.75 \text{ plg}^2;$$
$$2\tfrac{1}{2} \text{ plg.} \times \tfrac{3}{4} \text{ plg}^2., \qquad A = 1.87 \text{ plg}^2;$$
$$3 \text{ plg.} \times \tfrac{5}{8} \text{ plg}^2., \qquad A = 1.88 \text{ plg}^2;$$
$$3\tfrac{1}{4} \text{ plg.} \times \tfrac{1}{2} \text{ plg}^2., \qquad A = 1.63 \text{ plg}^2.$$

Cualesquiera de estas barras seleccionadas o varias otras podrían usarse satisfactoriamente. El proyectista debería entonces considerar otros factores para elegir la "mejor" barra para realizar el trabajo. Algunas de las consideraciones más importantes pueden ser:

a) Disponibilidad de los diversos tamaños.
b) Economía (peso del acero).
c) Espesor adecuado para las conexiones (se discute en el Capítulo 14).
d) El uso de una o dos barras.
e) Dimensiones mínimas aceptables de los miembros, para su uso funcional.

Podría ser también más factible usar ángulos u otros perfiles estructurales. Muchos factores entran en la decisión de la forma y dimensiones adecuadas, y muchas soluciones pueden ser correctas.

Este problema fue incluido aquí con el propósito de mostrar que el ingeniero proyectista debe considerar tanto el aspecto de la mecánica de materiales como las condiciones económicas y prácticas. El "sentido del diseño" se consigue con el tiempo y la experiencia. El estudiante no debe preocuparse por estas consideraciones en este curso, pero debe conocer su existencia y darse cuenta de que frecuentemente hay más de una solución correcta a un problema de diseño.

Problemas

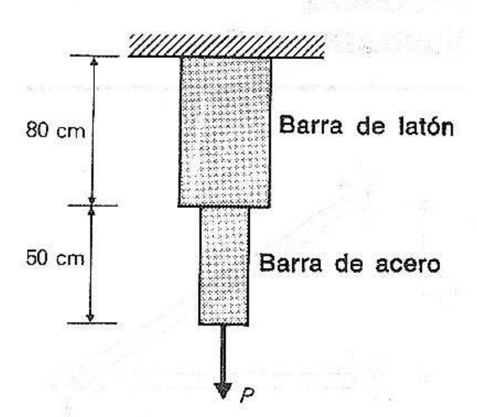


FIGURA P2.46

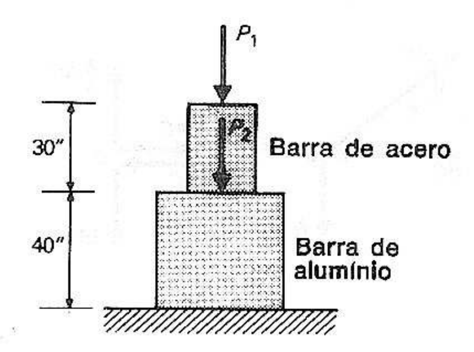


FIGURA P2.48

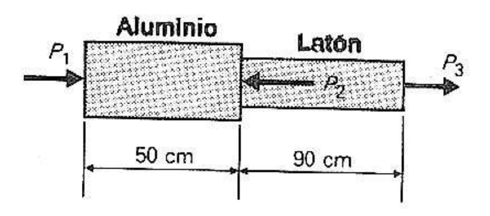


FIGURA P2.50

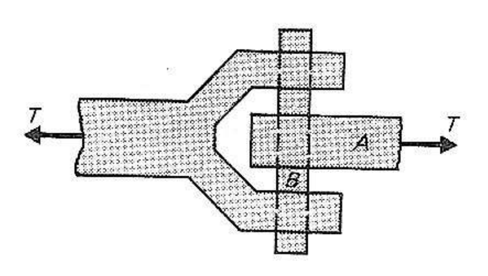


FIGURA P2.56

2.46 Una barra de acero de 0.50 m de longitud y 200×10^{-6} m² de área está unida a una barra de latón de 0.80 m de longitud y 600×10^{-6} m² de área, como se muestra en la Fig. P2.46. Para una carga aplicada $P = 18$ kN, determinar

a) el esfuerzo unitario en cada barra,
b) el alargamiento total en el sistema,
c) la deformación unitaria en cada barra.

2.47 Determinar la carga máxima P que puede aplicarse a las barras descritas en el Problema 2.46. El esfuerzo admisible en el acero es de 124 MPa, el esfuerzo admisible en el latón es de 70 MPa, y la deformación total admisible en el sistema es de 0.5 mm.

2.48 Una barra de acero de 30 plg de longitud y 2 plg² de área es soportada por una barra de aluminio de 40 plg de longitud y 3 plg² de área. Una carga axial $P_1 = 10\,000$ lb se aplica a la barra de acero, y una carga $P_2 = 16\,000$ lb se aplica a la barra de aluminio, como se muestra en la Fig. P2.48. Determinar

a) el esfuerzo en el acero y el esfuerzo en el aluminio,
b) la deformación total del sistema.

2.49 Determinar la carga P_2 que puede aplicarse al sistema mostrado en la Fig. P2.48. Aquí $P_1 = 8\,000$ lb, el esfuerzo admisible en el acero es de 20 000 lb/plg², el esfuerzo admisible en el aluminio es de 12 000 lb/plg², y la deformación total admisible es de 0.060 plg.

2.50 Una barra de aluminio de 13×10^{-4} m² de área y 0.5 m de longitud está unidad a una barra de latón de 8×10^{-4} m² de área y 0.9 m de longitud, como se muestra en la Fig. P2.50. Suponiendo que $P_1 = 125$ kN y $P_3 = 110$ kN, determinar

a) el esfuerzo en cada barra,
b) la deformación unitaria en cada barra,
c) la deformación total del sistema.

2.51 Una varilla de aluminio de ¼ plg de diámetro y 25 pies de longitud transmite una fuerza de tensión. Determinar la fuerza máxima P que puede aplicarse. El esfuerzo permisible es de 10 000 lb/plg² y la elongación permisible es de ⅛ plg.

2.52 Una pieza de acero de una máquina tiene 0.6 m de longitud y está sujeta a una carga de compresión axial de 130 kN. El esfuerzo de compresión permisible es de 82 MPa y la deformación permisible a compresión es de 0.25 mm. Determinar el área de acero necesaria.

2.53 Una barra de acero de 10 pies de longitud está sujeta a una carga axial de tensión de 30 klb. El esfuerzo admisible es de 18 klb/plg² y el alargamiento admisible es de 0.625 plg. Determinar el área de la sección transversal necesaria.

2.54 Una varilla circular de latón de 2 m de longitud transmite una fuerza de tensión de 22 kN. El esfuerzo admisible de tensión es de 80 MPa y el alargamiento admisible es de 0.5 mm. Diseñar la varilla. Supóngase que se dispone de varillas con incremento de diámetros de 5 mm.

2.55 Un cilindro pequeño, hueco, de hierro fundido, tiene un diámetro exterior de 150 mm y soporta una fuerza de compresión de 900 kN. El esfuerzo admisible es de 80 MPa. Determinar el diámetro interior máximo admisible.

2.56 El pasador de acero B de la conexión mostrada en la Fig. P2.56 tiene un área de su sección transversal de 500×10^{-6} m². El esfuerzo cortante que se presenta en el pasador cuando la conexión está cargada axialmente a tensión es de 130 MPa. Encontrar la deformación unitaria en la barra de acero A. El área de la sección transversal es de 25×10^{-6} m² y $E = 200$ GPa.

2.57 Determinar la carga axial máxima P que puede aplicarse a los alambres mostrados en la Fig. P2.57. El área de cada alambre es de 0.10 plg², y el esfuerzo admisible es de 20 000 lb/plg².

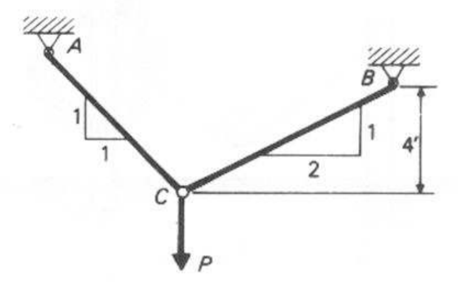


FIGURA P2.57

2.58 Determinar el diámetro necesario para el alambre del sistema mostrado en la Fig. P2.58. El esfuerzo admisible en los alambres es de 165 MPa, y la carga aplicada $P = 36$ kN.

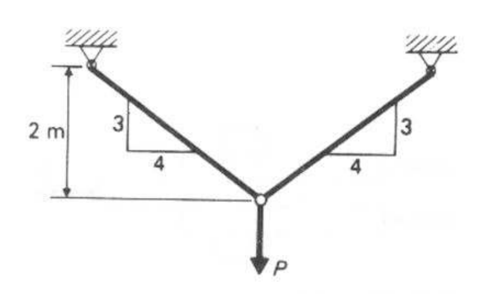


FIGURA P2.58

2.59 Determinar el esfuerzo en los alambres y el movimiento vertical total del punto C en el sistema mostrado en la Fig. P2.58. El área de cada alambre es de 5×10^{-6} m², $P = 25$ kN, y $E = 200$ GPa.

2.60 Una barra horizontal de 10 pies de longitud, que pesa 400 lb está soportada en los extremos mediante un alambre de latón de 4 pies de longitud y mediante un alambre de aluminio de 3 pies de longitud. Se coloca una carga $P = 10\,000$ lb a 3 pies del alambre de latón (Fig. P2.60). Determinar

a) el área necesaria para el alambre de latón, si el esfuerzo admisible en el latón es de 8 000 lb/plg².

b) el área necesaria para el alambre de aluminio, si la barra debe permanecer horizontal después de cargarla.

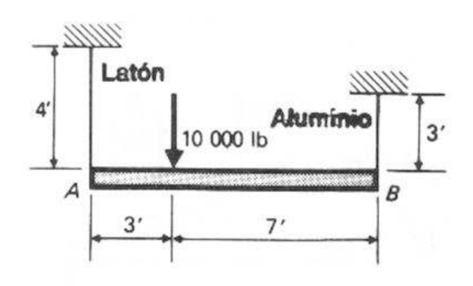


FIGURA P2.60

2.61 Una barra horizontal de 4 m de longitud que pesa 2 400 N está soportada en los extremos mediante una varilla de latón de 1 m de longitud y mediante una varilla de acero de 2 m de longitud. La varilla de latón tiene una área de 320 mm² y la varilla de acero una área de 480 mm² (véase Fig. P2.6). Determinar:

a) la distancia, a partir de la varilla de latón, a la cual debería aplicarse una carga de 90 kN para asegurar que la barra se conservará horizontal después de cargarla.

b) el esfuerzo resultante en cada varilla.

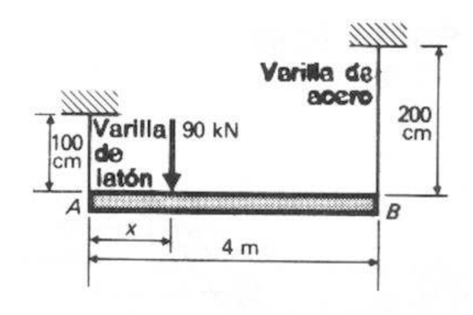


FIGURA P2.61

2.62 Una tubería continua es soportada sujetando una cuerda de 5 pies de longitud entre dos postes a 4 pies de separación, como se muestra en la Fig. P2.62. La tubería pesa 40 lb/pie. La cuerda tiene un diámetro de $\frac{1}{2}$ plg y un esfuerzo admisible de 1 200 lb/plg². ¿A qué separación deberán colocarse los postes a lo largo de la longitud de la tubería?

2.63 Si la tubería y los apoyos de la tubería descritos en el Problema 2.62 están espaciados cada 16 pies, ¿cuál es el diámetro de la cuerda necesaria para un esfuerzo permisible de 1 200 lb/plg²?

2.64 Tres soleras de acero, cada una de $\frac{1}{4}$ plg $\times$ 2 plg están unidas mediante un solo perno de $\frac{3}{4}$ plg que ajusta estrechamente en los agujeros. El esfuerzo de tensión admisible en la barra es de 22 000 lb/plg², el esfuerzo cortante permisible en el perno es de 10 000 lb/plg², y el esfuerzo de aplastamiento admisible entre las placas y el perno es de 48 500 lb/plg². Determinar la carga máxima P que puede aplicarse, según la Fig. P2.64.

2.65 El miembro AC de la ménsula mostrada en la Fig. P2.65 es una barra de ojo cuyo cuerpo tiene por dimensiones $2\frac{1}{2}$ plg $\times$ $\frac{1}{2}$ plg. La barra de ojo está unida en A y en C por medio de pasadores de $\frac{7}{8}$ plg de diámetro. Determinar la carga admisible P limitada por la barra de ojo y sus conexiones. Los esfuerzos admisibles son de 22 000 lb/plg² para tensión, 32 500 lb/plg² para esfuerzos de aplastamiento, y 10 000 lb/plg² para esfuerzo cortante.

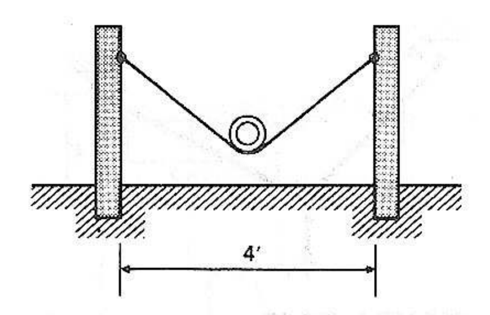


FIGURA P2.62

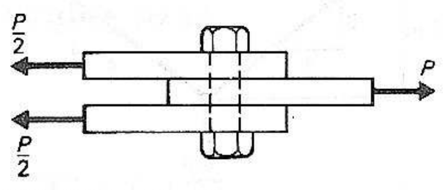


FIGURA P2.64

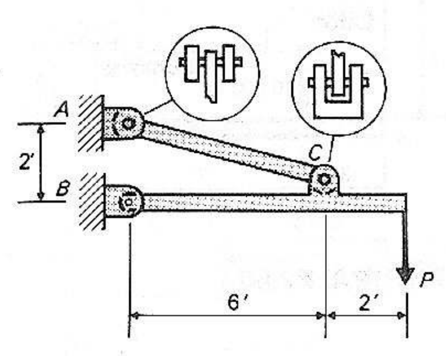


FIGURA P2.65

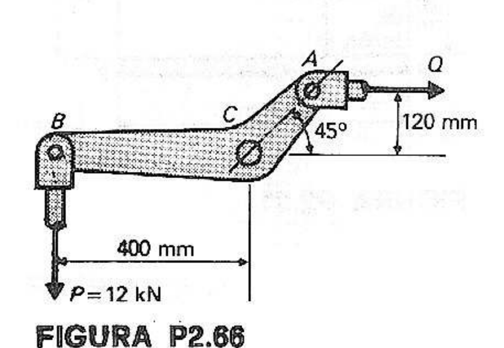


FIGURA P2.66

2.66 Determinar los diámetros requeridos para los pasadores en A y B, y de la varilla, en A, del mecanismo de palanca angular mostrada en la Fig. P2.66. El esfuerzo de tensión admisible es de 110 MPa y el esfuerzo cortante permisible en los pasadores es de 60 MPa.

2.67 La manija de un eje circular de 30 mm de diámetro está acoplada al eje mediante una clavija de 50 mm × 6 mm, como se muestra en la Fig. P2.67. Determinar el valor admisible de P, si el esfuerzo cortante admisible en el prisionero es de 80 MPa.

2.68 Una polea de 30 plg de diámetro está impedida de girar con respecto a un eje de 3 plg mediante una clavija de 3 plg × ⅜ plg, como se muestra en la Fig. P2.68. ¿Cuál es el esfuerzo cortante en esta clavija, si T_1 = 4 000 lb y T_2 = 1 000 lb?

2.69 Si el esfuerzo cortante admisible sobre la clavija de 3 plg × ⅜ plg de la Fig. P2.68 es de 10 000 lb/plg^2, y si $T_2 = \frac{1}{5} T_1$, ¿cuáles son las magnitudes de las fuerzas T_1 y T_2?

2.70 Un canal continuo de sección triangular lleva agua, como se muestra en la Fig. P2.70. El canal está formado por dos láminas unidas en el fondo mediante una articulación continua y está impedido de abrirse en la parte superior por una serie de varillas de acero de ¾ plg colocadas a intervalos de 8 pies. Si las varillas están roscadas para permitir su ajuste mediante un templador, calcular el esfuerzo máximo en las varillas.

2.71 Determinar el diámetro requerido para las varillas roscadas de acero del canal descrito en el Problema 2.70. El esfuerzo admisible es de 16 000 lb/plg^2.

2.72 Una columna tiene una carga de 360 kN y se apoya sobre una placa cuadrada de acero, soportada por una zapata cuadrada de concreto que descansa sobre el terreno. Si el esfuerzo de aplastamiento admisible entre la placa y el concreto es de 3.4 MPa, y el esfuerzo de aplastamiento admisible entre la zapata de concreto y el suelo es de 190 kPa, determinar las dimensiones de la zapata y la placa.

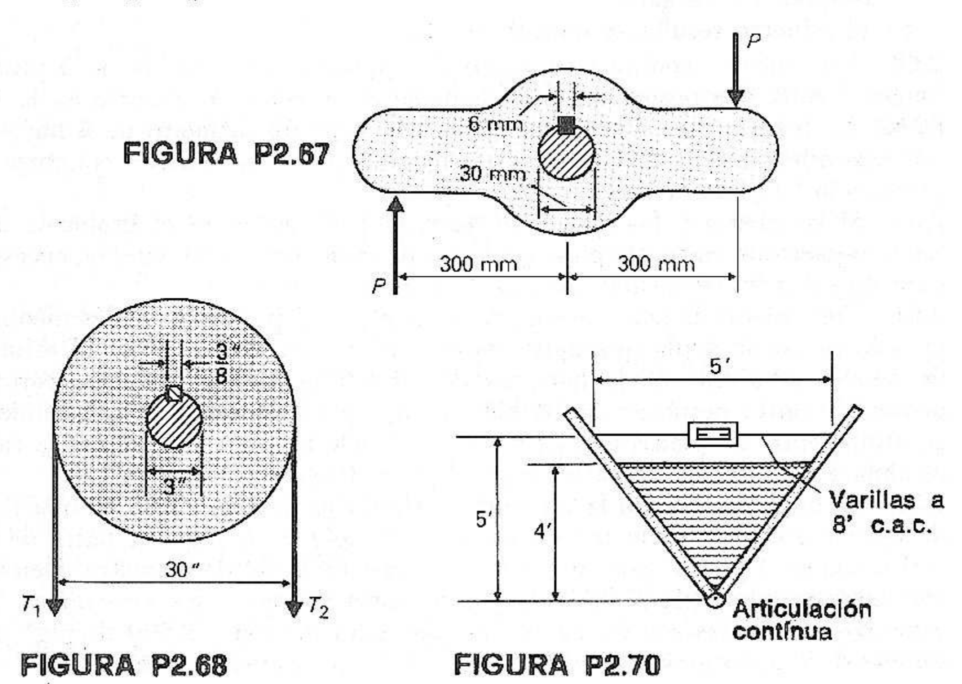


FIGURA P2.67

FIGURA P2.68

FIGURA P2.70

3

Torsión

3.1 Introducción

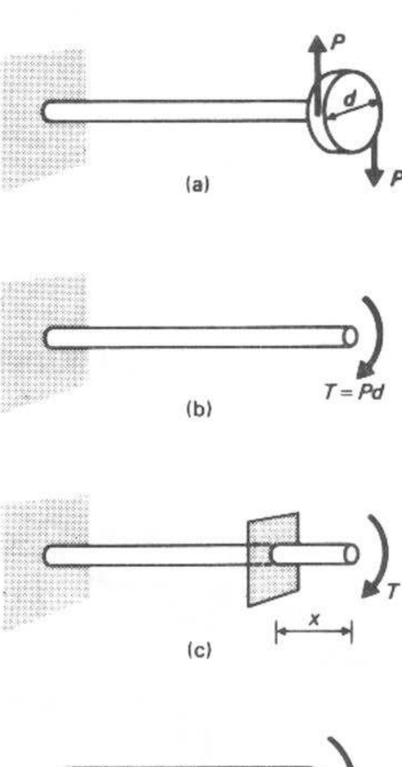
En el material descrito en el capítulo 2, las cargas exteriores se aplicaron en tal forma que se producían ya esfuerzos normales, ya esfuerzos cortantes en los miembros. En este capítulo se estudiará el efecto de cargas de torsión sobre los miembros. Estas cargas generalmente se presentan en forma de pares que hacen girar los miembros, y, como se verá más adelante, producen esfuerzos cortantes.

Las flechas o ejes circulares son los miembros más comúnmente asociados con cargas de torsión y se presentan muchas aplicaciones prácticas para ellos, especialmente en el campo del diseño de máquinas. Las cargas de torsión generalmente se aplican por medio de poleas o engranes que mueven o son movidos por las flechas.

Como ejemplos de miembros sujetos a cargas de torsión, consideremos las Fig. 3.1 y 3.2. La Fig. 3.1 ilustra una flecha redonda fija en un extremo, con un disco en el otro extremo. Se aplican dos fuerzas iguales y opuestas P en el plano del disco, como se muestra. Estas dos fuerzas, separadas una distancia d forman una par. El efecto de este par, es torcer el eje o par de torsión, como generalmente se llama alrededor de su eje longitudinal. En lugar de representar el par como dos fuerzas, se usará la designación alternativa de una línea curva cuya punta indica la dirección del par, como se muestra en la Fig. 3.1 (b).

El par resistente (interno) puede determinarse aplicando la ecuación $\Sigma M_{eje} = 0$ a un diagrama de cuerpo libre de la flecha. Es decir, para determinar el par interno en cualquier posición de la flecha, cortamos ésta mediante un plano imaginario perpendicular al eje de la misma en el lugar deseado y hallamos la suma de los momentos del diagrama de cuerpo libre resultante, con respecto al eje longitudinal. Para el caso considerado aquí, la Fig. 3.1 (d) indica que el par resistente interno es igual al par externo T. Para una flecha que esté sujeta a varios pares aplicados en diferentes lugares, es necesario hacer el diagrama de cuerpo libre de varias secciones. El par resistente interno es la suma de todos los pares externos hasta el plano en cuestión.

Otro método común para aplicar cargas torsionales se ilustra en la Fig. 3.2. En este caso, se aplica una sola carga P a una distancia r del



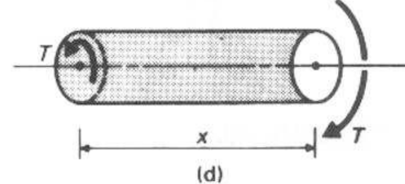


FIGURA 3.1

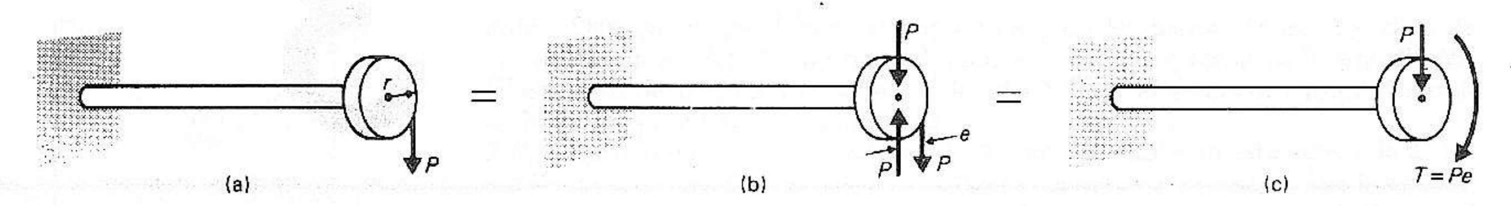


FIGURA 3.2

eje longitudinal. Por estática, esta fuerza puede descomponerse en una fuerza y un par en el centro de la flecha, como se muestra en la Fig. 3.2 (b) y (c).

En este caso, la flecha está sujeta a un par T, que la hace girar respecto a su eje, y también a una fuerza P. Si la flecha está apoyada en el punto de aplicación de la fuerza, el problema es de torsión simple. Sin embargo, si además la flecha puede flexionarse libremente bajo la aplicación de esta fuerza, el problema se convierte en uno en que se combina flexión y torsión. Los problemas que contienen una combinación de esfuerzos de torsión y de flexión y/o esfuerzos axiales se estudiarán en el capítulo 6. En este capítulo, se tratará solamente la teoría de la torsión en flechas de sección circular. Por consiguiente, en cualquier problema que se presente en este capítulo, se supone que las flechas están apoyadas de tal manera que todos los esfuerzos que no sean de torsión, se desprecian.

Este capítulo cubre el análisis y diseño de flechas circulares sujetas a esfuerzos por debajo del límite de proporcionalidad del material. Se discutirá brevemente la torsión de flechas no circulares. Las flechas circulares sujetas a esfuerzos en el intervalo inelástico se discuten en el capítulo 12.

Problemas

3.1-3.8 Determinar la magnitud del par interno en las secciones indicadas en las Figs. P3.1 a P.3.8.

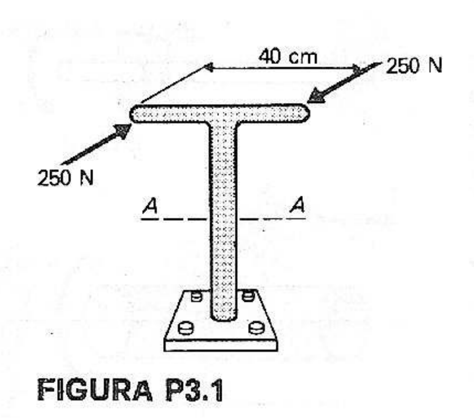


FIGURA P3.1

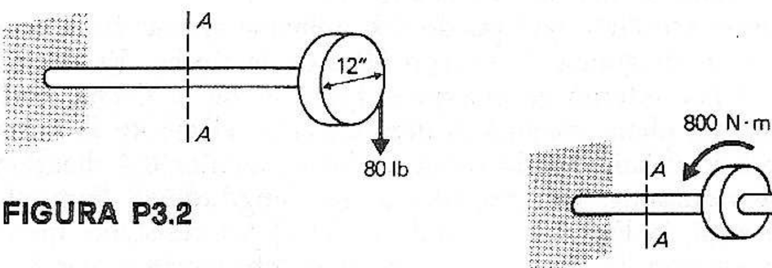


FIGURA P3.2

FIGURA P3.3

FIGURA P3.4

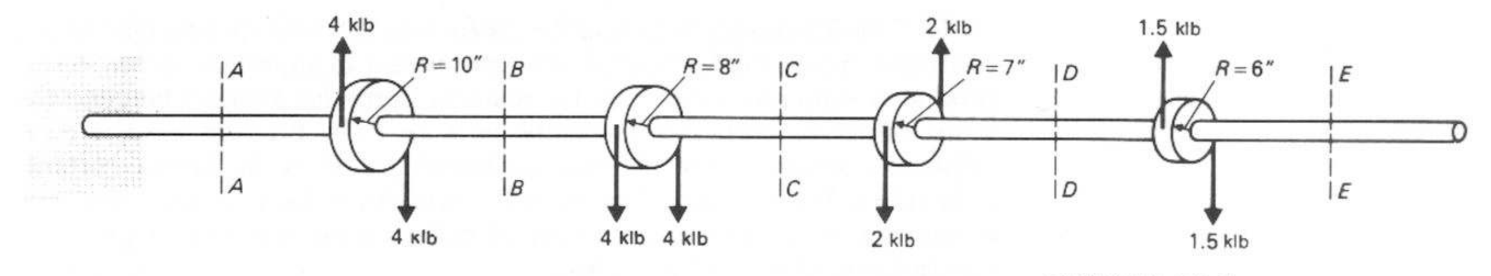


FIGURA P3.5

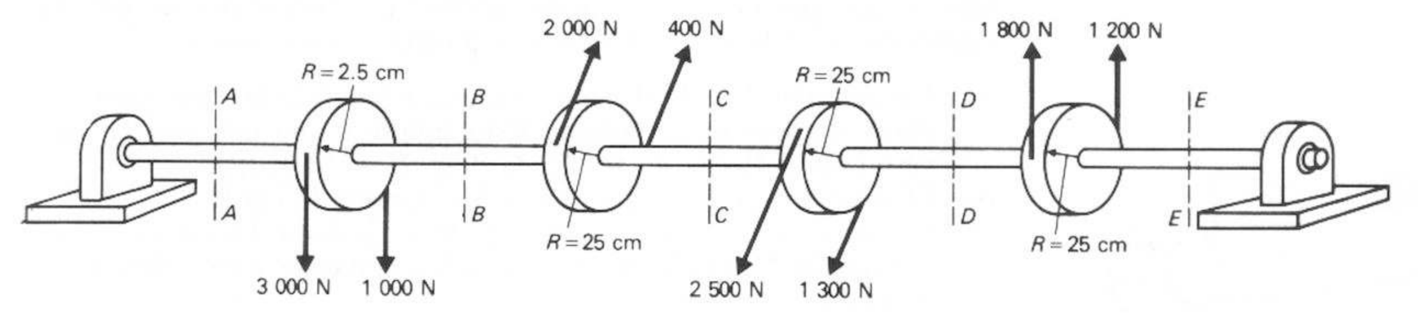


FIGURA P3.6

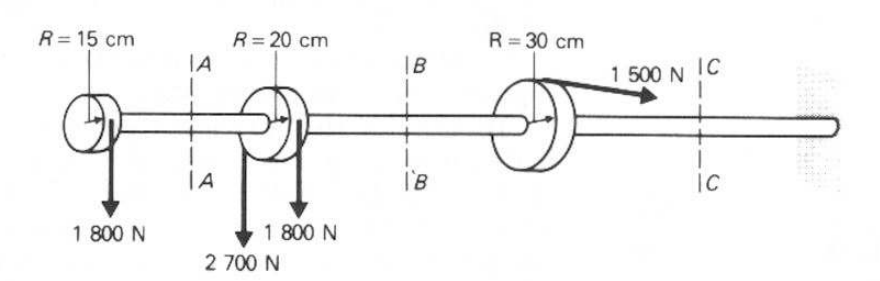


FIGURA P3.7

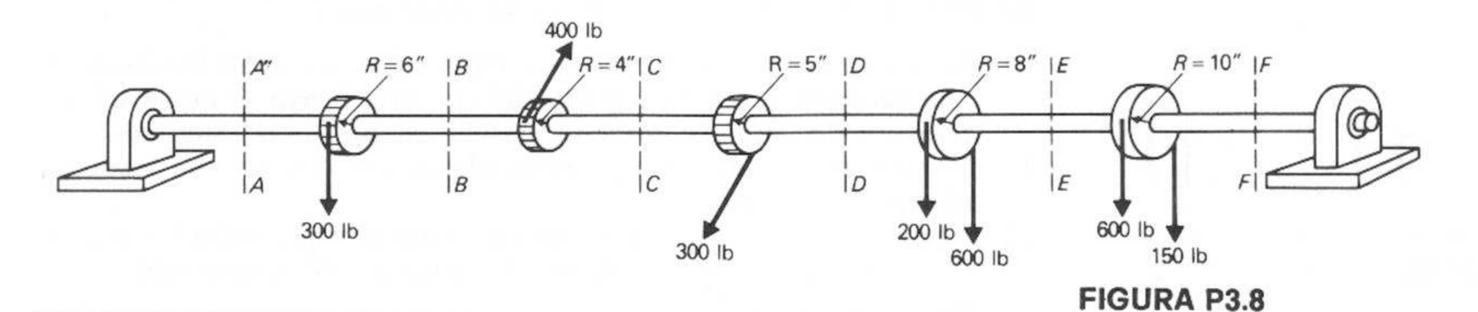
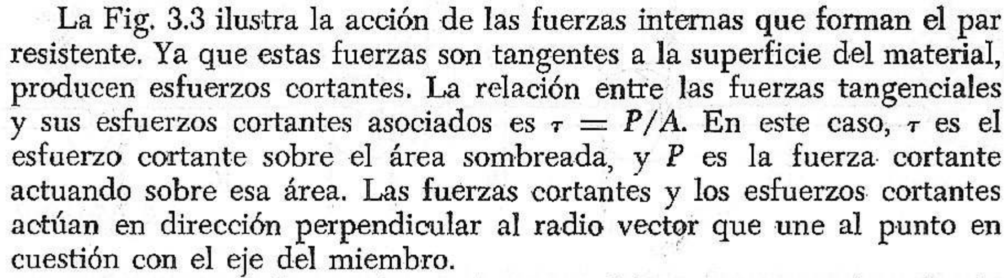


FIGURA P3.8

3.2 Esfuerzo cortante

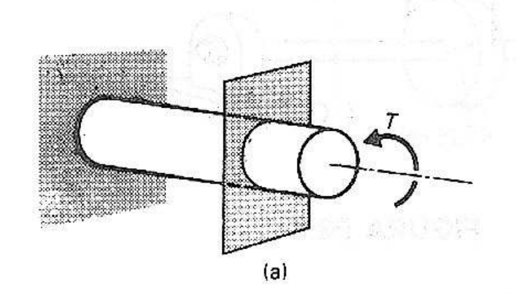
Si un miembro de sección circular está sujeto a cargas de torsión, se producen fuerzas cortantes internas. El producto de estas fuerzas cortantes por sus respectivas distancias del eje de la flecha produce momentos, cuya suma (o resultante) es el par resistente interno descrito en la sección anterior.



La Fig. 3.3 ilustra la acción de las fuerzas internas que forman el par resistente. Ya que estas fuerzas son tangentes a la superficie del material, producen esfuerzos cortantes. La relación entre las fuerzas tangenciales y sus esfuerzos cortantes asociados es $\tau = P/A$. En este caso, τ es el esfuerzo cortante sobre el área sombreada, y P es la fuerza cortante actuando sobre esa área. Las fuerzas cortantes y los esfuerzos cortantes actúan en dirección perpendicular al radio vector que une al punto en cuestión con el eje del miembro.

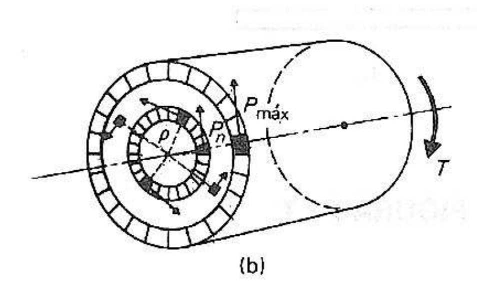
Para investigar la torsión en los ejes, debemos conocer la relación entre el par aplicado y los esfuerzos internos producidos por ese par. Para establecer esa relación, se hacen las siguientes suposiciones:

a) Una sección de la flecha que es plana antes de la torsión, permanece plana después de la torsión. Esto significa que una sección transversal de la flecha no se alabea después de la carga.
b) El diámetro de la flecha no cambia durante la carga.
c) Los esfuerzos están en el rango elástico. Es decir, los esfuerzos están debajo del límite de proporcionalidad cortante, y se aplica la Ley de Hooke.
d) Las deformaciones por cortante varían linealmente desde cero en el eje del miembro, hasta un máximo en las fibras extremas.



La observación y la verificación experimental comprueban que estas suposiciones están justificadas.

Ya que las deformaciones por cortante varían proporcionalmente a la distancia al eje, los esfuerzos cortantes deben tener la misma relación (Ley de Hooke). Esto se muestra en la Fig. 3.3 (d), donde los esfuerzos sobre cualquier anillo delgado, tal como el área n localizada a una distancia radical ρ a partir del eje, son directamente proporcionales a los esfuerzos máximos, que ocurren en las fibras exteriores extremas. Debemos determinar la relación entre estos esfuerzos máximos y el par que los produce. Su deducción tomará la siguiente forma:



a) Se determina la fuerza total que actúa sobre un anillo localizado a una distancia general ρ a partir del eje. Esta fuerza se expresará en términos del esfuerzo cortante máximo en las fibras exteriores.
b) En seguida se determina el momento de esta fuerza con respecto al centro del miembro.
c) Finalmente, se suman los momentos producidos por todos los anillos delgados concéntricos en el eje. La suma de estos momentos es el par interno total de éste.

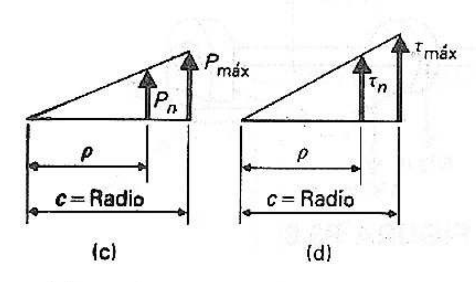


FIGURA 3.3

Las fuerzas cortantes que actúan sobre los pequeños bloques sombreados de cualquier anillo, tal como el anillo n de la Fig. 3.3, tienen todas la misma magnitud, ya que están a la misma distancia del eje del árbol. Además, tienen el mismo sentido de rotación. Por consiguiente, todas las fuerzas en cualquier anillo pueden combinarse y tratarse como una sola fuerza. La magnitud de esta fuerza es $P = \tau_n \, dA$, donde τ_n es el esfuerzo cortante en el anillo n, y dA es el área de ese anillo.

Según los triángulos semejantes de la Fig. 3.3 (d), el esfuerzo cortante en el anillo n puede expresarse como una función del máximo esfuerzo cortante, como sigue:

$$\frac{\tau_n}{\rho} = \frac{\tau}{c}, \qquad \tau_n = \frac{\tau\rho}{c}. \tag{a}$$

La sustitución de la ec. (a) en la expresión para la fuerza en el anillo n conduce a:

$$P_n = \tau_n\, dA = \tau \frac{\rho}{c}\, dA. \tag{b}$$

Esta representa la fuerza en el anillo n. El par dT de esta fuerza alrededor del eje del miembro es:

$$dT = P_n\rho = \left(\tau \frac{\rho}{c}\, dA\right)\rho, \qquad dT = \frac{\tau}{c}\rho^2\, dA. \tag{c}$$

El par interno total es la suma de los pares de cada uno de los anillos concéntricos del eje. Sumando estos pares por integración de la ecuación (c) desde 0 hasta c, da por resultado

$$\int_0^T dT = \int_0^c \frac{\tau}{c}\rho^2\, dA;$$

$$T = \frac{\tau}{c}\int_0^c \rho^2\, dA. \tag{d}$$

El término $\int_0^c \rho^2\, dA$ es, por definición, el momento polar de inercia J. Por cosiguiente, la ec. (c) puede expresarse como $T = (\tau/c)J$. Reescribiendo, tenemos

$$\tau = \frac{Tc}{J}, \tag{3.1}$$

donde

τ = máximo esfuerzo cortante en el eje en lb/plg^2, o en N/m^2,
T = par interno, en lb-plg, o en N · m,
c = radio de la flecha, en plg, o en m,
J = momento polar de inercia de la sección circular, en plg^4, o en m^4.

Para secciones circulares macizas,

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2} \tag{3.2}$$

El esfuerzo sobre cualquier fibra interna situada a una distancia radial ρ a partir del eje del miembro es:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}. \tag{3.1a}$$

EJEMPLO 3.1 Determinar el máximo esfuerzo cortante en un eje de 3 plg de diámetro. El par aplicado es de 3 000 lb-pies.

SOLUCION Primero, se calcula el momento polar de inercia:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (3)^4}{32} = 7.9 \text{ plg}^4$$

La ec. (3.1) se aplica después para calcular el esfuerzo cortante en las fibras más alejadas:

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(3\,000 \times 12)(\frac{3}{2})}{7.9}, \qquad \tau = 6\,800 \text{ lb/plg}^2. \quad ■$$

EJEMPLO 3.2 Calcular el par máximo que puede transmitirse por medio de un eje macizo de acero, de 40 mm de diámetro, sin exceder un esfuerzo cortante de 60 MPa.

SOLUCION El momento polar de inercia es

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (4 \times 10^{-2} \text{ m})^4}{32} = 251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4.$$

Se usa la ecuación (3.1) para determinar el par máximo que puede aplicarse.

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad T = \frac{\tau J}{c} = \frac{(60 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}{(2 \times 10^{-2} \text{ m})},$$

$$T = 753.9 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad ■$$

Problemas

3.9 Determinar el esfuerzo cortante máximo en un eje de 2 plg de diámetro. El par aplicado es de 800 lb-pies.

3.10 Determinar el esfuerzo cortante máximo en un eje de 100 mm de diámetro. El par aplicado es de 1 500 N · m

3.11 Un eje macizo de acero de 1½ plg de diámetro tiene un esfuerzo cortante admisible de 8 000 lb/plg². Determinar el par máximo que puede resistir el eje.

3.12 Un eje macizo de latón de 90 mm de diámetro tiene un esfuerzo cortante admisible de 27 MPa. Determinar el par máximo que puede resistir el eje.

3.13 En un eje macizo de acero el par aplicado es de 700 N · m, y el esfuerzo cortante admisible es de 55 MPa. Determinar el diámetro necesario.

3.14 Un eje macizo de latón tiene un par aplicado de 800 N · m, y un esfuerzo cortante admisible de 27 MPa. Determinar el diámetro necesario.
3.15 Deducir una expresión para el diámetro necesario D de un eje macizo de sección circular. Se debe diseñar el eje para resistir un par aplicado T con un esfuerzo cortante admisible τ.
3.16 Determinar el diámetro necesario para el eje del Problema 3.1. El esfuerzo admisible es de 70 MPa.
3.17 Determinar el esfuerzo cortante en las secciones A y B para el eje del Problema 3.3, suponiendo que su diámetro es de 60 mm.
3.18 Determinar los esfuerzos cortantes en las secciones desde la A hasta la E para la flecha del Problema 3.5. El diámetro del eje en las secciones A, B y C es de 4 plg, y el diámetro en las secciones D y E es de 3 plg.

3.3 Esfuerzo cortante en flechas o ejes huecos de sección circular

En la deducción de la fórmula para el esfuerzo cortante en una flecha sujeta a carga de torsión ($\tau = Tc/J$), se determinó el par resistente interno sumando los pares en todos los anillos concéntricos. Los anillos cercanos al centro del eje tienen esfuerzos muy pequeños y también, brazos de palanca comparativamente pequeños. Por consiguiente, solamente contribuyen en una cantidad pequeña al par resistente total. En muchos problemas es común en la práctica el usar ejes huecos; esto permite al proyectista reducir el peso del eje sin sacrificar mucho su capacidad de carga.

El análisis de un eje hueco es semejante al de un eje macizo. La única diferencia está en el cálculo del momento polar de inercia J. Podemos calcular J restando el momento polar de inercia del agujero del momento polar del círculo completo:

$$J = J_E - J_I,$$

$$J = \frac{\pi D_E^4}{32} - \frac{\pi D_I^4}{32},$$

$$J = \frac{\pi (D_E^4 - D_I^4)}{32} = \frac{\pi (R_E^4 - R_I^4)}{2}. \quad (3.3)$$

Los subíndices E e I se refieren al diámetro exterior, e interior, respectivamente. Para mostrar las resistencias y pesos relativos de ejes macizos y huecos, se presenta el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.3 Comparar la resistencia de una flecha maciza de acero de 4 plg de diámetro con la de una de 4 plg de diámetro exterior y de 2 plg. de diámetro interior. Compare los pesos de 1 pie de cada una de las dos flechas. El esfuerzo cortante admisible es de 10 000 lb/plg^2.

SOLUCION

Eje (macizo)
$D_E = 4$ plg.

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi(4)^4}{32} = 8\pi \text{ plg}^4,$$

$$T = \frac{\tau J}{c} = \frac{(10\,000)(8\pi)}{(2)} = 126\,000 \text{ lb-plg}$$

Eje (hueco)
$D_E = 4$ plg.

$$J = \frac{\pi(D_E^4 - D_I^4)}{32} = \frac{\pi(4^4 - 2^4)}{32} = 7.5\pi \text{ plg}^4,$$

$$T = \frac{\tau J}{c} = \frac{(10\,000)(7.5\pi)}{(2)} = 118\,000 \text{ lb-plg.}$$

Comparando las resistencias, vemos que la flecha hueca es tan resistente como la flecha maciza.

$$\frac{118\,000}{126\,000} \times 100\% = 93.5\%$$

Comparando los pesos de las secciones, vemos que

Peso = volumen × densidad = área × longitud × densidad,

$$\frac{W_H}{W_M} = \frac{A_H \times \text{longitud} \times \text{densidad}}{A_M \times \text{longitud} \times \text{densidad}} = \frac{A_H}{A_M},$$

$$\frac{W_H}{W_M} = \frac{(\pi/4)(4^2 - 2^2)}{(\pi/4)(4)^2} = \frac{16-4}{16} = \frac{3}{4}.$$

El peso de la flecha hueca es ¾ × 100% = 75% del peso de la flecha maciza. ■

Problemas

3.19 Un eje hueco de acero con un diámetro exterior de 80 mm y un diámetro interior de 50 mm está sujeto a un par de 360 N·m. Determinar el esfuerzo cortante máximo en el eje y el esfuerzo cortante en las fibras de su superficie interior.

3.20 Determinar el esfuerzo cortante máximo en un eje hueco de 4 plg de diámetro exterior y 2 plg de diámetro interior. El par aplicado es de 1 000 lb-pie

3.21 Un eje hueco de latón con un diámetro exterior de 75 mm y un diámetro interior de 30 mm tiene un esfuerzo cortante permisible de 27 MPa. Determine el par máximo que puede aplicarse.

3.22 La eficiencia de los ejes huecos en lo que se refiere al ahorro de peso puede ilustrarse mediante los problemas siguientes:

a) Determinar el par que puede aplicarse a un eje macizo de 2 plg de diámetro, suponiendo que el esfuerzo admisible es de 10 000 lb/plg².
b) Se desea reemplazar el eje macizo de a) por un eje hueco del mismo material que tenga la misma resistencia en torsión. Determinar el diámetro interior del eje hueco, dado que el diámetro exterior es de 3 plg. ¿Cuánto menos pesará el eje hueco? (Expresar su respuesta como porcentaje.)

3.23 El eje mostrado en la Fig. P3.23 es macizo desde A hasta B y tiene un diámetro de 80 mm y es hueco desde B hasta C, con un diámetro exterior de 80 mm y un diámetro interior de 40 mm. El esfuerzo admisible es de 70 MPa. Determinar el valor admisible de T.

3.24 Un eje hueco de latón tiene un diámetro interior de 2 plg. Determinar el diámetro exterior necesario. El esfuerzo cortante admisible es de 4 000 lb/plg^2 y el par aplicado es de 16 000 lb-plg.

3.25 Un eje hueco está sujeto a un par de 4 000 N · m. El esfuerzo cortante admisible es de 78 MPa, y el diámetro interior debe ser la mitad del diámetro exterior. Determinar los diámetros necesarios.

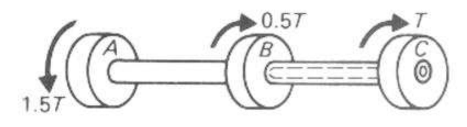


FIGURA P3.23

3.4 Esfuerzo cortante y deformación

Los esfuerzos cortantes descritos en las secciones 3.2 y 3.3 son tangentes a la superficie de las secciones transversales del eje. En la discusión de esfuerzos cortantes y las deformaciones por cortante correspondientes, es más conveniente considerar un cubo elemental de material, en vez de una superficie plana. En la Fig. 3.4 se muestra un cubo elemental típico de un eje. El tamaño del cubo es extremadamente pequeño —tan pequeño que los esfuerzos que actúan sobre las superficies del cubo pueden considerarse como uniformemente distribuidos.

En cualquier momento en que se presenten esfuerzos cortantes sobre una superficie de un cubo elemental, deben presentarse en las cuatro superficies, como se muestra en la Fig. 3.4 (b). Consideremos, por ejemplo, el cubo elemental de material mostrado en la Fig. 3.4 (c). Sobre la cara ab actúa hacia arriba una fuerza cortante vertical. Ya que el cubo debe estar en equilibrio, $\Sigma F_Y = 0$ y debe haber una fuerza vertical a P_s que actúe hacia abajo. Esta fuerza actúa sobre la cara cd (Fig. 3.4 d).

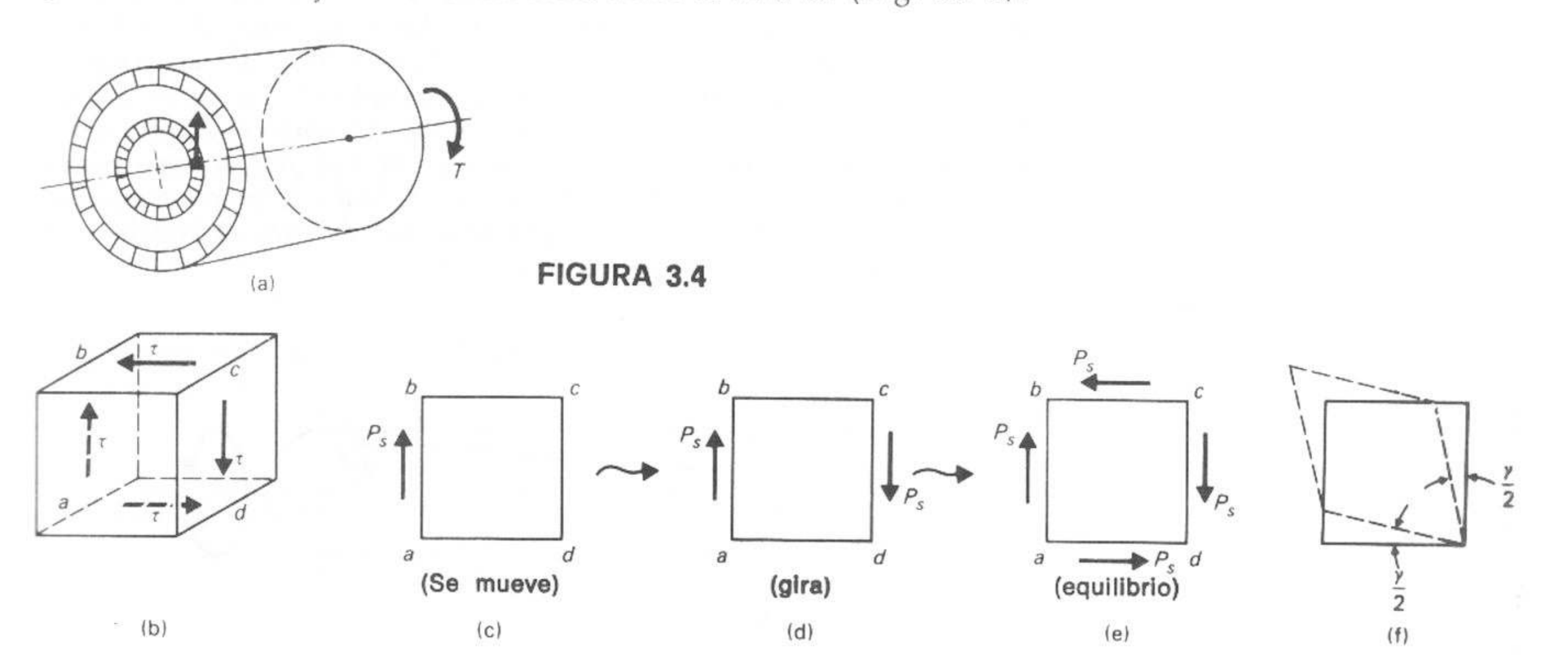


FIGURA 3.4

Sin embargo, estas dos fuerzas, forman un par. Ya que $\Sigma M = 0$ para el cubo, debe haber un par igual y de sentido opuesto para impedir la rotación. Este actúa en las caras *ac* y *bd* (Fig. 3.4e).

Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un cubo elemental de material hacen que el cubo se deforme. Esta deformación, generalmente se considera como un ángulo (Fig. 3.4f). La relación entre el esfuerzo cortante y la deformación se expresa como el ángulo γ de la Fig. 3.4 (f) y está dada por la Ley de Hooke. La constante de proporcionalidad se llama módulo de elasticidad al cortante, G. Expresada algebraicamente,

$$\tau = G\gamma, \tag{3.4}$$

donde:

τ = esfuerzo cortante en lb/plg^2 o en N/m^2,
G = módulo de elasticidad al esfuerzo cortante en lb/plg^2 o en N/m^2,
γ = deformación por cortante, en radianes.

3.5 Angulo de torsión

El máximo esfuerzo cortante en una flecha sujeta a torsión puede determinarse a partir de $\tau = Tc/J$. El par aplicado también hace que el eje se tuerza. El ángulo de torsión es de importancia en muchas aplicaciones de ingeniería. Muchas flechas para maquinaria deben diseñarse de tal manera que no se deformen demasiado; es decir, que no se tuerzan excesivamente. Las herramientas y maquinaria de precisión frecuentemente requieren que el ángulo de torsión quede dentro de ciertos límites especificados.

Consideremos una parte de una flecha sometida a torsión mediante pares, como se muestra en la Fig. 3.5. La línea interrumpida indica la posición de una fibra longitudinal antes de la torsión, y la línea continua representa su posición después de que se han aplicado los pares. La deformación por cortante γ se muestra en la Fig. 3.5 como el ángulo $n'mn$. Debido a que se producen ángulos relativamente pequeños como consecuencia de esfuerzos cortantes menores que el límite de proporcionalidad a cortante, la tangente del ángulo puede darse mediante el ángulo γ en radianes. Expresado matemáticamente:

$$\tan \gamma = \gamma = \frac{n'n}{L}. \tag{a}$$

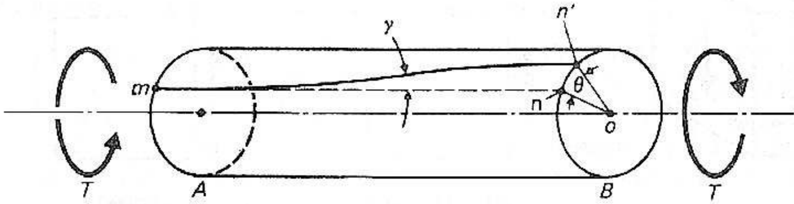


FIGURA 3.5

El ángulo de torsión de la flecha es el ángulo de rotación de la sección y es el ángulo θ mostrado en el extremo B de la Fig. 3.5.

Considerando la geometría del extremo B, podemos expresar el ángulo de torsión, θ, medido en radianes, como el arco $n'n$ dividido entre el radio R. Matemáticamente,

$$\theta = \frac{n'n}{R}; \qquad n'n = R\theta. \tag{b}$$

Ya que la dimensión $n'n$ aparece en ambas ecuaciones (a) y (b), estas ecuaciones pueden combinarse como sigue:

$$\gamma = \frac{n'n}{L} = \frac{R\theta}{L}. \tag{c}$$

El ángulo γ es la deformación por cortante y es el mismo término que aparece en la ec. (3.4). La ecuación (3.4) puede entonces volver a escribirse en una forma adecuada para calcular el ángulo de torsión θ:

$$\tau = G\gamma. \tag{3.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1) y (c) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{TR}{J} = G\frac{R\theta}{L}.$$

Lo que da por resultado:

$$\theta = \frac{TL}{JG}, \tag{3.5}$$

donde:

θ = ángulo de torsión, en radianes,
T = par en lb-plg o en N · m,
L = longitud de la acción de la flecha, en plg o en m,
G = módulo de elasticidad, al esfuerzo cortante en lb/plg^2 o en N/m^2,
J = momento polar de inercia, en plg^4 o en m^4.

EJEMPLO 3.4 Determinar el ángulo de torsión en una flecha de acero de 2 plg de diámetro y 6 pies de longitud. El par es de 1000 lb-pie. Expresar la respuesta tanto en grados como en radianes. Para el acero, G = 12 000 000 lb/plg^2.

SOLUCION El ángulo de torsión θ puede calcularse según la ec. (3.5):

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{(1\,000 \times 12)(6 \times 12)}{(12 \times 10^6)[\pi(2)^4/32]} = 0.046 \text{ rad}.$$

Pueden usarse tanto grados como radianes para expresar un ángulo. Ya que hay 2π radianes en 360°, esta relación puede usarse como factor de conversión. En este problema:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360 \text{ grad.}} = \frac{0.046 \text{ rad}}{\theta \text{ grad.}}$$

$$\theta = \frac{0.046(360)}{2\pi} = 2.65°. \blacksquare$$

EJEMPLO 3.5 Un eje macizo de 3 m de longitud debe transmitir un par de 3 000 N · m sin exceder un esfuerzo cortante de 75 MPa, y también sin exceder un ángulo total de torsión de 3°. El módulo al esfuerzo cortante para el acero es $G = 77$ GPa.

SOLUCION

a) Diseño del eje con base en el requisito del esfuerzo cortante.

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{3\,000 \text{ N}\cdot\text{m}}{75 \times 10^6 \text{ N/m}^2},$$

$$\frac{J}{c} = 40 \times 10^{-6} \text{ m}^3,$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi D^4/32}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Igualando los términos de J/c,

$$\frac{\pi D^3}{16} = 40 \times 10^{-6}$$

$$D = 5.88 \times 10^{-2} \text{ m} = 58.8 \text{ mm}.$$

b) Diseño del eje sobre la base de la limitación del ángulo de torsión,

$$\theta = \frac{TL}{JG}; \qquad J = \frac{TL}{\theta G} = \frac{(3\,000 \text{ N}\cdot\text{m})(3 \text{ m})}{(3 \times 2\pi/360)(77 \times 10^9 \text{ N/m}^2)},$$

$$J = 2.233 \times 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$\frac{\pi D^4}{32} = 2.33 \times 10^{-6},$$

$$D = 69 \text{ mm}.$$

c) Selección del diámetro de la flecha.

Aquí, como en la mayoría de los problemas de diseño, los requisitos del material (representado por el esfuerzo) y su comportamiento (representado por la deformación) no están relacionados, resultando dos dimensiones diferentes para el diseño. Escogemos un diámetro de D = 69 mm debido a que la deformación es el requisito que rige en este caso: El esfuerzo de trabajo en la flecha será menor que el valor admisible. La selección final puede ser una flecha con un diámetro de 69 mm, o mayor. ■

Problemas

En los problemas siguientes, los valores de G pueden encontrarse en el Apéndice C.

3.26 Una flecha de acero de 3 plg de diámetro y 10 pies de longitud está sujeto a un par de 5 000 lb-pie. Determinar el ángulo de torsión tanto en grados como en radianes.

3.27 Una flecha de acero tiene un diámetro interior de 50 mm y un diámetro exterior de 100 mm y está sujeto a un par de 1 400 N · m. Determinar el ángulo de torsión entre dos secciones transversales separadas 2 m. Expresar el ángulo de torsión, tanto en grados como en radianes.

3.28 Una flecha maciza de latón de 40 mm de diámetro y 1.5 m de longitud no debe torcerse más de $\frac{1}{20}$ rad. Determinar el par máximo admisible.

3.29 Una flecha hueca de acero, de 3 plg de diámetro exterior, 2 plg de diámetro interior y 5 pies de longitud, está sujeta a un par. El ángulo de torsión admisible es de tres grados. Determinar el valor admisible de este par.

3.30 Determinar la longitud máxima admisible de una flecha maciza de latón de 40 mm de diámetro. El par aplicado es de 1 200 N · m y el ángulo de torsión admisible es $\frac{1}{20}$ rad.

3.31 Determinar el diámetro necesario de una flecha maciza de aluminio. El par aplicado es de 2 000 lb-pie, la longitud es de 8 pies, y el ángulo de torsión admisible es $\frac{1}{12}$ rad.

3.32 Determinar el diámetro exterior necesario de una flecha hueca de acero. El par aplicado es de 1 800 lb-pie, el diámetro interior es de 2 plg, y el ángulo de torsión admisible entre dos secciones separadas 12 pies es de 2°.

3.33 La flecha de acero mostrado en la Fig. P3.33 tiene un diámetro de 60 mm. Determinar:

a) el ángulo de torsión entre A y B,
b) el ángulo de torsión entre B y C,
c) el ángulo de torsión entre A y C.

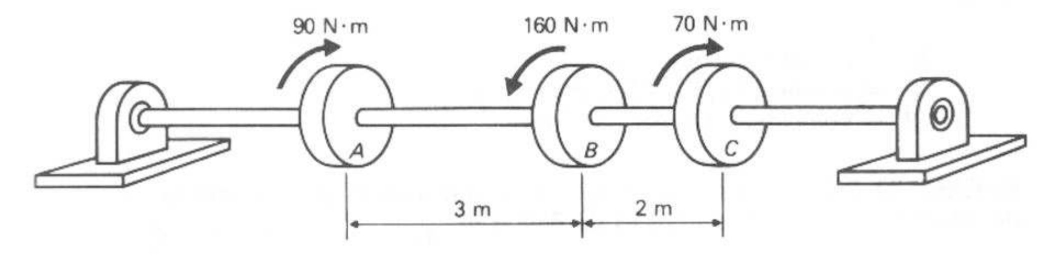


FIGURA P3.33

3.6 Ejes giratorios (árboles de transmisión)

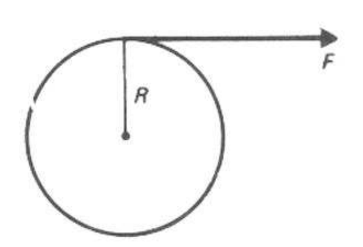


FIGURA 3.6

Muchos problemas en diseño de máquinas contienen flechas que transmiten potencia desde una fuente hasta el lugar donde se ejecuta el trabajo. Por ejemplo, un eje (o árbol) transmite potencia desde una fuente (el motor) para hacer girar la hélice de un barco. La relación entre la potencia desarrollada y el par en un eje se discute en esta sección.

Consideremos un eje de radio R con una fuerza F aplicada a su superficie exterior, como se muestra en la Fig. 3.6. El trabajo hecho por la fuerza F se define como la fuerza multiplicada por la distancia recorrida en la dirección de la fuerza. En una revolución completa, la fuerza habrá hecho un recorrido igual a la circunferencia del eje, o $2\pi R$. Entonces, el trabajo desarrollado por la fuerza es:

$$\text{Trabajo} = F(2\pi R) \text{ lb-plg o N} \cdot \text{m} \qquad \text{(a)}$$

Si el árbol está girando a una velocidad de N revoluciones por minuto (rpm), la distancia total recorrida por un minuto es $(2\pi R)N$ plg/min o m/min. Como la potencia se define como la cantidad de trabajo realizado en la unidad de tiempo, la potencia desarrollada por la fuerza F sería:

$$\text{Potencia} = F(2\pi R)N \text{ lb-plg/min o N} \cdot \text{m/min} \qquad \text{(b)}$$

La unidad usual de potencia es el caballo de potencia (hp), que es igual a 33 000 lb-pie/min. Cuando dividimos la ec. (b) en unidades inglesas entre 12 plg/pie para convertir la potencia a lb-pies/min y dividimos nuevamente por 33 000 lb-pies/min, la expresión se convierte en:

$$\text{hp} = \frac{(F)(2\pi R)N}{(12)(33\,000)} = \frac{FRN}{63\,000}. \qquad \text{(c)}$$

Refiriéndonos otra vez a la Fig. 3.6, encontramos que el par en el árbol es $T = FR$. Sustituyendo esta expresión en la ec. (c) se obtiene.

$$\text{hp} = \frac{TN}{63\,000}, \qquad (3.6)$$

donde:

hp = caballos de potencia,
T = par en el eje, en lb-plg,
N = velocidad del eje, en rpm.

EJEMPLO 3.6 Determinar la potencia transmitida por un eje si el par es de 1 000 lb-plg y la velocidad es de 630 rpm.

SOLUCION Usando la ecuación (3.6), calculamos la potencia en caballos como sigue:

$$\text{hp} = \frac{TN}{63\,000} = \frac{(1\,000)(630)}{63\,000}, \qquad \text{hp} = 10. \quad ■$$

La ecuación (b) describe la potencia transmitida por una flecha giratoria como el producto del par de torsión por el ángulo a través del cual gira el árbol por unidad de tiempo. Si el par de torsión se mide en N·m en vez de en lb-pie, y la rapidez del eje se expresa como la frecuencia

f en revoluciones por segundo, más bien que como N revoluciones por minuto, la ecuación se transforma en

$$\textbf{Potencia} = F(2\pi R)f \quad \text{N}\cdot\text{m/s}. \tag{d}$$

En unidades del SI, la potencia se expresa en watts, con unidades de N·m/s. Consecuentemente, la ecuación (b) es suficiente para usarse en forma directa para el análisis y diseño de ejes giratorios. En unidades del SI, es innecesaria la conversión expresada por las ecuaciones (c) y (3.6) anteriores.

La ecuación (d) puede transformarse en una ecuación más útil reconociendo que la fuerza F multiplicada por su brazo de palanca R representa un par de torsión T. Como $T = PR$, la expresión para la potencia se convierte en:

$$P = 2\pi T f \tag{3.7}$$

donde:

P = potencia en N · m/s,
T = par de torsión en la flecha en N · m,
f = frecuencia en revoluciones por segundo, o Hz.

EJEMPLO 3.7 Una flecha girando a 20 Hz transmite una potencia de 80 kW. Determinar el par de torsión que se desarrolla en la flecha.

SOLUCION Usando la ecuación (3.7) calculamos el par de torsión interno, como:

$$P = 2\pi T f; \qquad T = \frac{P}{2\pi f}$$

$$T = \frac{(80 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m/s})}{(2\pi)(20/\text{s})}$$

$$T = 636.7 \text{ N}\cdot\text{m}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3.8 Diseñar una flecha maciza de acero para transmitir 40 kW de potencia una rapidez de 25 Hz. El esfuerzo cortante admisible en la flecha es de 60 MPa.

SOLUCION El diseño involucra, primero, la determinación del par interno necesario en el eje. Después se elige el diámetro que permitirá que ese par se transmita sin haberse excedido los esfuerzos admisibles. El par de torsión se calcula a partir de la ecuación (3.7), como

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{(40 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m/s})}{(2\pi)(25/\text{s})},$$

$$T = 255 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

El diámetro de la flecha se determina según la ecuación (3.1), como

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{255 \text{ N}\cdot\text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2}.$$

$$\left(\frac{J}{c}\right)_{\text{nec.}} = 4.25 \times 10^{-6}.$$

Igualando el $(J/c)_{\text{necesario}}$ con la expresión general para J/c da por resultado

$$\frac{\pi D^3}{16} = 4.25 \times 10^{-6},$$

$$D = 0.0279 \text{ m} = 27.9 \text{ mm}. \quad ■$$

Problemas

3.34 Determinar la potencia que transmite una flecha rotatoria, si el par es de 1 000 lb-pie y la velocidad es de 315 rpm.
3.35 Determinar el par producido en una flecha que transmite 500 hp a una velocidad de 315 rpm.
3.36 Determine el par producido en una flecha de transmisión que transmite 800 N · m a 40 Hz.
3.37 Determinar la velocidad admisible de una flecha que transmite 100 hp. El par admisible es de 630 lb-pie.
3.38 Una flecha maciza de acero de 3½ plg de diámetro entrega 200 hp a 180 rpm. Determinar el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión entre dos secciones separadas 8 pies.
3.39 Una flecha maciza de acero de 1 plg de diámetro entrega 20 hp a 1 600 rpm. Determinar el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión entre dos secciones separadas 6 pies.
3.40 ¿Cuál debe ser el diámetro de una flecha maciza de latón para que entregue 40 hp a una velocidad de 1 200 rpm, si el esfuerzo permisible es de 4 000 lb/plg²?
3.41 ¿Cuál debe ser el diámetro de una flecha de acero para entregar 30 hp a 1 500 rpm, si el ángulo de torsión admisible es de 3° entre dos secciones separadas 6 pies?
3.42 Determinar el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión por metro de longitud para una flecha maciza de acero de 100 mm de diámetro, que transmite 200 kW de potencia a 50 Hz.
3.43 Diseñar una flecha maciza de acero para transmitir 50 kW de potencia a 20 Hz. El esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa.
3.44 Una flecha hueca de latón transmite 30 kW a 25 Hz. El esfuerzo cortante permisible es de 25 MPa, y el ángulo de torsión no debe exceder de 2° por metro de longitud. Determinar el diámetro interior cuando el diámetro exterior es de 60 mm.
3.45 Diseñar una flecha hueca de acero con un diámetro interior de ½ del diámetro exterior. La flecha transmite 200 kW a 20 Hz. El esfuerzo permisible es de 55 MPa, y el ángulo de torsión permisible es de 1° por metro de longitud.

3.7 Acoplamiento de flechas o ejes

Frecuentemente se necesita ensamblar flechas largas a partir de piezas más cortas. Un método común es el ensamble por medio de un acoplamiento para flechas, como se muestra en la Fig. 3.7. El acoplamiento consiste en bridas que tienen agujeros perforados de antemano, en los extremos de las piezas que se van a unir. Se colocan dos bridas juntas y se sujetan mediante pernos formando así un eje más largo. Los libros de texto sobre diseño de máquinas proporciona una discusión más completa de los diversos métodos de acoplamiento disponibles. En este libro solamente trataremos el análisis de la conexión a base de pernos.

El análisis de las fuerzas que actúan sobre los pernos de un acoplamiento es un problema de estática sencillo. El acoplamiento debe transmitir el par entre las dos secciones de la flecha. La única forma para

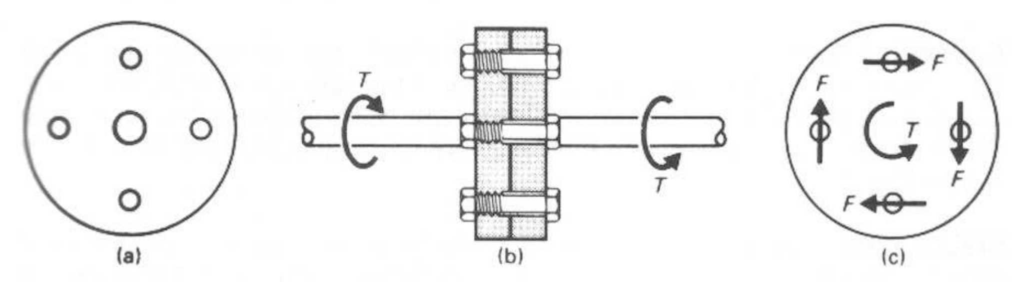


FIGURA 3.7

que este par se transmita a través del acoplamiento es a través de los pernos que quedan sometidos a esfuerzo cortante y esfuerzo de aplastamiento.

Considerando una sección a través de las bridas, como se indica en la Fig. 3.7 (c), encontramos que al par T se opone el momento de las fuerzas cortantes en los pernos. Si todos los pernos equidistan del centro de la flecha, las fuerzas en los pernos son iguales.

Si el acoplamiento contiene pernos dispuestos a distancias variables del eje de la flecha, la fuerza en cualquier perno es proporcional a su distancia al centro de la flecha. Esto es similar a la situación que se presenta en la flecha descrita en la sección 3.2, donde las fuerzas variaban proporcionalmente a la distancia al centro de la flecha.

En la Fig. 3.7, cada uno de los pernos soporta una fuerza igual F. Se puede obtener la relación entre las fuerzas en los pernos y el par en la flecha tomando momentos con respecto al centro de la misma.

Considerando la Fig. 3.7 (c), tenemos:

$$\sum M_{\text{centro}} = 0: \qquad T = nFr,$$

donde:

T = par aplicado,
n = número de pernos,
F = fuerza cortante en cada perno,
r = distancia de los pernos medida desde el centro de la flecha.

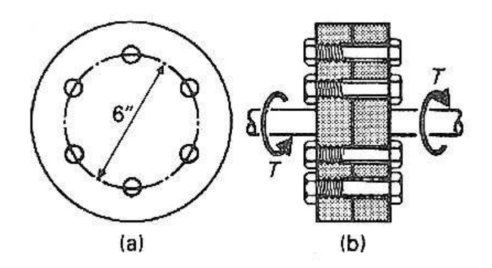


FIGURA 3.8

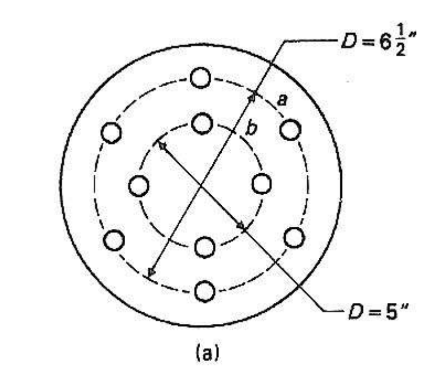
EJEMPLO 3.9 Determinar el par máximo que puede ser transmitido por un acoplamiento del eje que contiene seis pernos de ½ plg, igualmente espaciados sobre un círculo de 6 plg de diámetro, como se muestra en la Fig. 3.8. El esfuerzo cortante permisible para los pernos es de 10 000 lb/plg².

SOLUCION La fuerza cortante permisible en cada perno es:

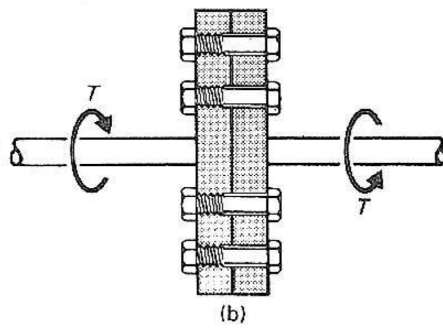
$$P = \tau A = 10\,000(0.196), \qquad A = \tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{1}{2})^2 = 0.196 \text{ plg}^2.$$
$$P = 1\,960 \text{ lb}.$$

Tomando momentos con respecto al centro del eje de la flecha, se tiene:

$$\sum M_{\text{centro}} = 0: \qquad T = nFr = (6)(1\,960)(3),$$
$$T = 35\,400 \text{ lb-plg} \quad ■$$



EJEMPLO 3.10 Determinar el esfuerzo cortante que actúa en cada perno de ½ plg de un acoplamiento, suponiendo que el par aplicado es de 6 000 lb-pie. Los pernos están distribuidos en tal forma que seis quedan sobre un círculo de 6½ plg de diámetro, y cuatro quedan sobre un círculo de 5 plg de diámetro (véase Fig. 3.9).



SOLUCION Las fuerzas que actúan sobre los pernos pueden calcularse por estática. En este caso se presentan dos fuerzas desconocidas, F_1 sobre el círculo a, y F_2 sobre el círculo b. Por consiguiente se tiene:

$$\sum M_{\text{centro}} = 0: \qquad (6\,000)(12) = 6F_1(3.25) + 4F_2(2.5),$$
$$72\,000 = 19.5F_1 + 10F_2. \tag{1}$$

Se puede obtener la relación entre las fuerzas F_1 y F_2 considerando que la fuerza en cada perno es proporcional a la distancia del perno al centro del eje de la flecha. Por consiguiente,

$$\frac{F_2}{2.5} = \frac{F_1}{3.25},$$
$$F_2 = \frac{2.5}{3.25}F_1. \tag{2}$$

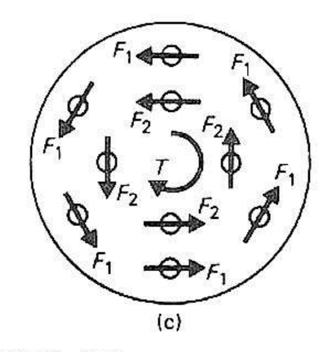


FIGURA 3.9

Sustituyendo esta expresión en la ec. (1) se obtiene:

$$72\,000 = 19.5F_1 + 10\frac{2.5}{3.25}F_1, \qquad F_1 = 2\,650 \text{ lb}.$$

Según la ec. (2), se tiene:

$$F_2 = \frac{2.5}{3.25}(2\,650), \qquad F_2 = 2\,030 \text{ lb}.$$

El esfuerzo cortante en cada perno del anillo exterior es:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{2\,650}{0.196}, \qquad \tau = 13\,500 \text{ lb/plg}^2$$

El esfuerzo cortante en cada perno del anillo interior es:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{2\,030}{0.196}, \qquad \tau = 10\,400 \text{ lb/plg}^2$$

Problemas

3.46 Determinar el par máximo que puede transmitirse mediante un acoplamiento de flecha que tiene cuatro pernos de 20 mm igualmente espaciados sobre un círculo de 100 mm de diámetro. El esfuerzo cortante permisible en los pernos es de 70 MPa.

3.47 Determinar el esfuerzo cortante en los pernos de un acoplamiento de eje, que transmite un par de 1 500 lb-pie. Hay seis pernos de ¾ plg igualmente espaciados sobre un círculo de 5 plg de diámetro.

3.48 Determinar el número de pernos de 12 mm necesarios para transmitir un par de 6 000 N · m. El diámetro del círculo donde se localizarán los ejes de los pernos es de 130 mm, y el esfuerzo cortante admisible en los pernos es de 80 MPa.

3.49 Determinar el par máximo que puede transmitirse mediante un acoplamiento de ejes que tiene dos hileras de pernos de ¾ plg. El círculo interior contiene cuatro pernos sobre un diámetro de 4 plg, y el círculo exterior contiene seis pernos sobre un diámetro de 6 plg. El esfuerzo cortante admisible en los pernos es de 10 000 lb/plg^2.

3.8 Resortes helicoidales

Los resortes helicoidales se usan frecuentemente en el diseño de máquinas para absorber energía producida por cargas. En esta sección se puede explicar el método para calcular esfuerzos y deflexiones de resortes, ya que la acción de los resortes es principalmente de naturaleza torsional. Los resortes que se considerarán en esta sección son los llamados resortes helicoidales de "espiras cerradas". El término "espiras cerradas" significa que las espiras (o vueltas) quedan en un plano casi perpendicular al eje del resorte.

Consideremos el resorte mostrado en la Fig. 3.10 sujeto a una carga de tensión a través del eje del resorte. Si se cortara el resorte a través de una espira, resultaría el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 3.10 (b). En la sección cortada se requiere una fuerza vertical y un par para mantener el equilibrio. Tanto la fuerza como el par actúan en el plano de la sección del corte. Si el diámetro nominal del resorte es *D*, y el diámetro del alambre es *d*, el esfuerzo máximo puede calcularse como sigue:

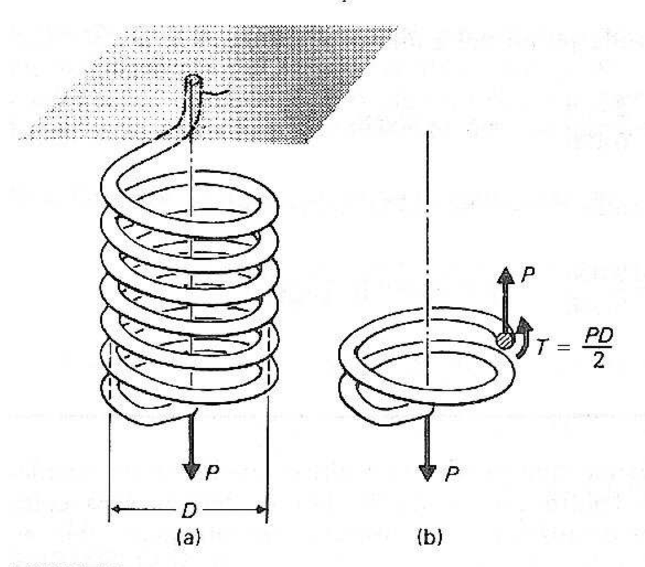


FIGURA 3.10

$$\tau = \frac{P}{A} + \frac{Tc}{J} = \frac{P}{(\pi/4)d^2} + \frac{(PD/2)(d/2)}{(\pi/32)d^4} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3}.$$

Esta expresión puede volver a escribirse como:

$$\tau = \frac{4P}{\pi d^2} \cdot \frac{2Dd}{d2D} + \frac{8PD}{\pi d^3},$$

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3}\left[1 + \frac{d}{2D}\right] \tag{3.8}$$

En aquellos resortes donde la relación D/d es grande, el efecto del esfuerzo cortante p/A es despreciable, y domina la torsión. Sin embargo, si sucede lo contrario, el término en el paréntesis se vuelve más significativo y, además, las condiciones de deformación que se supusieron despreciables en la ec. (3.8) adquieren importancia. Todos estos factores pueden incluirse en un factor de corrección a la ecuación básica. El máximo esfuerzo cortante en un resorte puede calcularse mediante la ec. (3.9):

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{8PD}{\pi d^3}, \tag{3.9}$$

donde:

P = carga axial, en lb, o en N,
D = diámetro del resorte en plg o en m,
d = diámetro del alambre, en plg o en m,
$\tau_{\text{máx}}$ = máximo esfuerzo cortante en el resorte, en lb/plg² o en N/m²
K = Factor de corrección de Wahl (mostrado gráficamente en la Fig. 3.11).

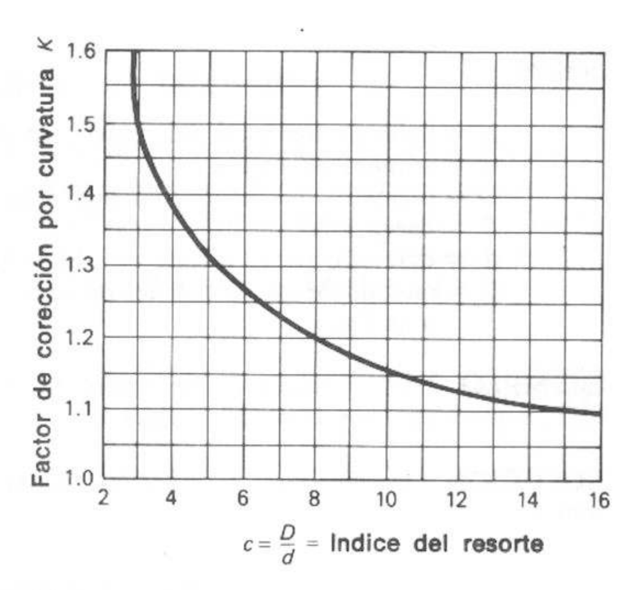


FIGURA 3.11 Factor de corrección por curvatura para resortes helicoidales de alambre redondo, a tensión, o a compresión. (Tomado de A.M. Wahl, Mechanical Springs; McGraw-Hill Book Co., Inc. Nueva York, 1963, mediante permiso.)

EJEMPLO 3.11 Un resorte helicoidal está hecho de alambre de ⅜ plg enrollado en espiral a un diámetro de 3 plg, entre centros del alambre. Determinar el esfuerzo máximo en el alambre ocasionado por una carga axial de tensión de 300 lb.

SOLUCION El esfuerzo puede calcularse por medio de la ec. (3.9). Se obtiene:

$$\tau = K\frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{(1.18)(8)(300)(3)}{\pi(\frac{3}{8})^3}, \qquad \tau = 51\,300 \text{ lb/plg}^2. \quad \blacksquare$$

3.9 Deflexión de resortes helicoidales

En la sección anterior se observó que el efecto principal en un resorte es el de torsión. La de flexión de un resorte se debe entonces principalmente al efecto de la torsión.

Consideremos una espira de un resorte helicoidal, como se muestra en la Fig. 3.12. Supóngase que solamente se aplican cargas de torsión. El movimiento vertical δ de esta espiral es igual a la rotación angular del alambre multiplicada por el radio de resorte. La rotación angular del alambre es el ángulo de torsión dado por la ec. (3.5), y la longitud es la de la espira circular, πD. Así,

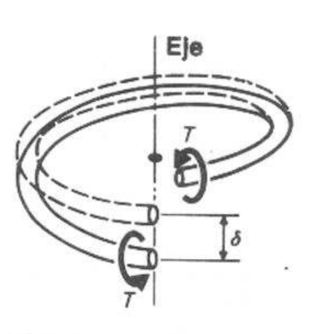


FIGURA 3.12

$$\delta = \theta\frac{D}{2} = \frac{T(\pi D)}{JG}\frac{D}{2} = \frac{\pi D^2 T}{2JG}.$$

Si un resorte tiene n espiras, la deflexión total es la deflexión acumulada en cada una de las espiras y se tiene:

$$\Delta = n\delta = \frac{n\pi D^2 T}{2JG} = \frac{n\pi D^2(PD/2)}{2(\pi/32)d^4 G},$$

$$\Delta = \frac{8nPD^3}{d^4 G}. \tag{3.10}$$

donde:

Δ = deformación total del resorte, en plg, o en m,
n = número de espiras,
D = diámetro del resorte, en plg, o en m,
P = carga axial, en lb, o en N,
d = diámetro de la varilla, en plg, o en m,
G = módulo de elasticidad del material al esfuerzo cortante, en lb/plg^2, o en Pa.

EJEMPLO 3.12 Calcular la deflexión del resorte descrito en el ejemplo 3.11, suponiendo que tiene 16 espiras.

SOLUCION Puede usarse la ecuación (3.10) para calcular la deflexión del resorte:

$$\Delta = \frac{8nPD^3}{d^4G} = \frac{8(16)(300)(3)^3}{(\frac{3}{8})^4(12 \times 10^6)},$$

$$\Delta = 4.36 \text{ plg}$$ ■

Problemas

3.50 Un resorte helicoidal se hace de alambre de acero de 12 mm enrollado en espiral a un diámetro de 80 mm entre centros del alambre. Determinar la tensión axial permisible. El esfuerzo cortante admisible es de 480 MPa. Si el resorte tiene 12 espiras, ¿cuál es la deflexión debida a la carga de tensión admisible?

3.51 Calcular el esfuerzo máximo y la deflexión en un resorte helicoidal. Datos: D = 120 mm, d = 18 mm, n = 18, P = 3 000 N y G = 11 GPa.

3.52 Un resorte helicoidal de compresión se hace de alambre de acero de ¼ plg enrollado en espiral a un diámetro de 2 plg entre centros del alambre. Determinar el número de vueltas necesarias para que este resorte se deflecte 1 plg cuando se somete a una carga de 80 lb. ¿Cuál es el esfuerzo en el resorte debido a esta carga?

3.53 La constante de un resorte se define como la fuerza necesaria para deflectar el resorte 1 plg. Determinar la constante de un resorte hecho con alambre de acero de ⅜ plg de diámetro enrollado a un diámetro de 1¾ plg entre centros del alambre. Hay 20 espiras y $G = 12 \times 10^6$ lb/plg^2.

3.54 Determinar la constante de un resorte hecho con alambre de acero de 15 mm de diámetro y que tiene un diámetro nominal de 100 mm. Hay 12 espiras, y G = 11 GPa.

3.55 Se desea diseñar un resorte con una constante de 150 lb/plg. Si el diámetro del resorte debe ser 5 plg, entre centros del alambre y debe tener 15 espiras, ¿cuál debe ser el diámetro del alambre?

3.10 Torsión de secciones no circulares

Las relaciones matemáticas de este capítulo se aplican solamente a flechas circulares sujetas a carga de torsión. Afortunadamente, esto incluye un espectro amplio de aplicaciones prácticas. Las ecuaciones para los esfuerzos y las deformaciones de torsión, no son válidas para secciones transversales no circulares, tales como las indicadas en la Fig. 3.13.

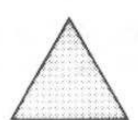
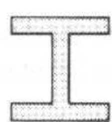
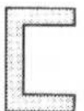
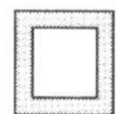
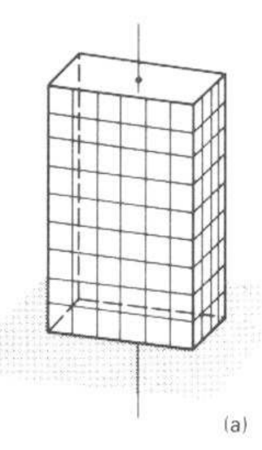






FIGURA 3.13

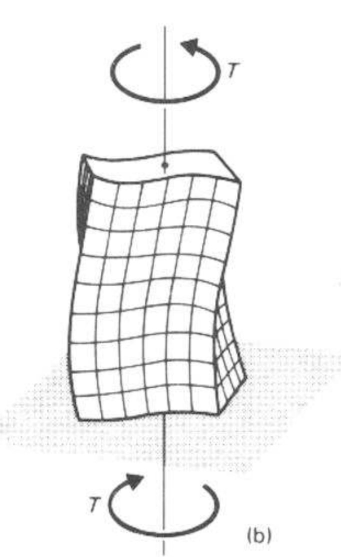
Las secciones de los ejes circulares que son planas antes de las cargas de torsión se conservan planas después de aplicar las cargas. Por otro lado, las secciones no circulares se alabean cuando se sujetan a cargas de torsión. Por consiguiente, las deformaciones por cortante no varían linealmente a partir del eje central. El tratamiento matemático de este tipo de problema puede encontrarse en libros de texto sobre la teoría de elasticidad y de mecánica de materiales avanzada.

Podemos visualizar la razón del alabeo y su influencia considerando una barra de sección transversal rectangular que está sujeta a una carga de torsión. La Fig. 3.14 indica dicho miembro. Generalmente podríamos anticipar que un punto de los más alejados del eje, tal como una de las esquinas, tendría el mayor esfuerzo. Sin embargo, el esfuerzo de torsión en las esquinas de una flecha de sección rectangular es cero.

Un elemento de la esquina, tal como el indicado en la Fig. 3.15 tiene tres superficies libres mutuamente perpendiculares. Una superficie libre no puede tener esfuerzo. Si existiese un esfuerzo cortante en una esquina, sería posible descomponer dicho esfuerzo en componentes paralelas a las aristas. Debido a que el esfuerzo cortante siempre ocurre por parejas que actúan sobre planos mutuamente perpendiculares, tendrían que presentarse esfuerzos en las superficies exteriores. Esto es imposible en las esquinas. Por consiguiente, los esfuerzos de torsión en las esquinas de las barras de sección rectangular deben ser cero. Al no haber esfuerzos en las esquinas, dichas barras no se distorsionarán en tales lugares.

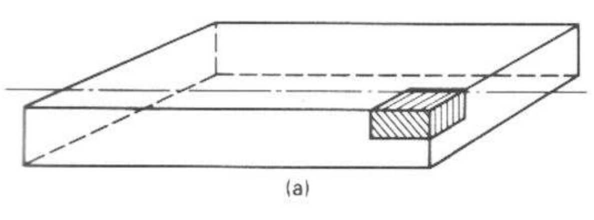


(a)

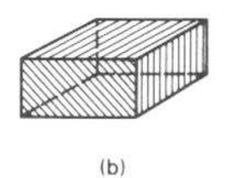


(b)

FIGURA 3.14



(a)



(b)

FIGURA 3.15

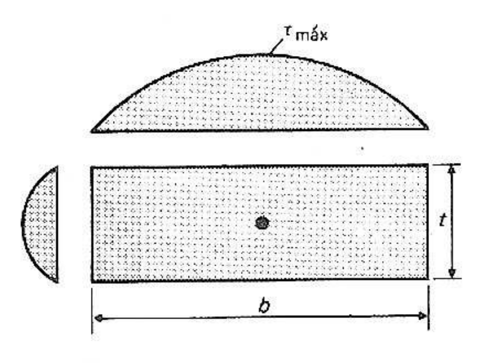


FIGURA 3.16

La Fig. 3.16 indica la distribución de esfuerzos en una flecha de sección rectangular. El esfuerzo cortante máximo ocurre en el punto medio del lado más largo. La magnitud del esfuerzo cortante máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\alpha T}{bt^2} \tag{3.11}$$

donde:

$\tau_{\text{máx}}$ = esfuerzo cortante máximo, en lb/plg², o en N/m²,
α = un coeficiente relacionado, con la razón b/t de la sección transversal,
T = par de torsión, en lb-plg, o en N · m,
b = ancho de la sección transversal, en plg, o en m,
t = espesor de la sección transversal, en plg, o en m.

El ángulo de torsión para una sección rectangular puede calcularse a partir de

$$\theta = \frac{\beta TL}{Gbt^3} \tag{3.12}$$

donde

θ = ángulo total de torsión, en radianes,
T = par de torsión, en lb-plg, o en N · m,
b = ancho de la sección transversal, en plg, o en m,
t = espesor de la sección transversal, en plg, o en m,
G = módulo de elasticidad a cortante, en lb/plg², o en N/m²,
L = longitud de la sección considerada, en plg, o en m,
β = coeficiente relacionado con la razón b/t de la sección transversal.

Una tabla de coeficientes para flechas rectangulares es como sigue

$\frac{b}{t}$	1.0	1.5	2.0	3.0	6.0	∞
α	4.81	4.33	4.07	3.75	3.34	3.0
β	7.10	5.10	4.37	3.84	3.34	3.0

Problema ilustrativo 3.1

Determinar el diámetro requerido para una flecha circular maciza. El esfuerzo cortante admisible es de 70 MPa, y el ángulo de torsión medido entre dos secciones transversales separadas 2.5 m no debe exceder de 3°. El par aplicado es de 1 400 N · m, y $G = 11$ GPa.

SOLUCION Como se imponen dos condiciones, debemos calcular dos diámetros: uno, considerando que el esfuerzo cortante rige el diseño, y el otro, considerando que el factor determinante es el ángulo de torsión. De estos dos, debemos elegir después, el correcto.

Suponiendo que rige el esfuerzo cortante, se determina el diámetro necesario, como sigue:

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{1\,400 \text{ N m}}{70 \times 10^6 \text{ N/m}^2},$$

$$\left(\frac{J}{c}\right)_{\text{nec.}} = 20 \times 10^{-6} \text{ m}^3,$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi D^4/32}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16},$$

$$\frac{\pi D^3}{16} = 20 \times 10^{-6},$$

$$D = 0.0466 \text{ m} = 46.6 \text{ mm}.$$

Suponiendo que el ángulo de torsión gobierna el diseño, el diámetro se puede determinar con respecto a ello. Sin embargo, nótese que el ángulo de torsión debe estar expresado en radianes. Para hacer esto puede usarse la relación 2π rad = 360°. Así:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{\theta \text{ rad}}{3°}; \qquad \theta = \frac{(2\pi)(3)}{360°} = 0.0525 \text{ rad}.$$

$$\theta = \frac{TL}{JG}; \qquad J = \frac{TL}{G\theta} = \frac{(1\,400 \text{ N}\cdot\text{m})(2.5 \text{ m})}{(11 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(0.0525)}$$

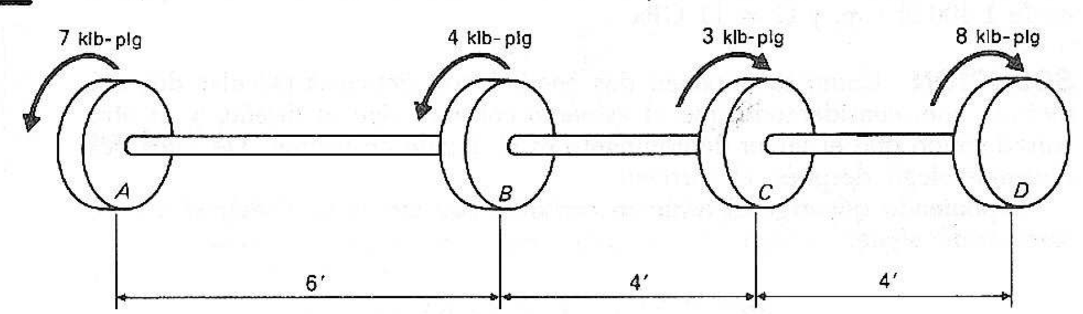
$$J_{\text{nec.}} = 606 \times 10^{-8} \text{ m}^4.$$

$$\frac{\pi D^4}{32} = 606 \times 10^{-8},$$

$$D = 0.0886 \text{ m} = 88.6 \text{ mm}.$$

El diámetro debe ser de por lo menos 88.6 mm y la **condición de que el ángulo** de torsión no debe exceder de 3° es la que rige.

Problema ilustrativo 3.2 Una flecha maciza de acero de 2 plg de diámetro está cargada como se muestra en la Fig. Determinar el ángulo de torsión de la polea D con respecto a la polea A.



SOLUCION Como se desea determinar la rotación de la polea D con respecto a la de la polea A, se puede considerar a la polea A como fija. Aunque hay otras soluciones aceptables para este problema, se resolverá calculando la rotación en cada segmento, y después combinándolas teniendo en cuenta su sentido.

Flecha AB:

El par interno es de 7 klb-plg, y la rotación ocurrirá en el sentido del par interno. Así:

$$\theta_{AB} = \frac{TL}{JG} = \frac{7(6 \times 12)}{(\pi/2)(12 \times 10^3)} = 0.0267 \text{ rad.}$$

Flecha BC:

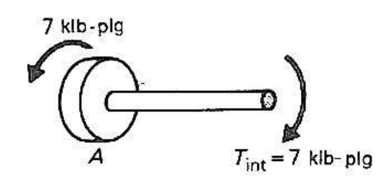
$$\theta_{BC} = \frac{TL}{JG} = \frac{(11)(4 \times 12)}{(\pi/2)(12 \times 10^3)} = 0.0280 \text{ rad.}$$

Flecha CD:

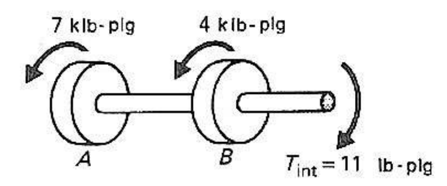
$$\theta_{CD} = \frac{TL}{JG} = \frac{8(4 \times 12)}{(\pi/2)(12 \times 10^3)} = 0.0204 \text{ rad.}$$

En este caso, se encuentra que todos los pares internos actúan en el mismo sentido; es decir, en el sentido de las manecillas del reloj, mirando desde D hacia A. Por consiguiente, el ángulo de torsión total vale:

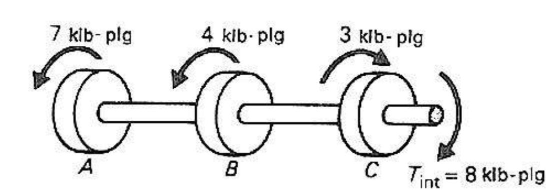
$$\theta_{AD} = \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{CD}$$
$$= 0.0267 + 0.0280 + 0.0204 = 0.0751 \text{ rad.}$$



Flecha *AB*.



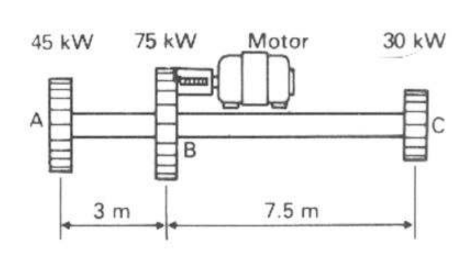
Flecha *BC*.



Flecha *CD*.

Problema ilustrativo 3.3

Un motor, mediante un conjunto de engranes, mueve un eje a 10 Hz, como se indica en la figura. El motor entrega 45 kW en A y 30 kW en C. Elegir una flecha maciza de sección circular del mismo diámetro a todo lo largo. El esfuerzo cortante admisible es de 40 MPa, y el ángulo de torsión admisible es de $\frac{1}{12}$ rad.



SOLUCION La solución de este problema involucra cuatro consideraciones. Los esfuerzos cortantes en la flecha AB y en el eje BC no deben exceder de 40 MPa, y el ángulo de torsión en estos dos ejes no debe exceder de $\frac{1}{12}$ rad. El primer paso consiste en determinar el par en los ejes AB y BC.

Flecha AB:

$$P = 2\pi Tf;$$

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{45\ 000}{2\pi(10)} = 716\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

Flecha BC:

$$P = 2\pi Tf;$$

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{30\ 000}{(2\pi)(10)} = 478\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

El siguiente paso es diseñar el eje sobre la base de la limitación del esfuerzo cortante. Como $\tau = Tc/J$, solamente debe diseñarse el eje AB para esta condición. El par en la flecha BC es menor que en la flecha AB, de modo que el esfuerzo cortante no regirá en la flecha BC. Por consiguiente:

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad \left(\frac{J}{c}\right)_{\text{nec.}} = \frac{T}{\tau},$$

$$\left(\frac{J}{c}\right)_{\text{nec.}} = \frac{716\ \text{N}\cdot\text{m}}{40\times 10^6\ \text{N/m}^2} = 17.9\times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi D^4/32}{D/2} = \pi D^3/16;$$

$$\pi D^3/16 = 17.9\times 10^{-6}$$

$$D = 0.045\ \text{m} = 45\ \text{mm}.$$

Finalmente, las flechas se diseñarán sobre la base de la limitación del ángulo de torsión. En este caso no es enteramente evidente cuál flecha rige el diseño, ya que aunque AB es más corta que BC, el par en AB es mayor que en BC. Para estar seguros, se diseñarán ambas flechas.

Flecha AB:

$$\theta = \frac{TL}{JG}; \qquad J = \frac{TL}{G\theta},$$

$$\frac{\pi D^4}{32} = \frac{(716)(3)}{(11\times 10^9)(\frac{1}{12})},$$

$$D = 0.070\ \text{m} = 70\ \text{mm}.$$

Flecha BC:

$$\frac{\pi D^4}{32} = \frac{(478)(7.5)}{(11 \times 10^9)(\frac{1}{12})},$$

$$D = 0.079 \text{ m} = 79 \text{ mm}.$$

La comparación de los tres diámetros calculados indica que el diámetro necesario para la flecha debe ser $D = 79$ mm. El ángulo de torsión en BC es el que gobierna el diseño.

Problemas

3.56 ¿Cuál debe ser el tamaño de un eje de acero que va a transmitir un par de 3 200 N · m, si el esfuerzo permisible es de 55 MPa y el ángulo de torsión no debe exceder de 4° en 3 m de la flecha?

3.57 Un eje hueco de acero se usa para transmitir un par de 5 500 N · m. Determinar las dimensiones necesarias. El diámetro interior debe ser igual a los dos tercios del diámetro exterior. El esfuerzo cortante permisible es de 70 MPa, y el ángulo de torsión no debe exceder de 4° en 3 m de la flecha.

3.58 Determinar la potencia máxima, en caballos, que puede ser transmitida mediante una flecha de 2 plg de diámetro que gira a 315 rpm. El esfuerzo cortante admisible es de 8 000 lb/plg^2.

3.59 Determinar el diámetro de una flecha maciza de acero que transmite 900 kW a 2 Hz. El esfuerzo cortante admisible es de 70 MPa.

3.60 Determinar el esfuerzo cortante máximo en la flecha de sección variable indicada en la Fig. P3.60. ¿Dónde ocurre este esfuerzo máximo?

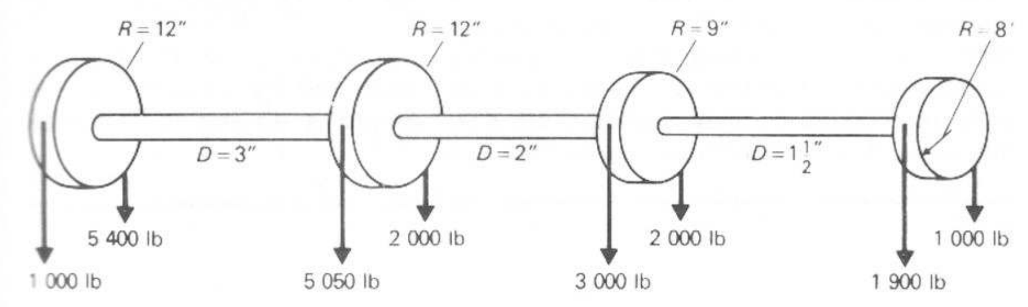


FIGURA P3.60

3.61 Diseñar una flecha de acero de 21 pies de longitud y de diámetro constante, para que transmita a los engranajes las fuerzas indicadas en la Fig. P3.61. El esfuerzo cortante admisible es de 10 000 lb/plg^2 y el ángulo de torsión admisible entre dos engranajes adyacentes cualesquiera es de 3°.

3.62 La flecha de sección variable está sometida a los pares $3T$ y T, como se indica en la Fig. P3.62. ¿Cuál es el valor de T, si el esfuerzo cortante admisible es de 80 MPa?

3.63 Una flecha maciza de acero de 100 mm de diámetro está cargada como se indica en la Fig. P3.63. Determinar el ángulo de torsión de la polea D con respecto a la polea. A. ¿Cuáles son los esfuerzos cortantes en las tres secciones de la flecha?

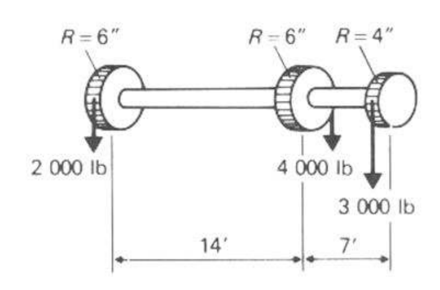


FIGURA P3.61

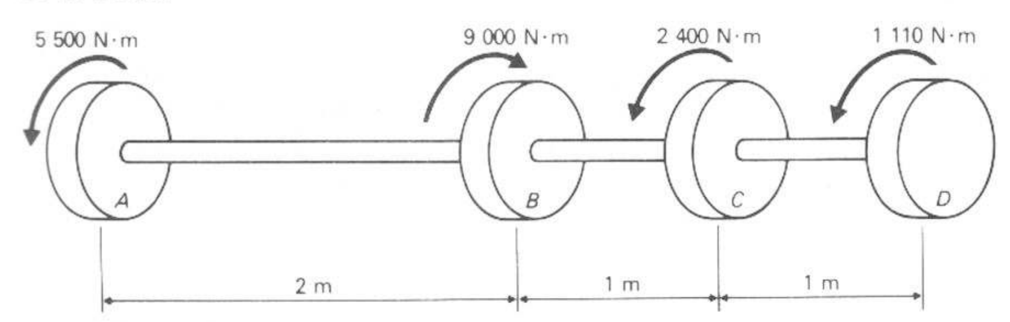


FIGURA P3.63

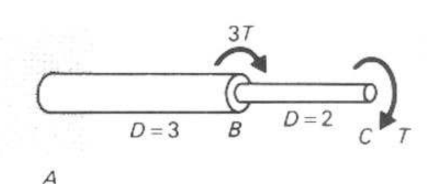


FIGURA P3.62

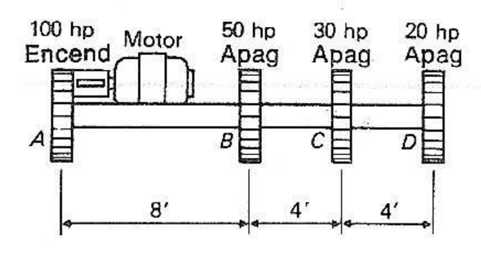


FIGURA P3.64

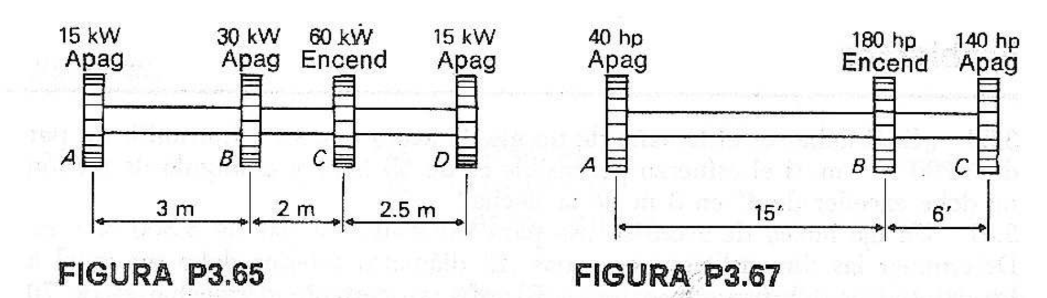


FIGURA P3.65

FIGURA P3.67

3.64 Un motor entrega 100 hp a un eje de 3 plg que gira a 210 rpm. Las poleas toman 50 hp, 30 hp, y 20 hp en *B*, *C*, y *D*, respectivamente. Determinar los esfuerzos cortantes en las tres flechas y el ángulo de torsión del extremo *D* con respecto a *A*, en la Fig. P3.64.

3.65 Un motor transmite 60 kW a una flecha en *C*, que gira a 10 Hz. Las máquinas en *A*, *B*, y *D*, (Fig. P3.65) toman 15 kW, 30 kW, y 15 kW, respectivamente. Diseñar la flecha. El esfuerzo cortante permisible es de 55 MPa.

3.66 Diseñar el eje descrito en el Prob. 3.65. La rotación angular relativa en cualquier sección de la flecha está limitada a 2°.

3.67 Un motor transmite 180 hp a la polea motriz *B*, en la Fig. P3.67. Suponiendo que en *A* se toman 40 hp y en *C* se toman 140 hp, diseñar la flecha para un esfuerzo cortante admisible de 8 000 lb/plg^2 y un ángulo de torsión admisible de 3°. La velocidad es de 630 rpm.

4

Diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes

4.1 Introducción

Cuando un miembro relativamente esbelto soporta cargas que están aplicadas perpendicularmente a su eje longitudinal el miembro se denomina *viga*. Cualquier miembro, ya sea una parte de una máquina, o una trabe en un puente o en un edificio, que se flexiona bajo la aplicación de las cargas, se llama viga. La Fig. 4.1 muestra ejemplos de varios tipos de vigas cargadas.

Las vigas pueden clasificarse de varias maneras. Una forma de clasificarlas consiste en agruparlas en vigas estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas. Se dice que una viga es estáticamente *determinada* si todas sus reacciones exteriores pueden calcularse usando solamente las ecuaciones de la estática ($\Sigma F_H = 0$, $\Sigma F_V = 0$, $\Sigma M = 0$); es decir, que se desconocen solamente tres componentes reactivas de sus apoyos. Se dice que una viga es estáticamente *indeterminada** si tiene *más* de tres componentes reactivas desconocidas en los apoyos. En la Fig. 4.1, las vigas (a), (b), (c) y (d) son estáticamente determinadas, mientras que la viga (e) tiene cinco componentes en las reacciones, resultando indeterminada. En este capítulo, solamente consideraremos vigas estáticamente determinadas.

Las vigas también pueden clasificarse de acuerdo con sus condiciones de apoyo, como sigue:

a) *Vigas simplemente apoyadas.* Las reacciones de la viga ocurren en sus extremos, como en las Figs. 4.1 (a) y (d).
b) *Vigas en voladizo.* Un extremo de la viga está fijo para impedir la rotación, como en la Fig. 4.1 (b). Este tipo de viga también se llama con un extremo empotrado, debido a la clase de apoyo.

* Las vigas estáticamente indeterminadas se analizan en el capítulo 8.

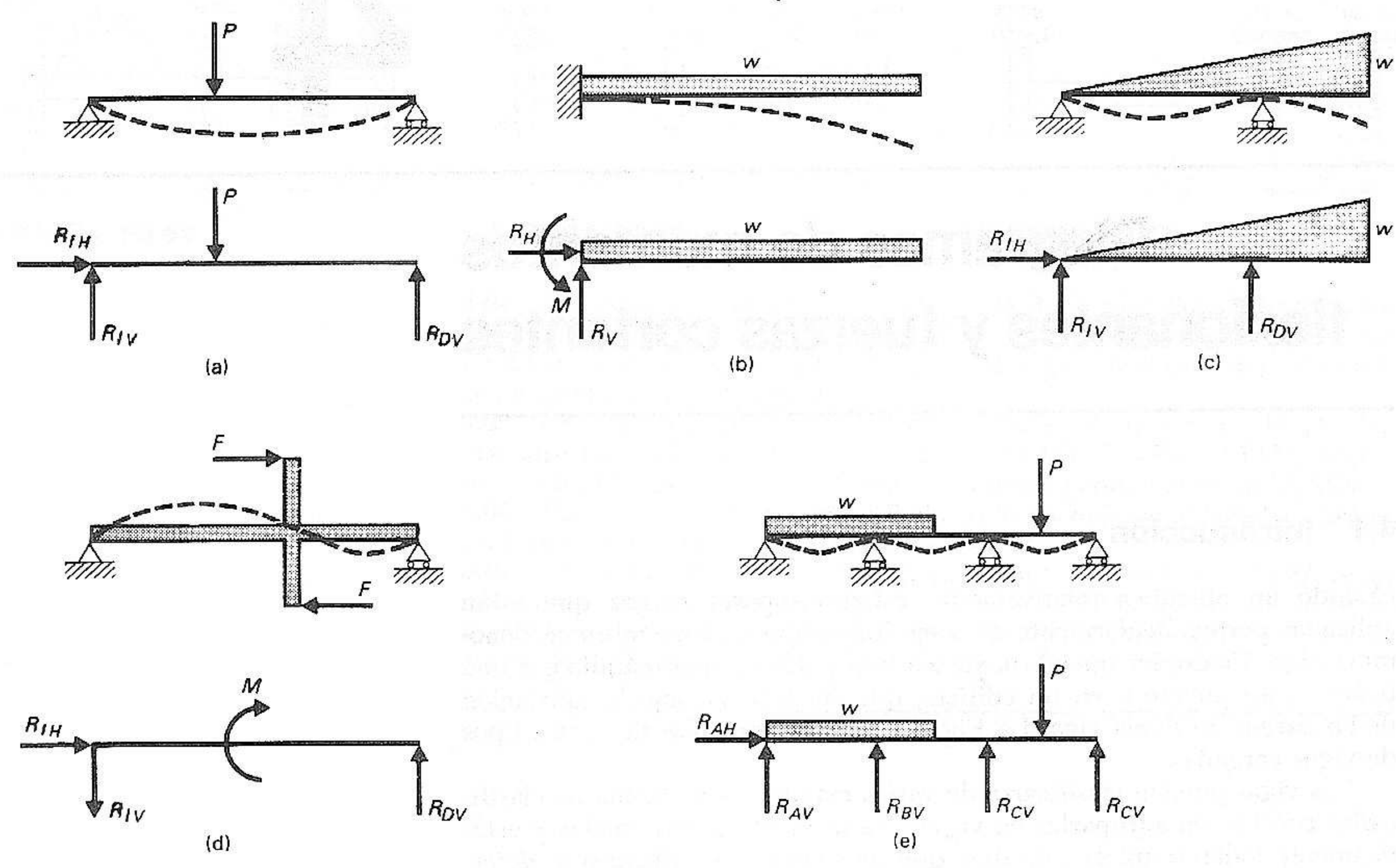


FIGURA 4.1

c) *Vigas con voladizo.* Uno o ambos extremos de la viga sobresalen de los apoyos, como en la Fig. (c).

d) *Vigas continuas.* Una viga estáticamente indeterminada que se extiende sobre tres o más apoyos, como en la Fig. 4.1 (e).

La carga consiste en las fuerzas aplicadas que actúan sobre la viga. Esta puede provenir del peso mismo de la viga (carga muerta) además de las otras fuerzas que deba soportar. Las cargas aplicadas a una viga pueden parecer bastante complicadas, pero hay solamente cinco tipos básicos de cargas aplicadas. Una viga puede soportar una cualquiera, o una combinación de estas cargas que son:

a) *Sin carga.* La misma viga se considera sin peso (o al menos muy pequeño comparado con las demás fuerzas que se apliquen), como en la Fig. 4.1 (a) y (d).

b) *Carga concentrada.* Una carga aplicada sobre un área relativamente pequeña (considerada aquí como concentrada en un punto), como en la Fig. 4.1 (a).

c) *Carga uniformemente distribuida.* La carga está igualmente distribuida sobre una porción de longitud de la viga, como en la Fig. 4.1 (b). La intensidad de la carga se expresa como el número

de libras por pie, o el número de newton por metro de longitud de carga. Por ejemplo, $w = 2$ klb/pie indicaría que cada pie de la porción cargada soporta 2 klb. En unidades del SI, $w = 5\,000$ N/m indica que cada metro de longitud soporta 5 000 N.

d) *Carga variable (generalmente distribuida).* La carga varía en intensidad de un lugar a otro. La Fig. 4.1 (c) muestra una carga variable distribuida uniformemente y que varía desde cero en el extremo izquierdo hasta un valor de w lb/pie o N/m en el extremo derecho.

e) *Par.* Esta es una torsión aplicada a una viga en alguna parte. La Fig. 4.1 (d) y el par de reacción de la Fig. 4.1 (b) son ejemplos de este tipo de carga.

El objeto principal del estudio de las vigas es la determinación de los esfuerzos internos y de las deflexiones causadas por las cargas aplicadas. Para calcular estas cantidades es necesario determinar los momentos flexionantes interiores y las fuerzas cortantes en una viga. En este capítulo se tratarán varios métodos y técnicas para calcular estos momentos y fuerzas cortantes. El método general del tratamiento que se usará se bosqueja a continuación.

1. Se definirá el momento flexionante y la fuerza cortante, y se darán los métodos básicos para su determinación.
2. Se construirán los diagramas de momentos flexionantes y de fuerzas cortantes utilizando principios básicos de la estática.
3. Se desarrollarán técnicas simplificadas para la construcción de estos diagramas (mediante el uso de métodos abreviados).
4. Se tratarán los casos especiales que con mayor frecuencia se encuentran en la práctica.

4.2 Fuerza cortante y momento flexionante

Una de las leyes fundamentales de estática dice que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier parte del cuerpo también está en equilibrio. Esta es la base de la solución de problemas de estática mediante el diagrama de "cuerpo libre".

Considérese la viga mostrada en la Fig. 4.2. Se puede cortar esta viga en cualquier sección, tal como la *a-a*, y trazar un diagrama de cuerpo libre de cualquier parte. El equilibrio se conserva sobre el cuerpo libre por medio de las fuerzas de la viga que actúan en la sección cortada. El diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda se muestra en la Fig. 4.2 (b). Ya que la fuerza externa R_I actúa verticalmente hacia arriba y $\Sigma F_V = 0$, debe haber una fuerza vertical que actúa sobre la cara del corte. Esta fuerza vertical V se llama el *cortante vertical,* o simplemente el *cortante,* en la viga. En el caso particular de la Fig. 4.2 (b), $V = R_I$, y estas fuerzas forman un par que tiende a hacer girar al cuerpo libre en el sentido de las manecillas del reloj. Como $\Sigma M = 0$, sobre el cuerpo libre y en la sección del corte debe actuar un par de sentido contrario

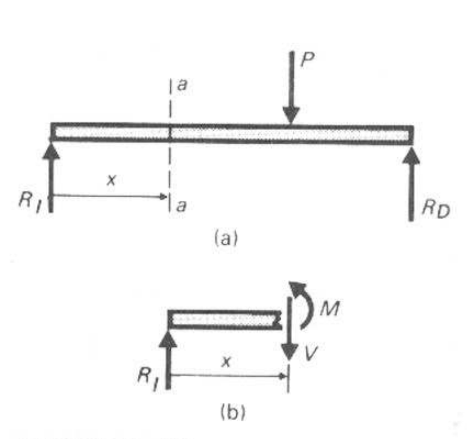
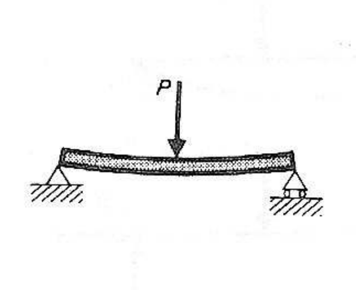


FIGURA 4.2



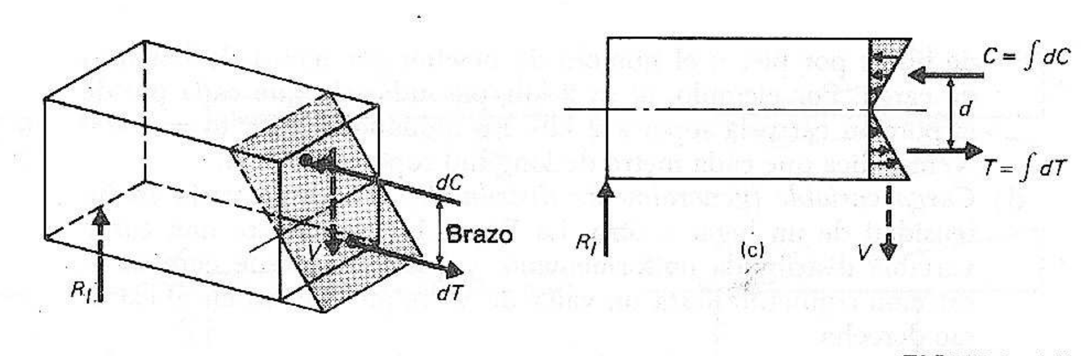


FIGURA 4.3

al de las manecillas del reloj, y de la misma magnitud. Este par se llama el *momento flexionante interno*, o simplemente el *momento*, en la viga.

Consideremos este momento interno con mayor detalle. La fuerza aplicada P hace que la viga se flexione, como se indica en la Fig. 4.3 (a). Suponemos que la viga está compuesta de un número infinito de pequeñas fibras longitudinales. La flexión de la viga tiende a acortar las fibras cercanas a la parte superior de la viga y a alargar las cercanas a la parte inferior. La deformación de las fibras está asociada a su esfuerzo correspondiente debido a la Ley de Hooke. El esfuerzo multiplicado por el área sobre la cual actúa define la fuerza axial correspondiente.

Un par es la resistencia rotacional de dos fuerzas, de igual magnitud, de sentidos contrarios, y actuando a cierta distancia de separación. El momento interno en una viga es la acción colectiva de muchos pares, producido cada uno por las fuerzas de tensión y de compresión en las fibras de la viga. La Fig. 4.3 (b) ilustra la acción de un par de fibras, y la Fig. 4.3 (c) indica las fuerzas resultantes de tensión y de compresión que forman el momento total interno.

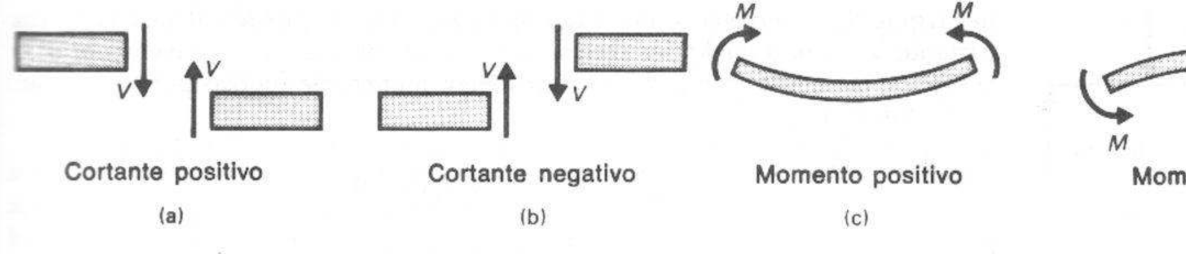
4.3 Diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes

Un diagrama de fuerzas cortantes o un diagrama de momentos flexionantes es una gráfica que muestra la magnitud de la fuerza cortante o del momento flexionante a lo largo de la viga. Hay varios métodos mediante los cuales se pueden trazar estas gráficas. Primeramente se tratará el enfoque básico de la estática. Este procedimiento consiste en cortar la viga en varias secciones, calcular V y M en cada uno de esos lugares, y trazar una gráfica de estos valores contra la longitud de la viga.

Este método es más laborioso que el procedimiento simplificado que se presentará posteriormente. Sin embargo, es muy importante conocer este procedimiento ya que es la base para encontrar las relaciones entre la carga, la fuerza *cortante*, y el momento flexionante.

4.4 Convención de signos

La Fig. 4.4 ilustra la conv ción de signos que se usa comúnmente al trazar los valores positivos y negativos sobre las gráficas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



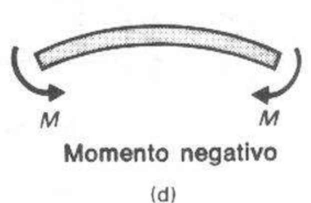


FIGURA 4.4

Si se corta una viga en una sección y se permite el movimiento solamente en la dirección vertical, la fuerza cortante es positiva si la sección de la izquierda tiende a moverse hacia arriba con respecto a la sección de la derecha. Por ejemplo, consideremos la viga mostrada en la Fig. 4.5 (a). Si se cortara la viga en la sección *a-a*, la sección de la izquierda trataría de moverse hacia arriba con respecto a la sección de la derecha. Por definición, se considera que en esta sección hay una fuerza cortante positiva. En la sección *b-b* ocurre justamente lo contrario, y la fuerza cortante se considera, por definición, negativa.

La convención de signos para el momento flexionante estipula que el momento es positivo cuando las fibras superiores están en compresión. La Fig. 4.5 (a) ilustra un momento positivo, y la Fig. 4.5 (b) ilustra un momento negativo.

Estas convenciones de signos para la fuerza cortante y el momento flexionante son necesarias para trazar correctamente los diagramas. En la mayoría de los problemas el signo adecuado no es fácilmente discernible. Por consiguiente, se desarrollarán reglas simples para la construcción adecuada de los diagramas. Generalmente es más fácil recordar la definición correcta del momento positivo y el negativo que la de la fuerza cortante positiva y negativa. Por lo tanto se presenta en la sección siguiente, una técnica simple que permitirá determinar fácilmente el signo de la fuerza cortante.

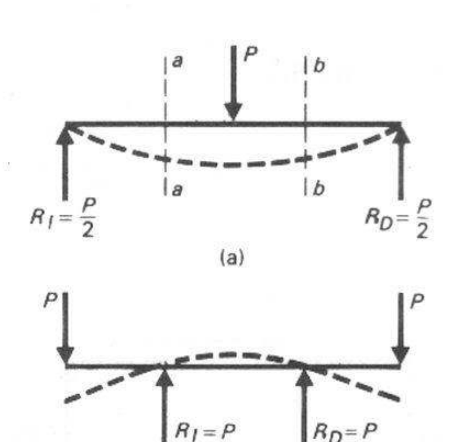


FIGURA 4.5

4.5 Construcción de diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes

El procedimiento general para la construcción de diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes se ilustra mediante los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4.1 Dibujar el diagrama de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes de la viga mostrada en la Fig. 4.6. Despreciar el peso de la viga.

SOLUCION Por la estática, las reacciones de la viga pueden determinarse como $R_I = 6$ klb y $R_D = 4$ klb.

Diagrama de fuerzas cortantes. Se corta la viga en una sección *a-a* entre R_I y P, a una distancia x_1 de R_I. Los diagramas de cuerpo libre de las seccio-

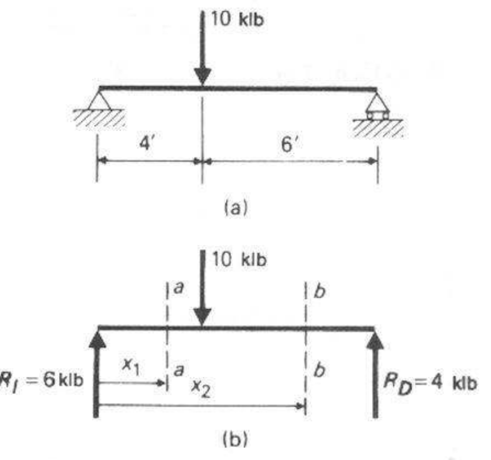


FIGURA 4.6

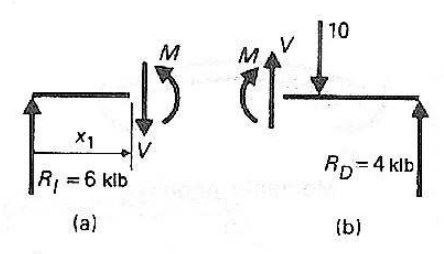


FIGURA 4.7

nes izquierda y derecha se muestran en la Fig. 4.7. Se puede calcular la fuerza cortante V usando cualquier sección de la viga, pero es más conveniente usar la sección izquierda ya que ve que hay menor número de fuerzas por considerar.

Según la Fig. 4.7 (a).

$$\sum F_V = 0: \qquad V = R_I = 6.$$

Por consiguiente, a cualquier distancia de R_I hasta $x_1 = 4$ pies, la fuerza cortante es de 6 klb. De acuerdo con la convención de signos de la sección 4.4, la fuerza cortante en esta sección es positiva.

Para una distancia entre 4 pies y 10 pies, la viga debe cortarse en una sección *b-b*, a una distancia x_2 de R_I. Podría considerarse cualquier sección, pero otra vez se usará la sección izquierda mostrada en la Fig. 4.8. Ya que V y M son los valores desconocidos (que se van a determinar), puede suponerse que actúan en cualquier dirección. Si se comete un error en el sentido supuesto de cualquiera de estas cantidades, se evidenciará mediante el signo menos que aparece en la respuesta. En este caso, es obvio que V se escogió en la dirección incorrecta, pero la razón para esto se ilustrará más claramente a continuación.

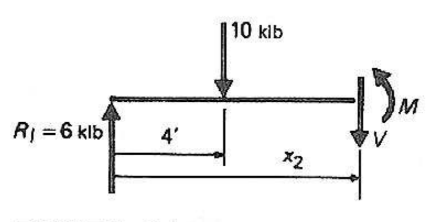


FIGURA 4.8

Refiriéndose a la Fig. 4.8, se puede calcular la fuerza cortante interna como:

$$\sum F_V = 0: \qquad V + 10 - 6 = 0,$$

$$V = -4.$$

El signo menos indica que se escogió incorrectamente el sentido para V; V realmente actúa hacia arriba, y por tanto la sección izquierda tiende a moverse hacia abajo con respecto a la sección derecha. De acuerdo con el convenio de la sección 4.4 esta situación coincide con la definición de fuerza cortante negativa. Por consiguiente, se cumplirá automáticamente la convención adecuada de los signos de la fuerza cortante, si dicha fuerza cortante se traza en el diagrama de cuerpo libre, siempre con sentido positivo (es decir, hacia abajo sobre la sección izquierda y hacia arriba sobre la sección derecha, como en la Fig. 4.7). Un signo algebraico negativo indicará entonces una fuerza cortante negativa.

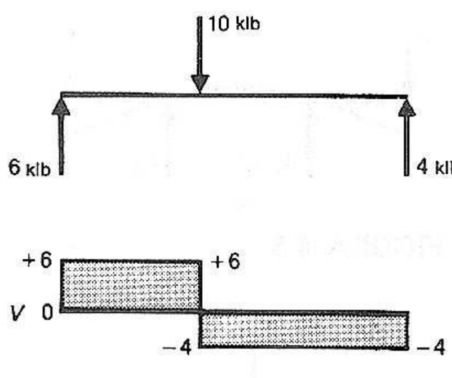


FIGURA 4.9

A continuación se muestra una tabla con distancias en pies a partir de R_I y las fuerzas cortantes V correspondientes. Como el diagrama de fuerzas cortantes es una gráfica de V contra la distancia correspondiente en la viga, esta tabla da los puntos que se trazaron en el diagrama de fuerzas cortantes (Fig. 4.9).

Distancia a partir de R_I, pies	0^-	0^+	1	2	3	4^-	4^+	5	6	7	8	9	10^-	10^+
Fuerza cortante V	0	6	6	6	6	6	−4	−4	−4	−4	−4	−4	−4	0

Diagrama de momentos. El procedimiento para trazar el diagrama de momentos es semejante al que se discutió anteriormente. Como se requieren los valores de los momentos, éstos deben calcularse en varios puntos a lo largo de la viga. Para obtener una expresión para el momento entre 0 pies y 4 pies, se corta otra vez la viga en la sección *a-a*, y se toman momentos con respecto al corte (véase la Fig. 4.7a).

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M - 6x_1 = 0,$$

$$M = 6x_1, \qquad 0 < x_1 < 4 \text{ pies}$$

Para calcular M, podemos tomar momentos con respecto a cualquier punto sobre el cuerpo libre. Sin embargo, para simplificar el procedimiento, y para asegurarse de que cualquier posible error en el cálculo de V no se transmite a los otros cálculos, es buena práctica tomar momentos siempre con respecto al punto donde se corta la viga. De esta manera, el brazo de palanca de V es cero, y no entra en los cálculos.

Para calcular los momentos correspondientes al segmento de viga comprendido entre 4 pies y 10 pies, la viga se corta en la sección *b-b* (Fig. 4.8), y se toman momentos con respecto al corte.

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M + 10(x_2 - 4) - 6x_2 = 0,$$

$$M = 6x_2 - 10(x_2 - 4); \qquad 4 \text{ pies} < x_2 < 10 \text{ pies}$$

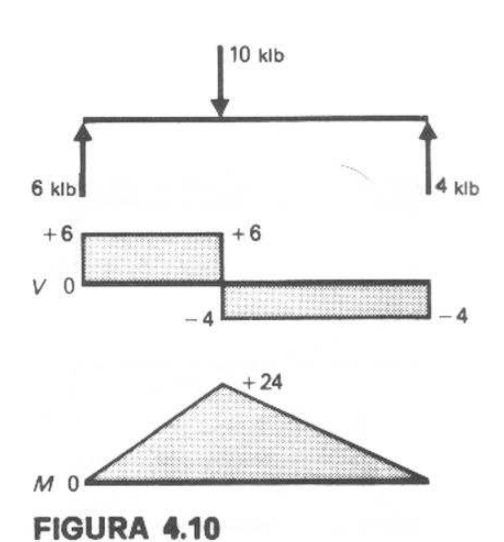


FIGURA 4.10

Usando las expresiones que se han deducido para los momentos correspondientes a las distancias x_1 y x_2, podemos preparar una tabla de momentos contra distancias a lo largo de la viga. Con estos valores se obtiene el diagrama de momentos de la Fig. 4.10. Como las fibras superiores están en compresión a lo largo de toda la longitud de la viga, todos los momentos son positivos.

Distancia a partir de R_I, pies	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Momento M	0	6	12	18	24	20	16	12	8	4	0

En este ejemplo solamente se usaron las secciones izquierdas de la viga en los diagramas de cuerpo libre. Sin embargo, podía haberse usado cualquier lado y se obtendrían los mismos resultados. Algunas veces es más conveniente usar la sección derecha. Sin embargo, para obtener los signos algebraicos adecuados, debe tenerse cuidado en mostrar a V y M en el sentido positivo. ■

EJEMPLO 4.2 Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos de la viga mostrada en la Fig. 4.11.

SOLUCION En este caso, si se corta la viga en la sección *a-a*, el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda (Fig. 4.11c) será típico para cualquier sección de la viga.

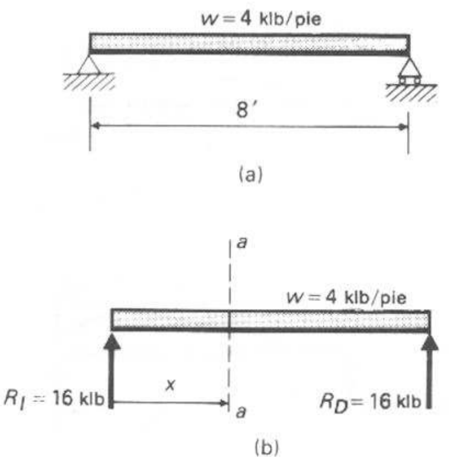


Diagrama de fuerzas cortantes. La fuerza cortante en la viga se obtiene efectuando la suma de las fuerzas verticales sobre el cuerpo libre. Así,

$$\sum F_V = 0: \qquad V + 4x - 16 = 0,$$

$$V = 16 - 4x.$$

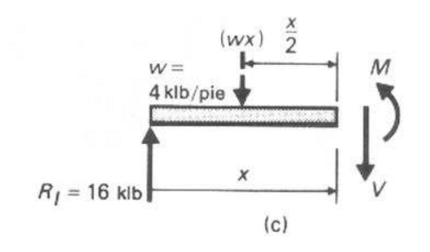


FIGURA 4.11

A continuación se muestra una tabla con las distancias x medidas a partir de R_I y las fuerzas cortantes correspondientes. El diagrama de fuerzas cortantes correspondientes se muestra en la Fig. 4.12.

Distancia a partir de R_I, pies	0^-	0^+	1	2	3	4	5	6	7	8^-	8^+
Fuerza cortante V	0	16	12	8	4	0	−4	−8	−12	−16	0

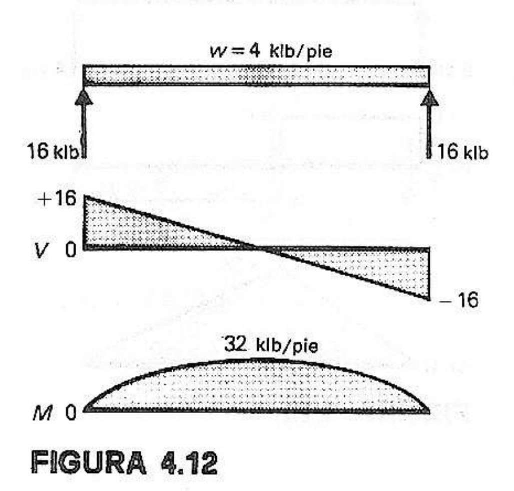


FIGURA 4.12

Diagrama de momentos. El momento en la sección *a-a* se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas con respecto al corte en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 4.11 (c). La fuerza resultante de la carga distribuida es wx y se supone actuando en el centro de gravedad de la porción cargada, que está a $x/2$ pies a partir del corte. Así,

$$\sum M_{corte} = 0: \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) - (R_I)(x) = 0,$$

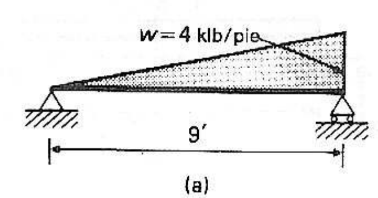
$$M = R_I x - \frac{wx^2}{2} = 16x - 2x^2.$$

A continuación se muestra una tabla con los valores de los momentos flexionantes correspondientes a las distancias x medidas a partir de R_I. El diagrama de momentos correspondiente al trazo de estos valores se muestra en la Fig. 4.12.

Distancia a partir de R_I, pies	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Momento M	0	14	24	30	32	30	24	14	0

■

EJEMPLO 4.3 Dibujar el diagrama de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes para la viga mostrada en la Fig. 4.13.



SOLUCION Este problema es similar al ejemplo 4.2 en que un diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda, en la sección *a-a* es típico para toda la viga. La solución será esencialmente la misma que la del ejemplo 4.2. La principal diferencia es que la carga varía a lo largo del claro. La magnitud de la carga en cualquier posición x puede obtenerse a partir de los triángulos semejantes de la Fig. 4.13 (b):

$$\frac{w}{L} = \frac{w'}{x}, \qquad w' = w\,\frac{x}{L}, \qquad w' = \tfrac{4}{9}x.$$

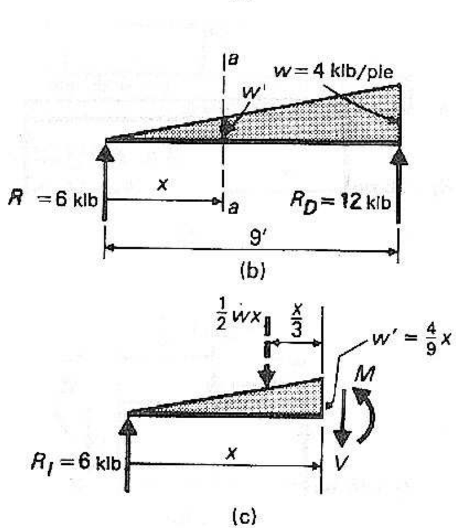


FIGURA 4.13

Diagrama de fuerzas cortantes. Una expresión para la fuerza cortante en cualquier sección *a-a* en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 4.13 (c) queda determinada por:

$$\sum F_V = 0: \qquad V - R_L + \tfrac{1}{2}w'x = 0,$$

$$V = 6 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{9}x)(x) = 6 - \tfrac{2}{9}x^2.$$

Los valores de la fuerza cortante en cualquier punto x pueden determinarse entonces, como se muestra en la tabla que sigue. El diagrama de fuerzas cortantes se muestra en la Fig. 4.14.

Distancia a partir de R_I pies	Fuerza cortante V	Distancia a partir de R_I pies	Fuerza cortante V
0^-	0	5	−0.44
0^+	6	6	−2.00
1	5.78	7	−4.90
2	5.11	8	−8.24
3	4.00	9^-	−12.00
4	2.44	9^+	0

Diagrama de momentos. El diagrama de momentos se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas sobre el cuerpo libre de la Fig. 4.13 (c), con respecto al corte. La fuerza resultante de la carga distribuida es $\frac{1}{2}w'x$, y está concentrada en el centro de gravedad de la carga distribuida, que está a $\frac{1}{3}x$ a partir del corte:

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M - R_I x + (\tfrac{1}{2}w'x)(\tfrac{1}{3}x) = 0,$$

$$M = 6x - \tfrac{1}{6}(\tfrac{4}{9}x)(x)(x) = 6x - \tfrac{2}{27}x^3.$$

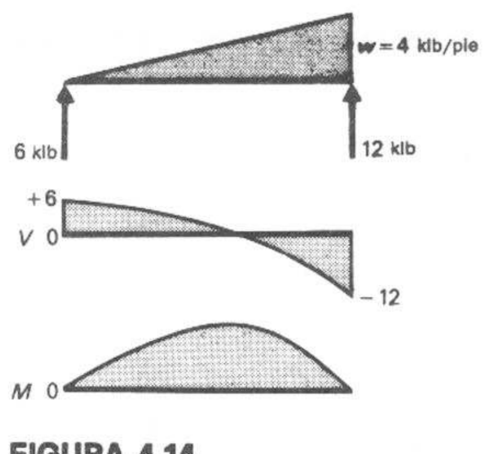


FIGURA 4.14

A continuación se muestra una tabla con las distancias x a partir de R_I y los momentos correspondientes. El diagrama de momentos correspondiente a estos valores se muestra en la Fig. 4.14.

Distancia a partir de R_I, pies	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Momento M	0	6.9	11.4	16.0	19.3	20.8	20.0	16.6	10.0	0

■

Se han trazado diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para cada tipo de carga que puede aplicarse a una viga (excepto pares, que se tratan en la sección 4.10). Generalmente a una viga se aplica una combinación de dos o más de esas cargas, como es el caso del Problema Ilustrativo 4.1. Cuando esto sucede, los pasos para la construcción de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes son:

1. Calcúlense las reacciones por estática.
2. Trácese un diagrama de cuerpo libre de toda la viga dejando suficiente espacio directamente debajo de él, para dibujar los diagramas de fuerzas cortantes, y momentos flexionantes.

3. Córtese la viga en cualquier sección donde exista un tipo diferente de carga y trácese un diagrama de cuerpo libre de las secciones correspondientes.
4. Se escriben las ecuaciones para, la fuerza cortante y el momento flexionante a partir de los diagramas de cuerpo libre y se trazan estas ecuaciones sobre los diagramas correspondientes de V o M.

En el problema ilustrativo 4.1 se usan estos pasos en la construccción de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Aunque este procedimiento es relativamente lento, se considera que un conocimiento más profundo en estática básica hará que los métodos más eficaces para construir estos diagramas (que se explicarán posteriormente) se comprendan mejor. Además, la destreza en escribir las ecuaciones estáticas para los momentos internos es necesaria en ciertas técnicas usadas para determinar las deflexiones de las vigas.

Problema ilustrativo 4.1

Trazar el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para la viga mostrada. Suponga que la viga no tiene peso.

SOLUCION Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga, dejando espacio debajo, suficiente para los diagramas de V y M (los cuales se dibujan completamente en este caso).

Se calculan las reacciones R_A y R_D:

$$\sum M_A = 0: \quad R_D(12) - 13(4) - 2(10)(13) = 0,$$
$$R_D = 26 \text{ klb}$$
$$\sum M_D = 0: \quad R_A(12) - 13(8) + 2(10)(1) = 0,$$
$$R_A = 7 \text{ klb}$$

Verificación

$$\sum F_Y = 0: \quad R_A + R_D = 13 + 2(10),$$
$$7 + 26 = 13 + 20,$$
$$33 = 33.$$

Se traza un diagrama de cuerpo libre de una sección en AB y se establecen las ecuaciones para V y M:

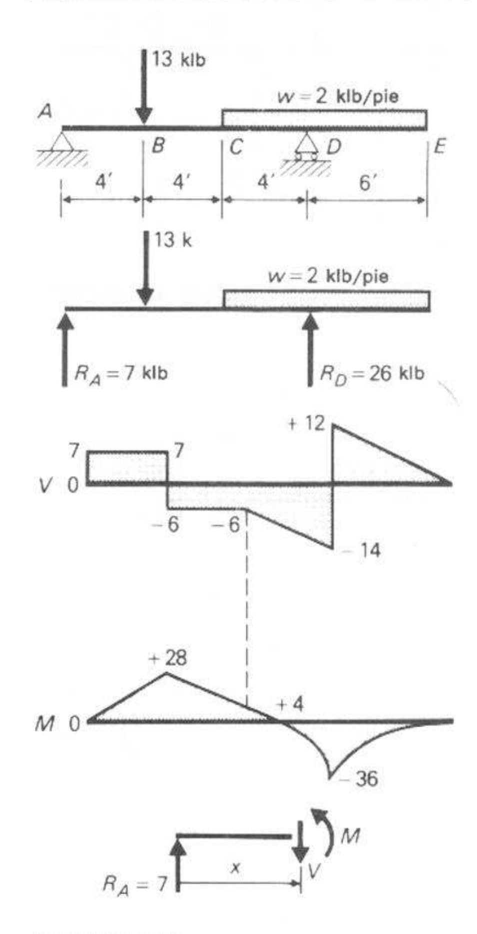
$$\sum F_Y = 0: \quad V - 7 = 0,$$
$$V = +7 \text{ klb}$$
$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \quad M - 7x = 0,$$
$$M = 7x; \quad 0 < x < 4 \text{ pies}$$

Se traza un diagrama de cuerpo libre de una sección en BC y se establecen las ecuaciones para V y M:

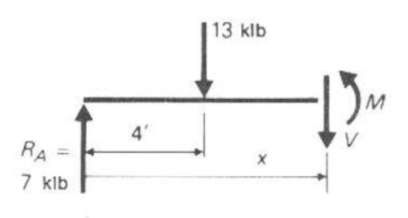
$$\sum F_Y = 0: \quad V + 13 - 7 = 0,$$
$$V = -6 \text{ klb}$$
$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \quad M - 7x + 13(x - 4) = 0,$$
$$M = 52 - 6x; \quad 4 \text{ pies} < x < 8 \text{ pies}$$

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de una sección en CD y se establecen las ecuaciones para V y M. En este caso, es más conveniente elegir el punto C como el origen de coordenadas, pues se evitan algunos pasos algebraicos. Esto es correcto, pero se debe tener cuidado cuando se construya el diagrama. Así,

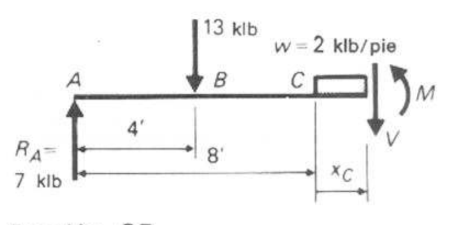
$$\sum F_Y = 0: \quad V + 2x_C + 13 - 7 = 0,$$
$$V = -2x_C - 6; \quad 0 \text{ pies} < x_C < 4 \text{ pies}$$
$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \quad M + 2x_C\left(\frac{x_C}{2}\right) + 13(x_C + 4) - 7(x_C + 8) = 0,$$
$$M = -x_C^2 - 13x_C - 52 + 7x_C + 56$$
$$= -x_C^2 - 6x_C + 4; \quad 0 \text{ pies} < x_C < 4 \text{ pies}.$$



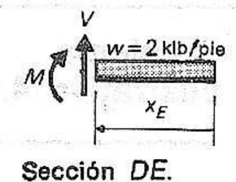
Sección AB.



Sección BC.



Sección CD.



Sección *DE*.

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre en *DE* y se establecen las ecuaciones para *V* y *M*. En este caso, es más conveniente tomar a *E* como origen y considerar la sección derecha de la viga:

$$\sum F_Y = 0: \qquad V - wx_E = 0,$$

$$V = wx_E = 2x_E; \quad 0 \text{ pie} < x_E < 6 \text{ pies}.$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M + wx_E\left(\frac{x_E}{2}\right) = 0,$$

$$M = -2x_E\left(\frac{x_E}{2}\right) = -x_E^2; \quad 0 \text{ pie} < x_E < 6 \text{ pies}.$$

Con estas ecuaciones básicas, podemos determinar suficientes puntos para trazar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes dibujados en la página anterior. A continuación se da una tabla con los valores de la fuerza cortante y el momento flexionante en distintos sitios a lo largo de la viga. Aunque en estos ejemplos se han tabulado los valores en diversos puntos a lo largo de la viga, esto no siempre es necesario o deseable. El propósito ha sido el dar al lector algunos medios de verificar resultados y valores.

Nótese que las distancias mostradas en la tabla pueden no corresponder a los mismos valores de *x* que aparecen en los cálculos anteriores, ya que se revisaron para hacer más fácil su tabulación.

Distancia a partir de R_I, pies	0^+	2	4^-	4^+	6	8^-	8^+	10	12^-	12^+	14	16	18^-
Fuerza cortante *V*	+7	+7	+7	−6	−6	−6	−6	−10	−14	+12	+8	+4	0
Momento *M*	0	+14	+28	+28	+16	+4	+4	−12	−36	−36	−16	−4	0

Problemas

En estos problemas, como en los demás de este capítulo, considérese que la viga no tiene peso, a menos que expresamente se diga lo contrario.

4.1-4.6 Calcular el valor de la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *a*, *b* y *c* en las Figs. P4.1 a P4.6.

4.7-4.10 Dibujar diagramas de cuerpo libre completos y establecer las ecuaciones algebraicas para la fuerza cortante y el momento flexionante de los puntos *a* hacia *b* y *b* hacia *c* en las Figs. P4.7 a P4.10. Indicar claramente el origen de la variable *x* sobre el diagrama de cuerpo libre.

4.11-4.16 Dibujar los diagramas de *V* y *M* para las vigas mostradas en las Figs. P4.1 a P4.6.

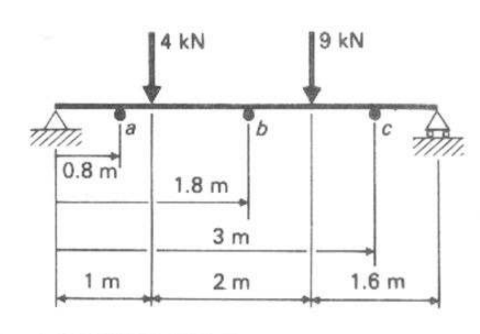


FIGURA P4.1

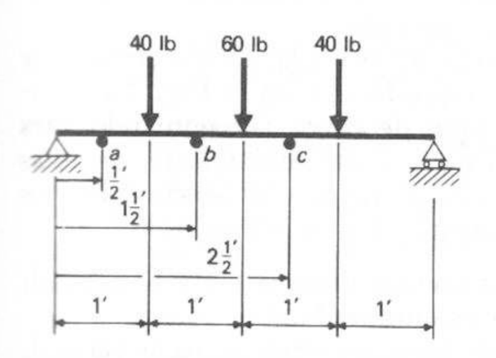


FIGURA P4.2

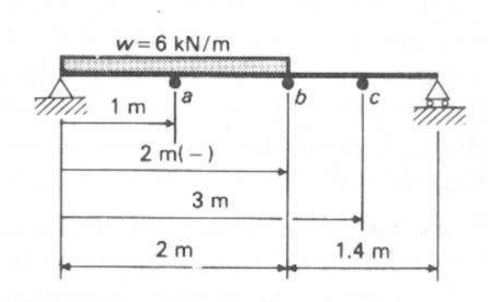


FIGURA P4.3

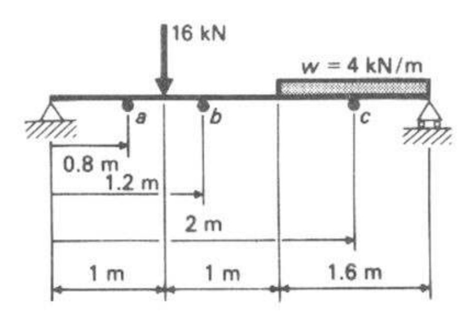


FIGURA P4.4

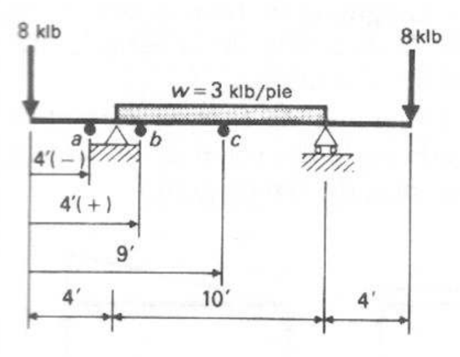


FIGURA P4.5

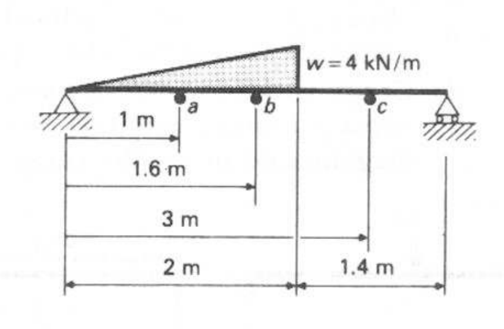


FIGURA P4.6

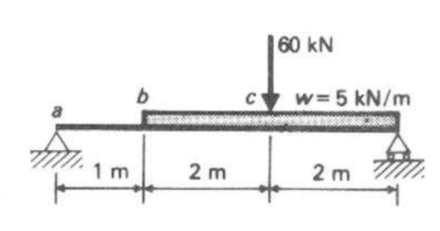


FIGURA P4.7

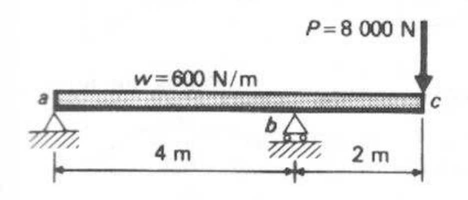


FIGURA P4.8

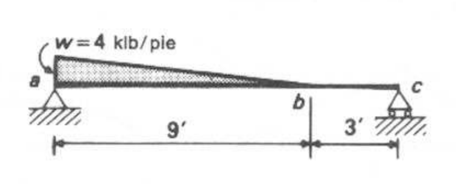


FIGURA P4.9

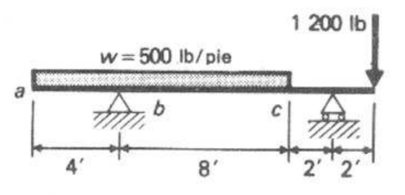


FIGURA P4.10

4.6 Diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes: relaciones importantes

El método para dibujar diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes discutido en la sección 4.5 es demasiado engorroso en la práctica real, aunque estos métodos básicos de estática (cuerpo libre) se usan frecuentemente para calcular la fuerza cortante y/o el momento flexionante en un punto particular. Generalmente sólo interesa la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo en una viga, y la forma general de los diagramas.

Los ejemplos de la sección 4.5 dan la base para dibujar la forma general de estos diagramas. Se pueden trazar más rápidamente estos diagramas cuando se conoce la forma general de la curva para casos particulares de carga. También resultan de utilidad algunas observaciones adicionales discutidas en la sección siguiente.

Obsérvense nuevamente los diagramas de la carga, fuerza cortante, y momento de los ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3 reproducidos en la Fig. 4.15. Esta figura muestra los cuatro posibles tipos de carga (exceptuando, otra vez, los pares) Cualquier viga tendrá unas o una combinación de estas cargas. Considérese cada uno de los tipos de carga y su efecto sobre los diagramas de fuerzas cortantes y momentos. Las relaciones son:

a) *Sin carga.* Diagrama de fuerzas cortantes: línea recta horizontal; diagrama de momentos: línea recta inclinada.
b) *Carga concentrada.* Diagrama de fuerzas cortantes: recta vertical; diagrama de momentos flexionantes un quiebre en el punto de aplicación de la carga.
c) *Carga uniformemente distribuida.* Diagrama de fuerzas cortantes: línea recta inclinada (inclinada en la dirección de la carga); diagrama de momentos: curva parabólica continua.
d) *Carga variando uniformemente.* Diagrama de fuerzas cortantes: curva parabólica continua (inclinada en la dirección de la carga); diagrama de momentos-curva continua de tercer grado.

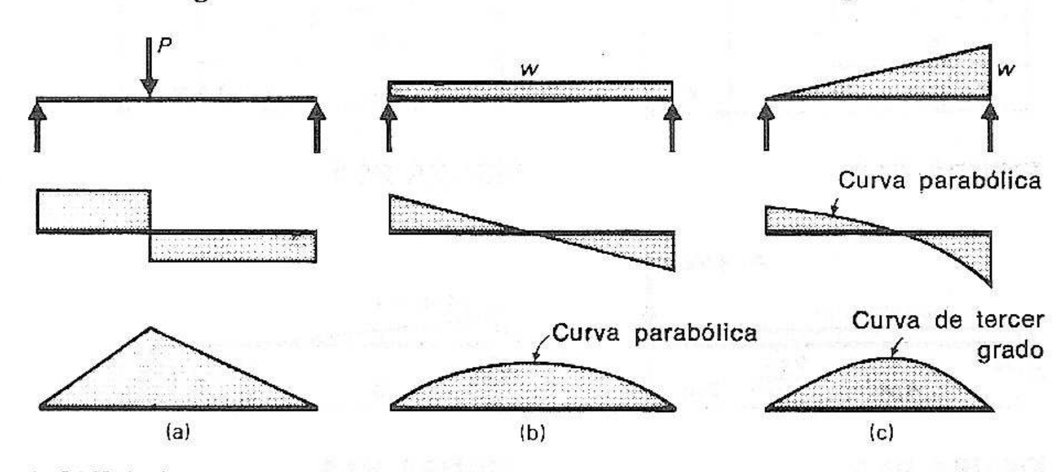


FIGURA 4.15

Estas figuras básicas dan una indicación de las formas generales de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para cualquier combinación de cargas. Entonces, el problema principal es el de calcular valores significativos de la fuerza cortante y el momento flexionante.

En la sección siguiente se explica mediante varios ejemplos un procedimiento más detallado para trazar los diagramas.

4.7 Procedimientos para trazar diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes

Como siempre interesa conocer el valor del momento flexionante máximo en una viga, la siguiente regla importante nos permitirá determinar su localización fácilmente.

La localización del punto de máximo momento corresponde siempre a la posición donde la curva de la fuerza cortante corta al eje de la viga.

Cada vez que el diagrama de fuerzas cortantes pasa a través del valor cero, el diagrama de momentos tendrá un valor máximo. Por momento máximo queremos significar que el valor del momento a cualquier lado de ese punto es numéricamente menor que el momento en esa sección. Sin embargo, el momento puede no ser el momento máximo absoluto para la viga si hay varios momentos máximos. El Problema Ilustrativo 4.1 muestra dos puntos de momento máximo.

A continuación se bosqueja el procedimiento general para trazar diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

1. Dibuje la viga y sus cargas, dejando suficiente espacio debajo de ella para trazar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.
2. Calcule por estática las reacciones.
3. Considere el valor y dirección de la fuerza más alejada hacia la izquierda. No importa si es una reacción o una carga aplicada.
4. Dibuje la magnitud y dirección de esta fuerza en $L = 0$, sobre el diagrama de fuerzas cortantes.
5. Continúe a partir de este punto y trace las pendientes generales del diagrama de fuerzas cortantes, calculando los valores de la fuerza cortante en cada uno de los puntos donde cambia la carga. Debe notarse que si sobre la curva de la fuerza cortante, hay una carga concentrada de 10 klb, la longitud de la recta vertical es 10 klb. Si hay una carga uniformemente distribuida de 2 klb/pie, la pendiente del diagrama de fuerzas cortantes es 2 klb/pie, etc. Si la fuerza cortante inicial es positiva, el diagrama de momentos se inclinará inicialmente hacia arriba y a la derecha; si es negativa, el diagrama de momentos se inclinará inicialmente hacia abajo y a la derecha. La forma de la curva depende de la carga, como se explicó en la sección 4.6.

6. Después de que se ha completado el diagrama de fuerzas cortantes, se dibuja el diagrama de momentos. Si no hay un par en el extremo izquierdo, el diagrama de momentos comenzará en cero. A partir de este punto puede esbozarse la forma de los segmentos del diagrama de momentos, dependiendo del tipo de carga aplicada a la viga. En las secciones donde la fuerza cortante es positiva, el diagrama de momentos tendrá una pendiente positiva (es decir, hacia arriba y a la derecha); si la fuerza cortante es negativa, la pendiente del diagrama de fuerzas cortantes es negativa. Nótese que cada vez que el diagrama de momentos pasa por cero, el diagrama de momentos tendrá un máximo.
7. Calcule los valores del momento máximo mediante el método del cuerpo libre o el procedimiento que se discute en la sección 4.9.

Para aclarar este procedimiento, se ha resuelto un problema con una explicación detallada de los pasos requeridos. También se incluyen ejemplos adicionales que aclaran más las relaciones entre la carga, la fuerza cortante, y el momento flexionante.

Los diagramas del ejemplo a continuación se han trazado de acuerdo con el procedimiento anterior. Nótese especialmente la forma de las curvas y el efecto de las cargas sobre ellas. Un estudio de los ejemplos también conducirá a las siguientes observaciones:

a) Los valores en el diagrama de fuerzas cortantes cambian para cada valor de la carga, y el cambio es la magnitud de la carga.
b) La pendiente del diagrama de momentos es máxima para el valor mayor de la fuerza cortante. Esto es particularmente evidente en el caso de una carga uniformemente distribuida (ejemplo 4.2, sección 4.5). Cuando la fuerza cortante es mayor, la pendiente de la curva del momento es más inclinada; a medida que la fuerza cortante se aproxima a cero, la pendiente del diagrama de momentos se aproxima a cero (horizontal).
c) Una fuerza cortante negativa indica que la curva del momento está inclinada hacia abajo y a la derecha; no significa que necesariamente el momento sea negativo.
d) Cuando se sobreponen cargas concentradas sobre una carga distribuida, los quiebres del diagrama de momento no son tan marcados.

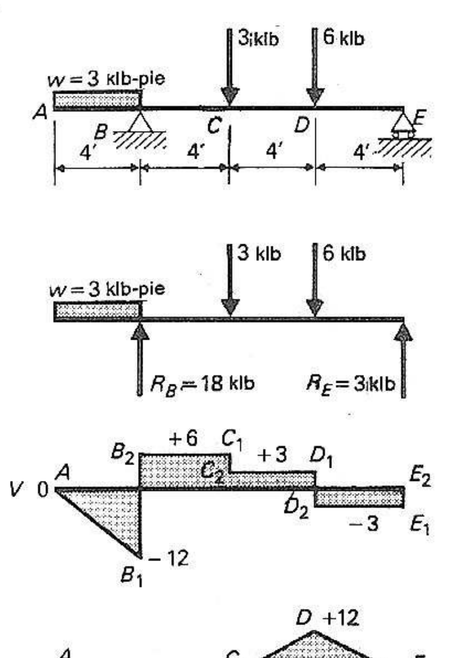


FIGURA 4.16

EJEMPLO 4.4 Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes de la viga mostrada en la Fig. 4.16.

SOLUCION

$$\sum M_E = 0: \quad R_B(12) - 6(4) - 3(8) - (3)(4)(14) = 0,$$
$$R_B = 18 \text{ klb};$$

$$\sum M_B = 0: \quad R_E(12) - 3(4) - 6(8) + (3)(4)(2) = 0,$$
$$R_E = 3 \text{ klb}.$$

Verificación:

$$\sum F_V = 0: \qquad 18 + 3 = 3 + 6 + 3(4), \qquad 21 = 21.$$

Diagrama de fuerzas cortantes. Teniendo en cuenta que la fuerza más alejada hacia la izquierda es cero en este caso, el diagrama de fuerzas cortantes parte de cero (punto A). Desde A hasta B_1, *l*a carga es uniformemente distribuida, de modo que el diagrama de fuerzas cortantes se inclinará hacia abajo a la derecha como se nota en la Fig. 4.15 (b). El valor de la fuerza cortante en B_1 es $V_{B1} = -$ (3 klb/pie) (4 pies) $= -$ 12 klb. En B actúa una fuerza concentrada hacia arriba de 18 klb. Entonces el diagrama de fuerzas cortantes será una línea recta vertical de 18 klb de longitud. La ordenada en B_2 es $-12 + 18 = +6$ klb. A partir de B_2 hacia C_1 la viga no tiene carga, el diagrama de fuerzas cortantes es una línea horizontal. En C la viga soporta una fuerza hacia abajo de 3 klb, provocando una línea recta vertical en el diagrama de fuerzas cortantes, de 3 klb, hacia abajo. Entre los puntos C y D, y D y E, la viga no soporta carga, de modo que el diagrama de fuerzas cortantes es una línea recta horizontal. En D se aplica hacia abajo una fuerza de 6 klb, de modo que la fuerza cortante va desde $+3$ en D_1 hasta -3 en D_2. Finalmente, en E se aplica una fuerza hacia arriba de 3 klb que hace que la ordenada vaya desde -3 en E_1 hasta 0 en E_2. El diagrama de fuerzas cortantes siempre comienza y termina en cero. Si el diagrama de fuerzas cortantes no termina en cero, se ha cometido un error y es necesario revisar el diagrama.

Diagrama de momentos. Como la fuerza cortante inicial es negativa, la parte inicial del diagrama de momentos se inclinará hacia abajo a la derecha, indicando un momento negativo. Las fibras superiores de la viga en esta parte están en tensión, lo que, por definición, corresponde a un momento negativo. Desde la sección A hasta B, el diagrama de momentos tendrá forma parabólica debido a la carga uniformemente distribuida entre estos puntos. También, el momento en B es un máximo, ya que el diagrama de fuerzas cortantes pasa por cero en ese punto. Por las ecuaciones de estática se encuentra que el momento en B es de 24 klb-pie.

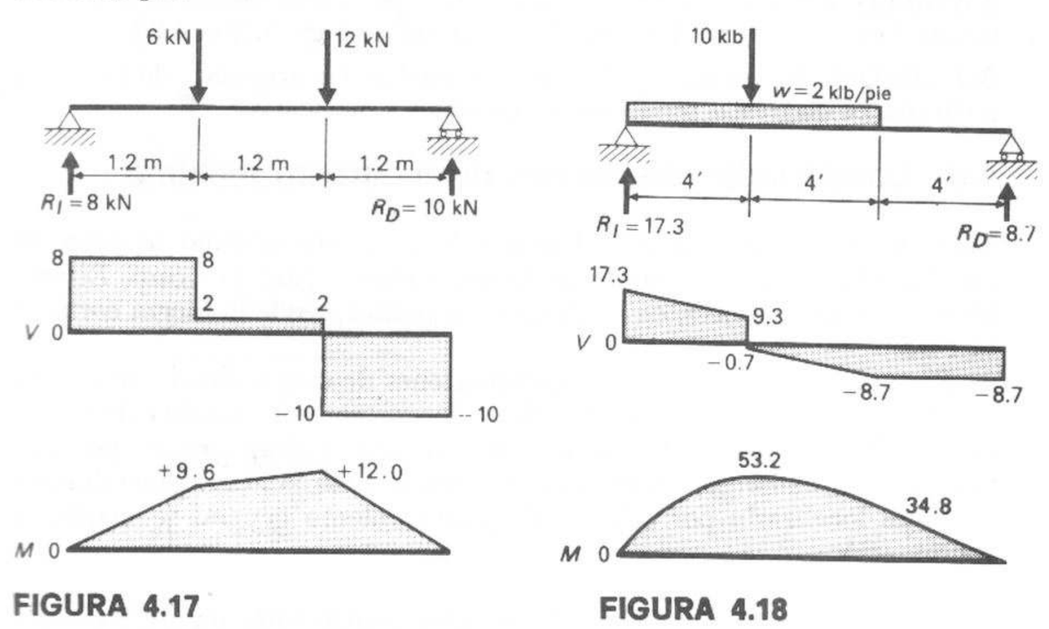


FIGURA 4.17

FIGURA 4.18

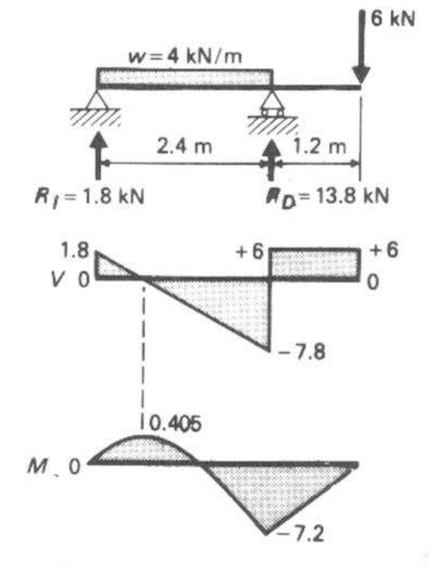


FIGURA 4.19

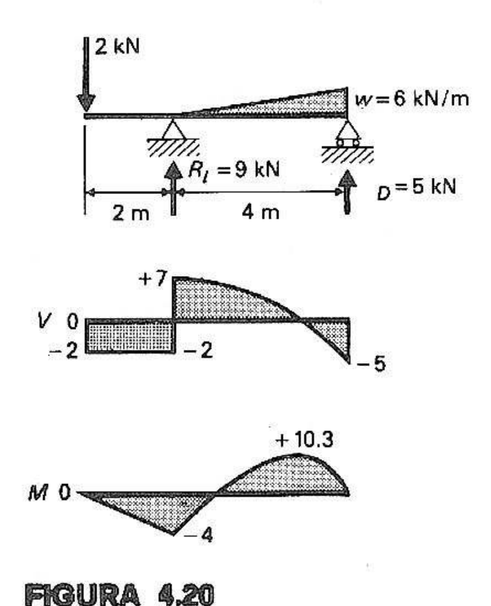


FIGURA 4.20

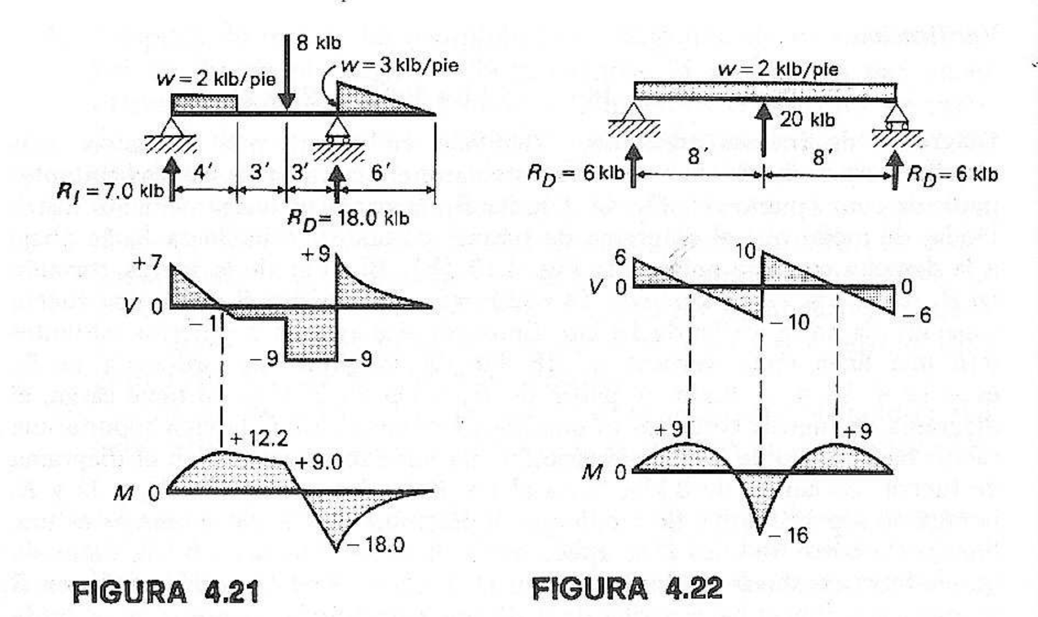


FIGURA 4.21

FIGURA 4.22

Como no hay carga entre *B* y *C*, el diagrama de momentos es una línea recta inclinada. Se inclina hacia arriba pues la fuerza cortante es positiva entre esos puntos. Entre *C* y *D*, el diagrama de momentos otra vez se inclina hacia arriba y es una línea recta, ya que no hay carga entre esos puntos, y la fuerza cortante aún es positiva.

La fuerza cortante pasa por cero en D, indicando que el momento es máximo en ese punto. El diagrama de momentos se inclina hacia abajo (fuerza cortante negativa) según una línea recta (sin carga) hasta llegar a cero en *E*. El diagrama de momentos siempre tendrá valores cero en los dos extremos, excepto cuando se aplica un par en un extremo. Por estática, el momento en *D* se encuentra que vale 12 klb-pie. ■

EJEMPLO 4.5-4.10 Trazar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes para las vigas indicadas en las Figs. 4.17 a 4.22.

SOLUCION En las Figs. 4.17 a 4.22 se indican los diagramas de las vigas, junto con los diagramas resultantes de cortantes y momentos. ■

4.8 Localización de puntos de momento máximo

Como se djjo anteriormente, el punto de momento máximo se presenta en el punto (o puntos) donde la fuerza cortante pasa por cero. El problema consiste entonces, en localizar estos puntos donde la fuerza cortante es cero.

Para cargas concentradas o combinaciones de cargas donde una carga concentrada está en el punto donde la fuerza cortante cambia de signo, es posible determinar la posición de este punto simplemente por inspección. Sin embargo, en el caso de cargas distribuidas, generalmente debemos localizarlo por cálculo. El procedimiento general se explica a continuación:

1. Localizar por inspección la posición aproximada donde la fuerza

cortante es cero en la viga, (es decir, "en algún lugar" entre ciertas cargas).
2. Escribir una expresión para la fuerza cortante aplicada a la posición anterior.
3. La expresión para V del paso 2 se iguala a cero.
4. Resolver la ec. para encontrar la distancia desconocida.

Este procedimiento se usa en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4.11 Determinar la localización del punto de momento máximo en la viga mostrada en la Fig. 4.23.

SOLUCION Calculamos las reacciones:

$$\sum M_{RI} = 0: \qquad R_D(6) = (3)(4)(2),$$
$$R_D = 4 \text{ kN},$$

$$\sum M_{RD} = 0: \qquad R_I(6) = (3)(4)(4),$$
$$R_I = 8 \text{ kN}.$$

Se observa que el diagrama de fuerzas cortantes corta al eje cero en un punto situado a una distancia $\bar{x}$ de R_I, en algún lugar entre $x = 0$ y $x = 4$.

Del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 4.23 (d),

$$\sum F_V = 0: \qquad V = 8 - wx.$$

Como $V = 0$ en $\bar{x}$, tenemos

$$0 = 8 - (3)\bar{x}, \qquad \bar{x} = 2.67 \text{ m}$$

El momento máximo ocurre a 2.67 m de R_I.

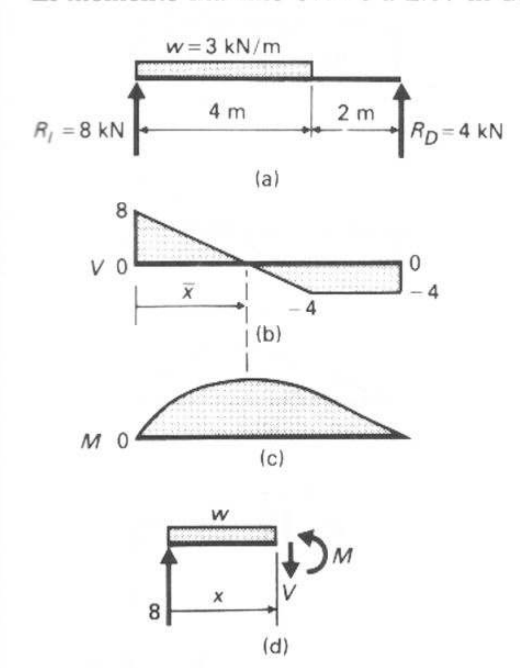
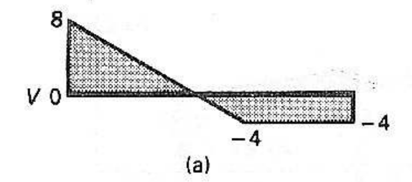


FIGURA 4.23



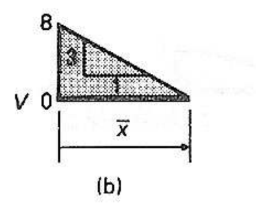


FIGURA 4.24

Para cargas uniformemente distribuidas también podemos obtener la posición donde la fuerza cortante es cero por consideraciones geométricas en el diagrama de fuerzas cortantes, como en el ejemplo 4.11, este toma la forma indicada en la Fig. 4.24 (a). Como la pendiente de la recta es de 3 kN/m, pueden aplicarse las propiedades de los triángulos semejantes, el de la pendiente y el correspondiente al diagrama de fuerzas cortantes, entre $x = 0$ y $x = \bar{x}$, como se indica en la Fig. 4.24 (b).

Por triángulos semejantes:

$$\frac{3}{1} = \frac{8}{\bar{x}}, \qquad \bar{x} = 2.67 \text{ m}.$$

Este es otro análisis, frecuentemente más sencillo, para la determinación de x. ■

EJEMPLO 4.12 Determinar la ubicación del momento máximo para la indicada en la Fig. 4.25.

SOLUCION

$$\sum M_{RI} = 0: \qquad R_D(10) = (2)(2) + (3)(10)(5),$$

$$R_D = 15.4 \text{ klb}$$

$$\sum M_{RD} = 0: \qquad R_I(10) = 2(8) + (3)(10)(5),$$

$$R_I = 16.6 \text{ klb}$$

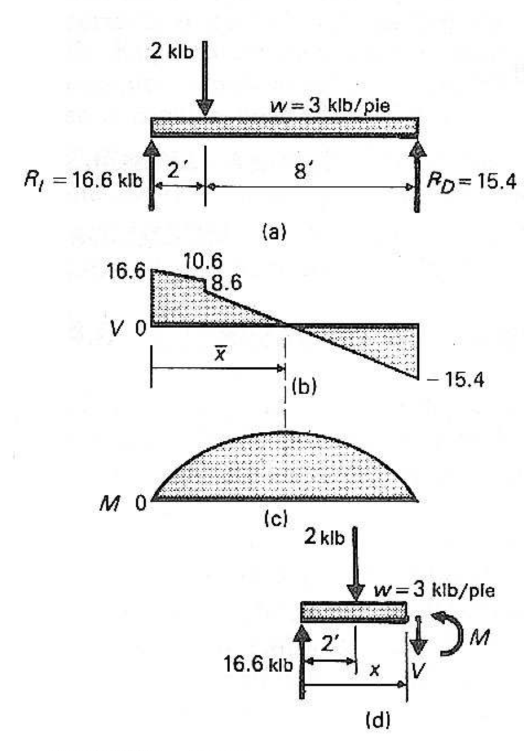


FIGURA 4.25

Del diagrama de cuerpo libre, Fig. 4.25 (d),

$$\sum F_V = 0: \qquad V = 16.6 - 2 - 3x$$
$$= 14.6 - 3x.$$

Haciendo $V = 0$, tenemos

$$0 = 14.6 - 3\bar{x}, \qquad x = \frac{14.6}{3} = 4.87 \text{ pies para } R_I. \quad ■$$

EJEMPLO 4.13 Determinar el momento máximo para la viga mostrada en la Fig. 4.26.

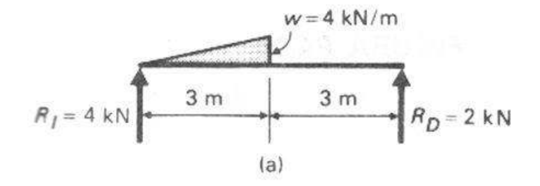
SOLUCION

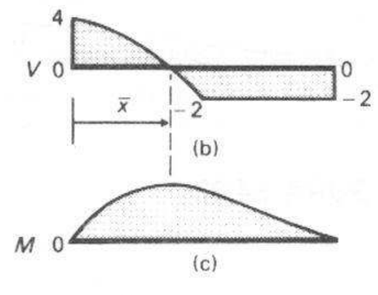
$$\sum M_{RI} = 0: \qquad R_D(6) - \tfrac{1}{2}(3)(4)(2) = 0,$$
$$R_D = 2 \text{ kN},$$

$$\sum M_{RD} = 0: \qquad R_I(6) - \tfrac{1}{2}(3)(4)(4) = 0,$$
$$R_I = 4 \text{ kN}.$$

Del diagrama de cuerpo libre (Fig. 4.26d), se tiene

$$\sum F_V = 0: \qquad V - 4 + \tfrac{1}{2}\left(w\,\frac{x}{3}\right)(x) = 0,$$
$$V = 4 - \frac{2x^2}{3},$$





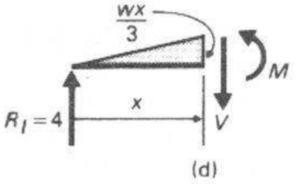


FIGURA 4.26

y haciendo $V = 0$, se tiene:

$$0 = 4 - \frac{2x^2}{3}, \qquad x = 2.45 \text{ m}$$

A partir del diagrama de cuerpo libre puede calcularse el valor del momento máximo, y resulta:

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M - 4(2.45) + \tfrac{1}{2}(4)\left(\frac{2.45}{3}\right)(2.45)\left(\frac{2.45}{3}\right) = 0,$$

$$M_{\text{máx}} = 6.53 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad ■$$

Problemas

4.17-4.24 Trazar los diagramas de V y M para las vigas indicadas en las Figs. P4.17 a P4.24. Trazar los diagramas de V y M directamente debajo del diagrama de cargas y esbozar los diagramas usando las relaciones descritas en la sección 4.6, y en los ejemplos. Los valores numéricos deben escribirse sobre los diagramas en los puntos donde cambia el signo del cortante y en todos los puntos de momento máximo. Todos los cálculos necesarios deberán indicarse sobre la misma hoja, a un lado de los diagramas.

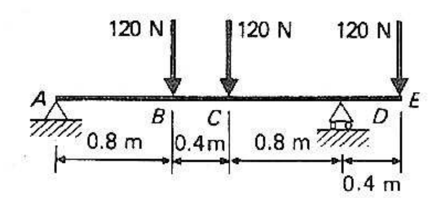


FIGURA P4.17

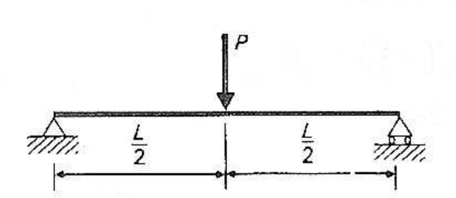


FIGURA P4.18

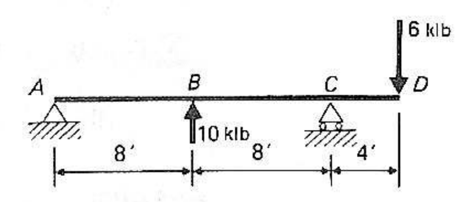


FIGURA P4.19

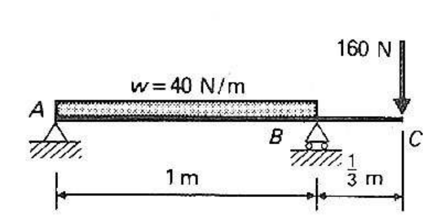


FIGURA P4.20

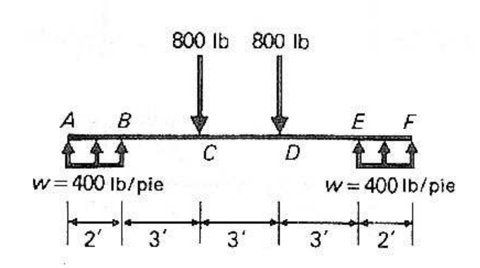


FIGURA P4.21

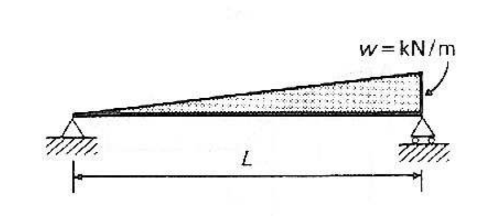


FIGURA P4.22

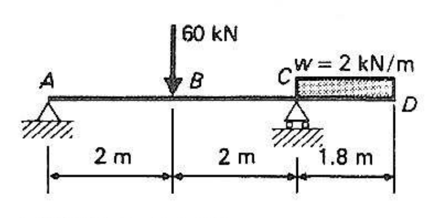


FIGURA P4.23

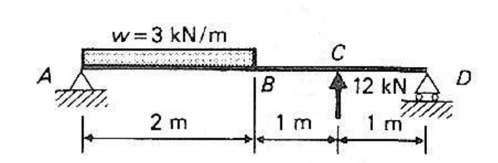


FIGURA P4.24

4.9 Valores del momento por suma de áreas

Un método más fácil y rápido para calcular la variación del momento entre dos puntos cualesquiera sobre una viga consiste en sumar el área bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre esos dos puntos. La teoría que justifica este procedimiento se explica a continuación.

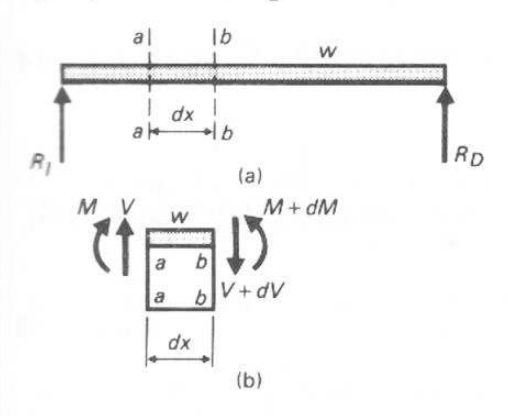


FIGURA 4.27

Se corta una pequeña porción de una viga y se traza el diagrama de cuerpo libre correspondiente, como en la Fig. 4.27 (b). Considerando este cuerpo libre y tomando momentos con respecto a la cara *b-b*, se tiene:

$$\sum M_{bb} = 0: \qquad M + V\,dx - w\,dx(dx/2) - (M + dM) = 0,$$

$$M + V\,dx - \frac{w(dx)^2}{2} - M - dM = 0.$$

Simplificando y despreciando los términos de orden superior se llega a la ec.

$$dM = V\,dx. \tag{4.1}$$

Esta ec. establece que la variación en el momento entre dos secciones transversales cualesquiera es igual al área bajo el diagrama de fuerzas cortantes comprendida entre esos dos puntos. Si se conoce el momento en un punto, como es generalmente el caso, se puede determinar fácilmente el momento en otro lugar. Los ejemplos siguientes ilustran este principio.

EJEMPLO 4.14 Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para la viga mostrada en la Fig. 4.28.

SOLUCION Por estática se calculan las reacciones R_I = 6 klb y R_D = 6 klb. El diagrama de fuerzas cortantes con todos los valores y el diagrama de momentos sin valores pueden esbozarse mediante los procedimientos dados en las secciones anteriores.

La variación en el momento entre *A* y *B* es igual al área bajo la curva de la fuerza cortante comprendida entre esos dos puntos. Matemáticamente,

$$\Delta M = \text{área entre } A \text{ y } B = (6 \text{ klb})(4 \text{ pies}) = 24 \text{ klb-pie}$$

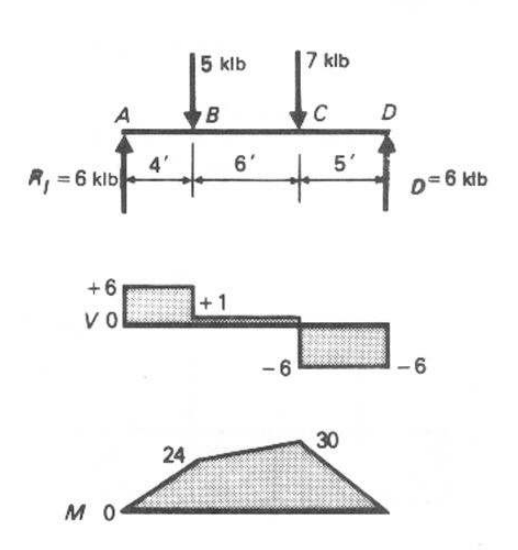


FIGURA 4.28

Como se conoce que el momento en A es cero, el momento actual en B es de 24 klb-pie.

Similarmente, la variación en el momento entre B y C es igual al área bajo el diagrama de fuerzas cortantes comprendida entre esos puntos:

$$\Delta M = \text{área entre } B \text{ y } C = (1 \text{ klb})(6 \text{ pies}) = 6 \text{ klb-pie}$$

El momento real en C es, entonces:

$$\begin{aligned} M_C &= M_B + \text{cambio en el momento entre } B \text{ y } C \\ &= M_B + \Delta M \\ &= 24 + 6 = 30 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

Como una comprobación, nótese que el momento en C es de 30 klb-pie y en D es cero; el área bajo la curva de fuerzas cortantes entre C y D debería ser igual a 30 klb-pie, como sucede en este caso. ■

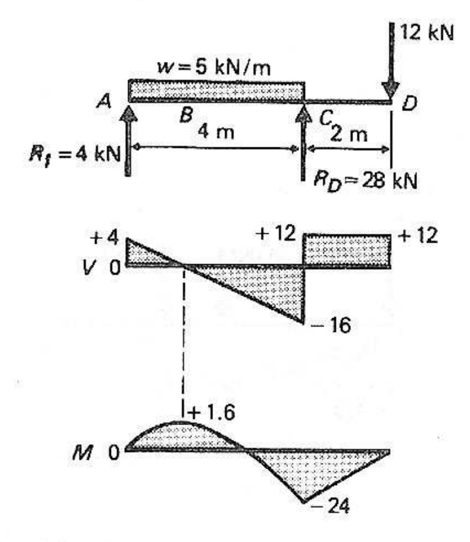


FIGURA 4.29

EJEMPLO 4.15 Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para la viga mostrada en la Fig. 4.29.

SOLUCION Por estática se calculan las reacciones $R_I = 4$ kN y $R_D = 28$ kN. Usando el método explicado en la sección 4.8, se localiza el punto B donde el momento es máximo a 0.8 m de A. En esta forma se puede dibujar el diagrama de fuerzas cortantes con todos los valores (como se indica) y la forma general del diagrama de momentos.

Como el momento en A es cero, el área bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre A y B da el momento máximo en B:

$$M_B = \text{Area entre } A \text{ y } B = \tfrac{1}{2}(4)(0.8) = 1.6 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Análogamente, se conoce que el momento en D es cero. El cambio del momento entre D y C es el momento en C, que es:

$$M_C = \text{Area entre } D \text{ y } C = (-12)(2) = -24 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Para verificar esto, compruébese si el área bajo el diagrama de fuerzas cortantes entre B y C es igual a la variación del momento entre B y C, 1.6-(-24) = 25.6 kN · m. El área es ($\frac{1}{2}$) (3.2) 16 = 25.6 kN · m, esto comprueba el valor calculado antes. ■

Problemas

4.25-4.36 Trazar los diagramas de V y M para las vigas indicadas en las Figs. P4.25 a P4.36. Trazar los diagramas de V y M directamente debajo de los diagramas de cargas, anotando los valores numéricos sobre los diagramas en los puntos donde la fuerza cortante cambia de signo, y en todos los puntos de momento máximo. Todos los cálculos deben anotarse sobre la hoja de papel, a un lado de los diagramas.

4.37-4.42 Considerar los diagramas de fuerzas cortantes para las vigas de las Figs. P4.37 a P4.42. Trazar los diagramas de cargas, de fuerzas cortantes y de momentos para cada una de ellas, y determinar todos los valores de la carga y del momento máximo. Los valores correspondientes al SI están en kN.

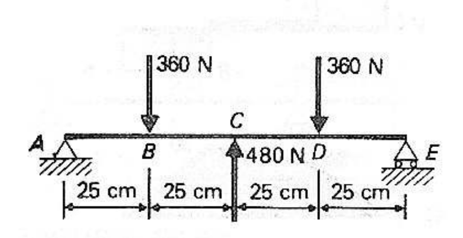


FIGURA P4.25

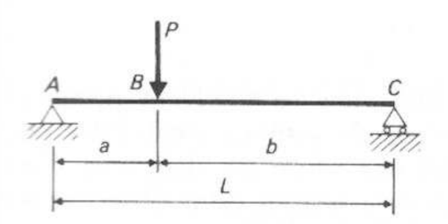


FIGURA P4.26

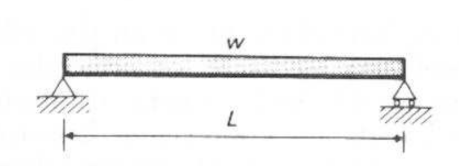


FIGURA P4.27

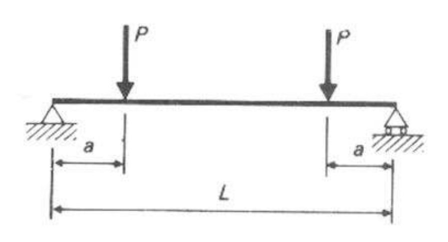


FIGURA P4.28

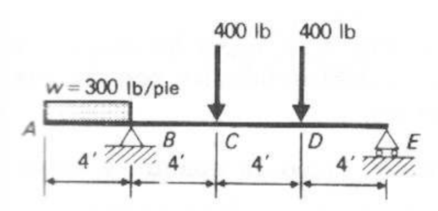


FIGURA P4.29

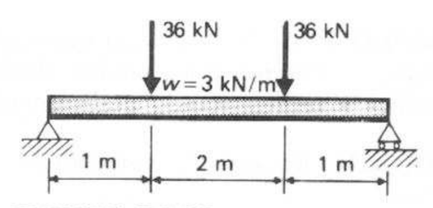


FIGURA P4.30

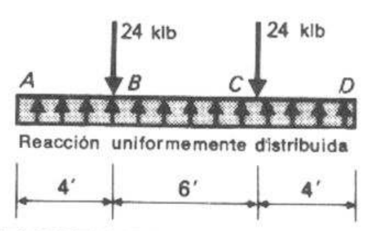


FIGURA P4.31

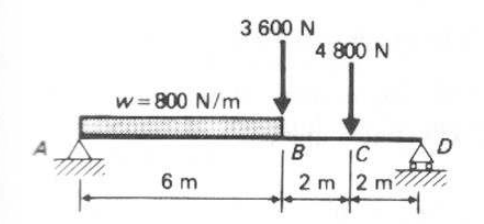


FIGURA P4.32

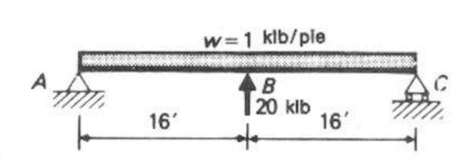


FIGURA P4.33

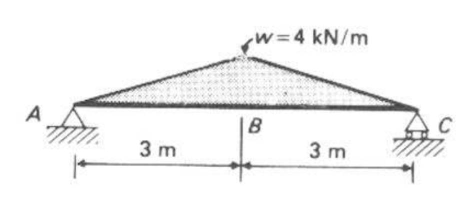


FIGURA P4.34

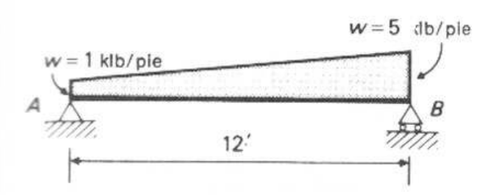


FIGURA P4.35

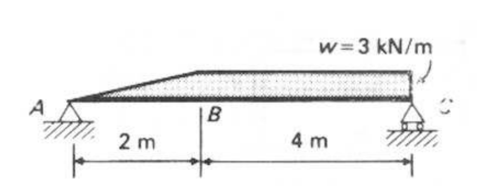


FIGURA P4.36

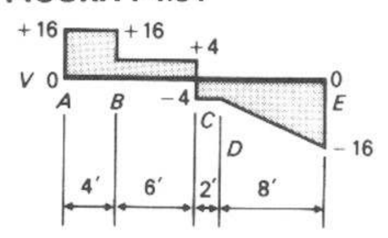


FIGURA P4.37

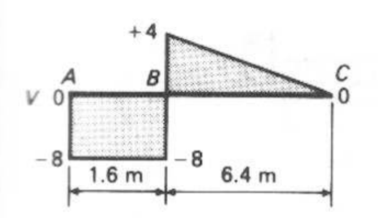


FIGURA P4.38

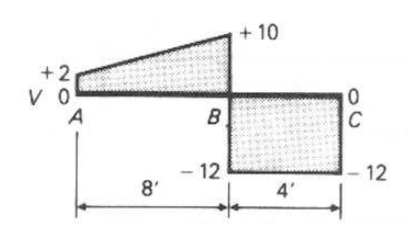


FIGURA P4.39

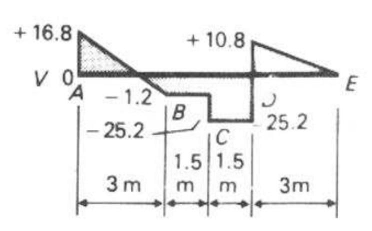


FIGURA P4.40

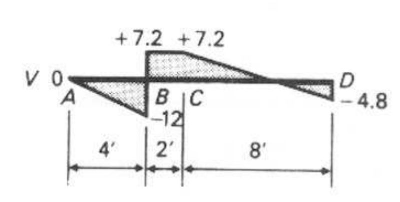


FIGURA P4.41

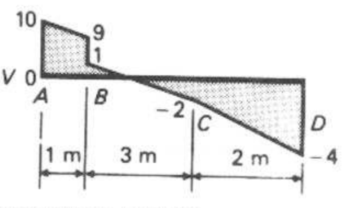


FIGURA P4.42

4.10 Pares

Para explicar el efecto de un par sobre una viga, se resolverá primero un problema mediante los principios básicos de estática explicados en la sección 4.5. Se hará notar el efecto del par sobre los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes y se usarán estas observaciones para abreviar el dibujar otros diagramas de V y M que tengan pares como parte de la carga.

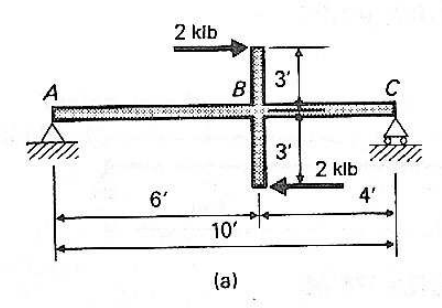
EJEMPLO 4.16 Para la viga mostrada en la Fig. 4.30, trazar los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes estableciendo las ecs. básicas de estática y representando gráficamente esas ecs.

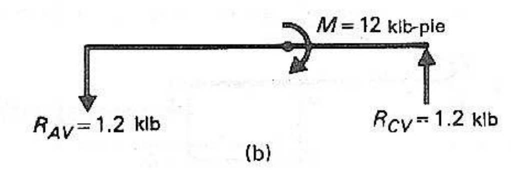
SOLUCION Primero se calculan las reacciones, como se muestra a continuación:

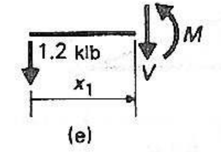
$$\sum M_A = 0: \qquad R_{CV}(10) - 12 = 0,$$
$$R_{CV} = 1.2 \text{ klb (hacia arriba)};$$
$$\sum M_C = 0: \qquad R_{AV}(10) - 12 = 0,$$
$$R_{AV} = 1.2 \text{ klb (hacia abajo)}.$$

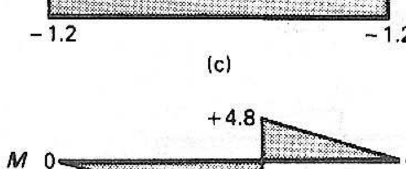
Verificación

$$\sum R_V = 0: \qquad R_{AV} - R_{CV} = 0.$$









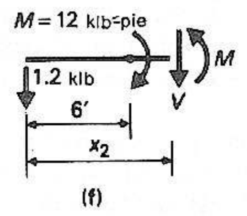


FIGURA 4.30

En la Fig. 4.30 (e) se muestra un diagrama de cuerpo libre de una sección entre A y B, y en la Fig. 4.30 (f) se muestra un diagrama de cuerpo libre de una sección entre B y C. Las ecs. para la fuerza cortante y el momento flexionante en estas secciones son como sigue:

Sección AB:

$$\sum F_V = 0: \qquad V = -1.2;$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = -1.2x_1, \quad 0 \text{ pies} < x_1 < 6 \text{ pies}.$$

Sección BC:

$$\sum F_V = 0: \qquad V = -1.2;$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M + 1.2x_2 - 12 = 0;$$

$$M = 12 - 1.2x_2, \quad 6 \text{ pies} < x_2 < 10 \text{ pies}.$$

Cuando se representan gráficamente estas ecs. los resultados son como se muestra en los diagramas de V y M de las Figs. 4.30 (c) y (d). Estos diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes dan lugar a lo siguiente:

a) Un par no tiene efecto sobre el diagrama de fuerzas cortantes (solamente afecta a las reacciones).
b) Un par se representa por una recta vertical en el diagrama de momentos, siendo la longitud de la misma la magnitud del par a la escala correspondiente.

Usando estas observaciones y el procedimiento señalado en la sección 4.7, podemos trazar los diagramas de cortantes y de momentos flexionantes en los casos en que existen pares. ■

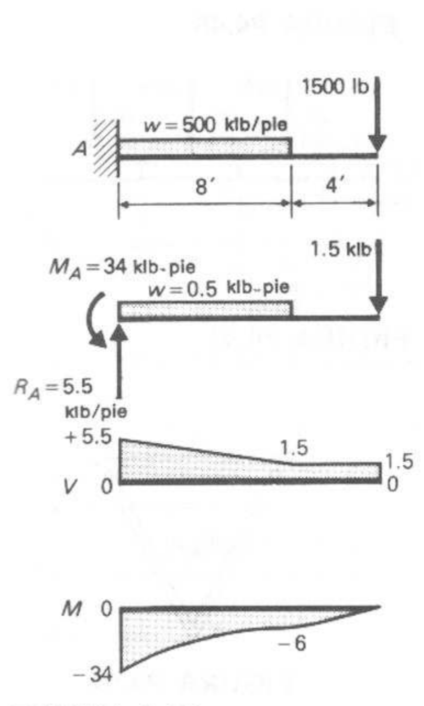


FIGURA 4.31

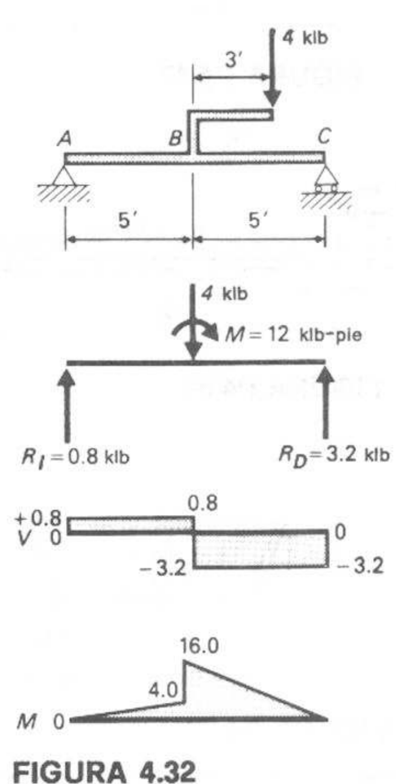


FIGURA 4.32

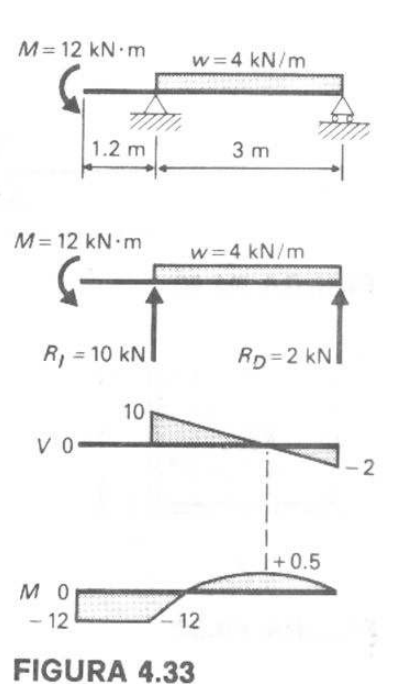


FIGURA 4.33

EJEMPLO 4.17-4.19 Trazar los diagramas de V y M para las vigas indicadas en las Figs. 4.31-4.33.

SOLUCION En las Figs. 4.31-4.33 se indican los diagramas de las vigas, junto con sus diagramas de cortantes y de momentos.

Problemas

4.43-4.54 Trazar los diagramas de V y M para las vigas indicadas en las Figs. P4.43 a P4.54.

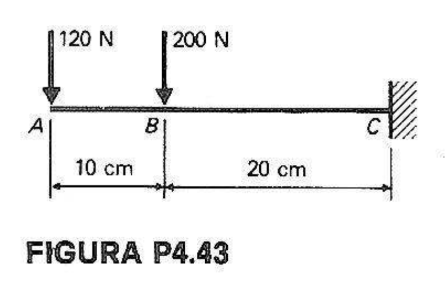


FIGURA P4.43

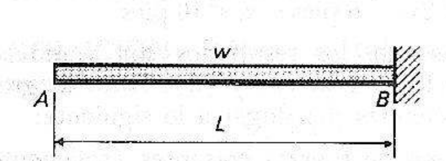


FIGURA P4.44

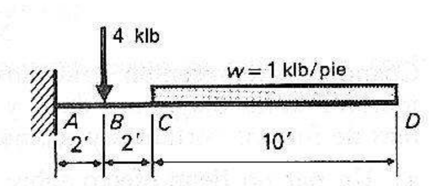


FIGURA P4.45

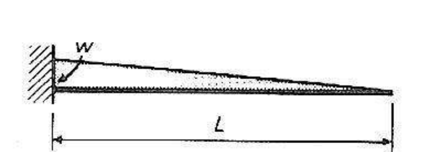


FIGURA P4.46

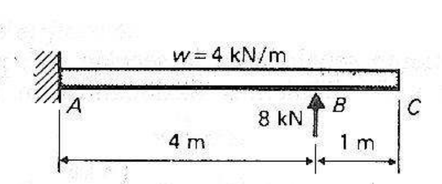


FIGURA P4.47

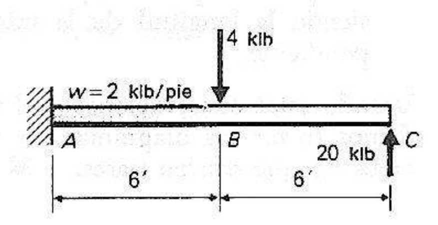


FIGURA P4.48

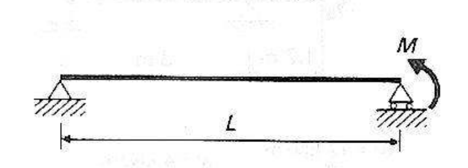


FIGURA P4.49

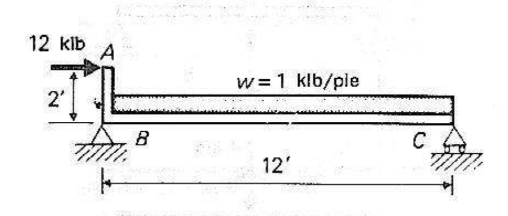


FIGURA P4.50

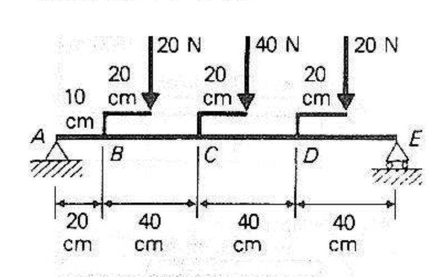


FIGURA P4.51

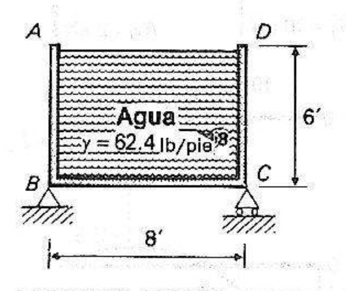


FIGURA P4.52

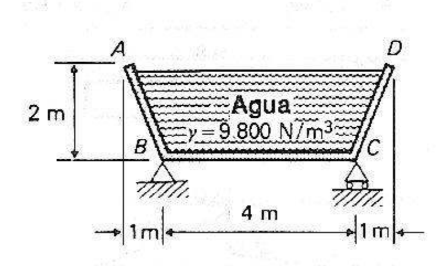


FIGURA P4.53

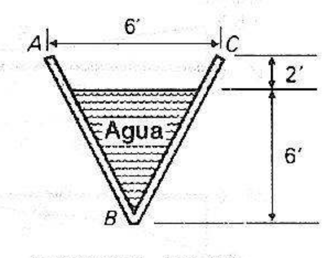


FIGURA P4.54

4.11 Uso de tablas

El material de este capítulo incluye una explicación detallada sobre la construcción de diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. En esa forma se han explicado los métodos para calcular la fuerza cortante máxima y/o el momento flexionante máximo en una viga.

En la práctica, un gran porcentaje de las vigas que se diseñan, soporta cargas más o menos usuales. Si solamente se desea conocer los valores de la fuerza cortante máxima y del momento flexionante máximo, como es el caso más común, y las cargas son usuales, se pueden encontrar las ecuaciones para la fuerza cortante y el momento en manuales de Ingeniería. En el Apéndice **D** se exponen algunas de las condiciones de carga más comunes. Si una viga corresponde a una sola o a una combinación de estas categoría, la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo puede calcularse sustituyendo los valores adecuados de las cargas y distancias, en las fórmulas. Sin embargo, debe tenerse cuidado de comprobar que la condición de carga de la viga corresponde exactamente al de la ecuación utilizada.

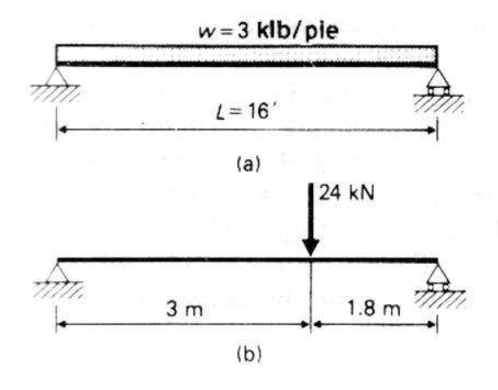
Los ejemplos siguientes ilustran el uso de estas tablas.

EJEMPLO 4.20 Determinar los valores de la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo en las vigas indicadas en la Fig. 4.34.

SOLUCION

a) *Caso 4, Apéndice D* (Figura 4.34a)

$$V_{máx} = R_1 = \tfrac{1}{2}wL = \tfrac{1}{2}(3)(16), \qquad V_{máx} = 24 \text{ klb}$$
$$M_{máx} = \tfrac{1}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}(3)(16)^2, \qquad M_{máx} = 96 \text{ klb-pie}$$



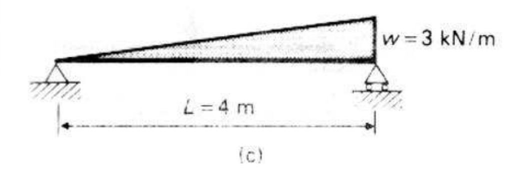


FIGURA 4.34

b) *Caso 2, Apéndice D* (Figura 4.34b)

$$V_{\text{máx}} = R_D = \frac{Pa}{L} = \frac{(24)(3)}{4.8}, \qquad V_{\text{máx}} = 15 \text{ kN}$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{Pab}{L} = \frac{(24)(3)(1.8)}{4.8}, \qquad M_{\text{máx}} = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

c) *Caso 5, Apéndice D* (Figura 4.34c)

$$V_{\text{máx}} = R_D = \frac{wL}{3} = \frac{(3)(4)}{3}, \qquad V_{\text{máx}} = 4 \text{ kN}$$

$$M_{\text{máx}} = 0.064wL^2 = 0.064(3)(4)^2, \quad M_{\text{máx}} = 3.07 \text{ kN} \cdot \text{m}. \quad ■$$

4.12 Combinaciones de casos

A veces es posible combinar algunos de los casos usuales que se encuentran en los manuales para determinar la fuerza cortante máxima o el momento máximo. Por ejemplo, la viga de la Fig. 4.35 (a) soporta una carga uniformemente distribuida y una carga concentrada en su centro. Este sistema de carga puede descomponerse en los casos usuales de las Figs. 4.35 (b) y (c). El momento máximo se calcula como:

$$M_{\text{máx}} = \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{4}.$$

Este procedimiento de superponer cargas a partir de los casos usuales para resolver el problema de una condición de carga particular es frecuentemente muy útil. Sin embargo, debe notarse que *este procedimiento es válido para obtener el momento máximo de una viga, solamente si son válidas las reglas de superposición. En nuestro caso, esto significa que el momento máximo en cada uno de los casos usuales que se superponen debe ocurrir en el mismo punto.*

Para las vigas mostradas en la Fig. 4.35 esto es cierto, ya que el momento máximo para la viga con carga uniformemente distribuida ocurre en el centro de la viga, y en ese punto se presenta el momento máximo para una viga con una carga concentrada en su centro. Sin embargo, estas condiciones no se cumplen en el caso en la Fig. 4.36. El momento máximo para la carga uniformemente distribuida ocurre en el centro de la viga, mientras que el momento máximo ocurre directamente debajo

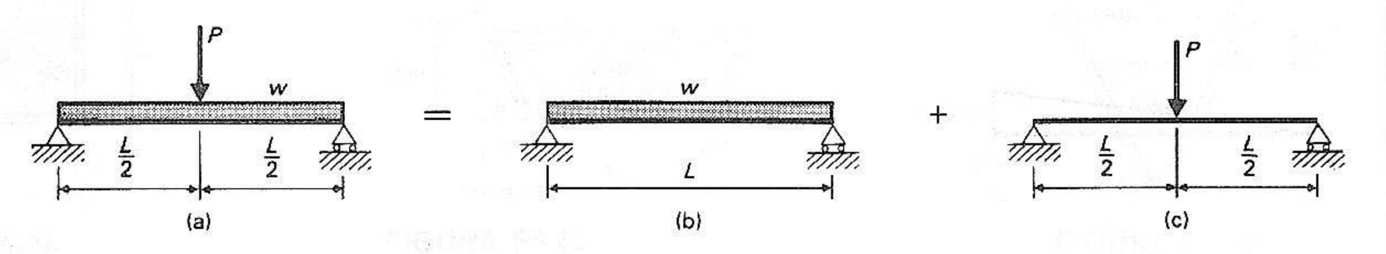


FIGURA 4.35

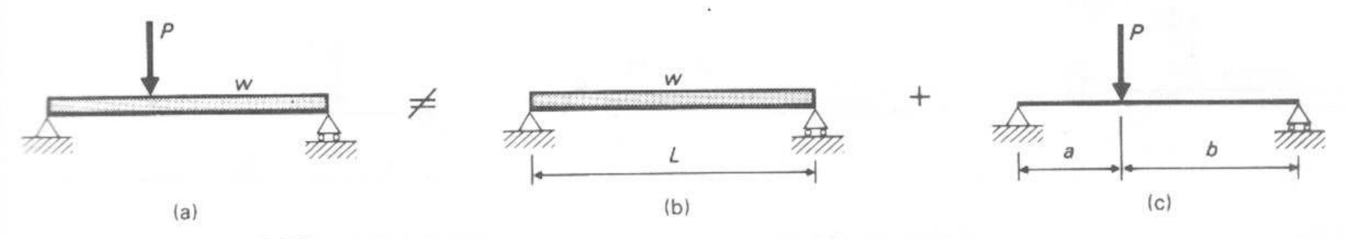


FIGURA 4.36

de la carga concentrada en la otra viga. En casos de este tipo, el momento máximo debe calcularse mediante los procedimientos descritos en las primeras secciones de este capítulo.

Problemas

4.55-4.68 Calcular la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo en las vigas de las Figs. P4.55 a P4.68. Cuando sea posible use los casos estándar indicados en el Apéndice *D* y combine los casos donde sea válido este procedimiento. Para las vigas donde los casos estándar no son aplicables, calcule la fuerza cortante máxima y el momento flexionante máximo mediante los procedimientos explicados en el comienzo de este capítulo.

FIGURA P4.55

FIGURA P4.56

FIGURA P4.57

FIGURA P4.58

FIGURA P4.59

FIGURA P4.60

FIGURA P4.61

FIGURA P4.62

FIGURA P4.63

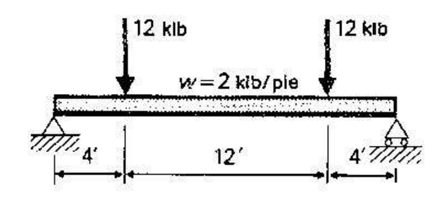


FIGURA P4.64

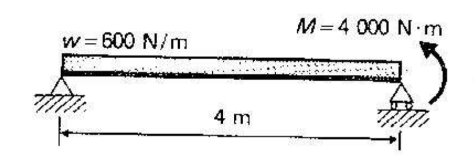


FIGURA P4.65

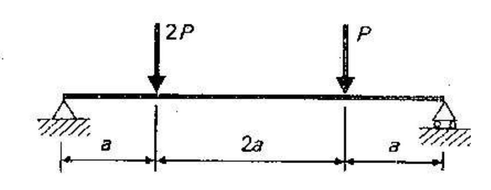


FIGURA P4.66

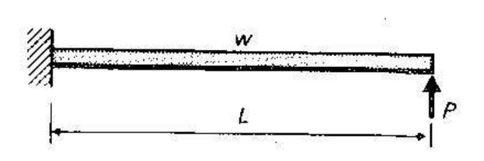


FIGURA P4.67

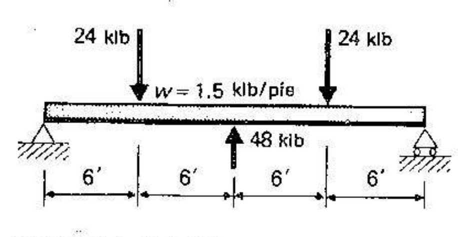


FIGURA P4.68

5

Esfuerzos en vigas

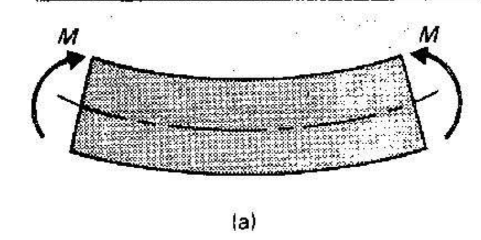
5.1 Introducción

En el capítulo 4 se discutió el hecho de que las cargas aplicadas exteriormente producen momentos internos resistentes y cortantes en las vigas. Exceptuando una breve discusión en la sección 4.2, no se mencionó nada acerca de las dimensiones, forma, o material de la viga que soporta las cargas aplicadas. Estos factores están muy relacionados con la capacidad de soportar carga de la viga y con la naturaleza y distribución de sus esfuerzos internos. En este capítulo se explican las relaciones más importantes entre estos factores. Nuevamente se pueden considerar dos tipos generales de problemas, análisis y diseño. La sección A explica el análisis de vigas. En el análisis se conocen las dimensiones de la viga, y el problema consiste en determinar el máximo esfuerzo para una carga dada, o la carga permisible para un esfuerzo permisible dado.

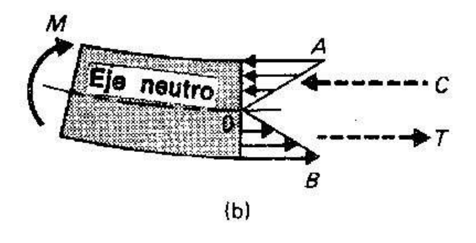
El diseño de las vigas se explica en la sección B. En problemas de diseño, se conoce el claro de la viga, las condiciones de carga, y los esfuerzos permisibles, el problema consiste en determinar las dimensiones necesarias de la sección transversal de la viga. Al diseñar surgen muchas preguntas prácticas, tales como la seguridad, economía, y detalles generales. Aunque estas preguntas se responden más completamente en un curso de diseño estructural o de diseño de máquinas, algunos de estos aspectos se considerarán en esta sección.

La teoría de la flexión supone que la línea de acción de las fuerzas aplicadas y la forma geométrica de la sección transversal de una viga se adaptan a ciertas condiciones. Cuando la geometría de una viga o las condiciones de carga no se adaptan a las hipótesis necesarias de la flexión, sus esfuerzos internos diferirán —en muchos casos en una forma muy significativa— de los que se predicen mediante la teoría. El capítulo 11 trata algunas de esas situaciones especiales y describe métodos para analizarlas.

SECCION A Análisis de Vigas



(a)



(b)

FIGURA 5.1

5.2 Esfuerzos de flexión

Para describir la acción de los esfuerzos de flexión, considérese una viga sujeta a flexión pura (es decir, una viga en la cual no se presentan esfuerzos cortantes), como en la Fig. 5.1. Supóngase que la viga está formada de un gran número de fibras longitudinales. Cuando se flexiona la viga, las fibras de la porción superior de la viga se comprimen, mientras que las de la porción inferior se alargan. Se ve intuitivamente que debe haber alguna supeficie donde se verifica la transición entre compresión y tensión. Esta superficie (en la cual el esfuerzo es cero) se llama la superficie neutra, o eje neutro, y está localizada en el centro de gravedad de la sección transversal. La Fig. 5.1 (b) es un diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga y muestra la distribución de las fuerzas en las fibras de la viga.

Las fuerzas resultantes de compresión y de tensión (C y T) son iguales en magnitud y forman al momento resistente interno de la viga (véase sección 4.2). La magnitud de los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la viga, asociados con este momento pueden determinarse a partir de la fórmula de la flexión, que se deduce en la sección siguiente:

En la deducción y uso de la fórmula de la flexión, se hacen ciertas suposiciones con respecto a la acción de la viga. En un trabajo de diseño normal estas suposiciones se aproximan a la acción real de la viga. Si en casos relativamente raros de diseño elemental surgen situaciones donde estas suposiciones no son válidas, deben emplearse otros métodos de análisis.

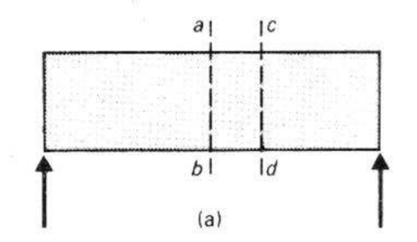
Las suposiciones que se hacen al usar la fórmula de la flexión son:

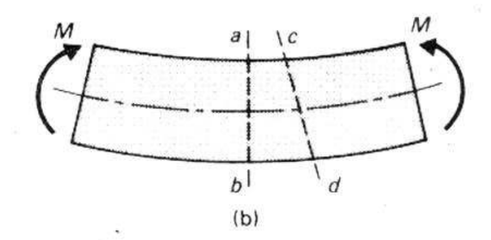
1. La viga inicialmente es recta, tiene una sección transversal constante y se conserva así esencialmente cuando está cargada. Las vigas realmente tienen ligeramente flexiones y torceduras que pueden ocurrir durante su fabricación, y cuyo efecto se desprecia. Sin embargo, el gancho de una grúa, que tiene una gran curvatura, no podría diseñarse mediante la fórmula de la flexión de este capítulo.
2. Las cargas se aplican en tal forma que no se presenta torsión. Si las cargas se aplican excéntricamente, tiene lugar una combinación de flexión y torsión. El análisis de este tipo de carga está fuera, del alcance de este libro, pero el capítulo 11 considera el tópico adicionalmente.
3. Todos los esfuerzos en la viga están por debajo del límite de proporcionalidad, y por consiguiente, se aplica la Ley de Hooke.
4. El módulo de elasticidad de las fibras a compresión es igual al de las fibras a tensión.
5. La parte de la viga que está comprimida, está restringida para moverse lateralmente.

6. La línea de acción de las fuerzas sobre la viga se aplica paralelamente a un eje principal y pasando por el centro de cortante. (El capítulo 11 describe este tema con más detalle.)
7. Las secciones planas antes de la flexión se conservan planas después de la flexión. Es decir, un plano que pase a través de una sección transversal antes de la flexión no se alabeará después de que se cargue la viga. Esta suposición explica la distribución de esfuerzos en forma lineal (OA y OB) mostrada en la Fig. 5.1 (b).

Estas suposiciones y las características físicas asociadas con la flexión pueden observarse en la Fig. 5.2. La Fig. 5.2 (a) y (b) muestra la viga y dos secciones planas (*a-b* y *c-d*) antes y después de la flexión.

Como las secciones planas antes de la flexión se conservan planas después de la flexión (suposición 7), las fibras de la viga deben cambiar de longitud. La posición original de las fibras que se muestran en la Fig. 5.2 (c) (con líneas interrumpidas) se ha movido después de la flexión, a la posición mostrada por las líneas continuas. Las fibras superiores se han acortado, las fibras inferiores se han alargado, y las fibras localizadas en el eje neutro no han cambiado su longitud. La Fig. 5.2 (d) es un diagrama de la distribución de la deformación en la sección transversal. Obsérvese especialmente que la deformación varía linealmente desde cero en el eje neutro hasta un valor máximo de compresión en las fibras más superiores y hasta un valor máximo de tensión en las fibras más inferiores. Como, por la Ley de Hooke, el esfuerzo es proporcional a la deformación (suposición 3), la distribución de esfuerzos de la Fig. 5.2 (e) tiene la misma *forma* que la distribución de deformaciones, pero a una *escala* diferente. Por consiguiente, los esfuerzos en una viga varían también desde cero en el eje neutro hasta un máximo en las fibras extremas.





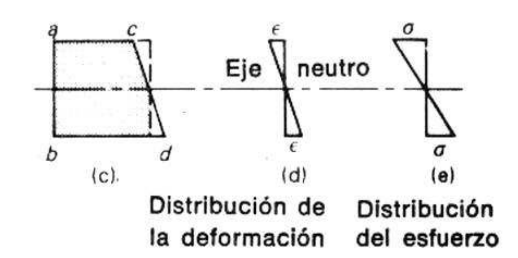


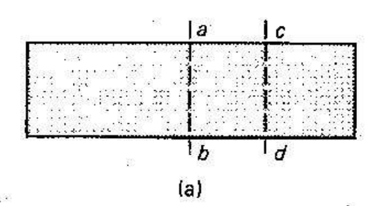
FIGURA 5.2

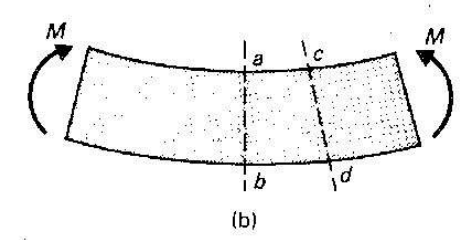
5.3 Fórmula de la flexión

La fórmula de la flexión se deducirá esencialmente en la misma forma que la fórmula de la torsión de la sección 3.2 Primero establecemos la relación entre los esfuerzos en las fibras y el momento resistente interno, lo cual se puede hacer de la manera siguiente:

a) Se analiza una fibra localizada a una distancia cualquiera y a partir del eje neutro, se determina la fuerza ejercida en esta fibra debida a su esfuerzo, y el momento de esta fuerza con respecto al eje neutro.
b) Se obtiene la suma de los momentos de todas las fibras, con respecto al eje neutro. El resultado será el momento resistente interno de la viga. La deducción tiene la forma siguiente:

1. Considérese una sola fibra de área dA localizada a una distancia y del eje neutro (Fig. 5.3). Si el esfuerzo que actúa sobre esta





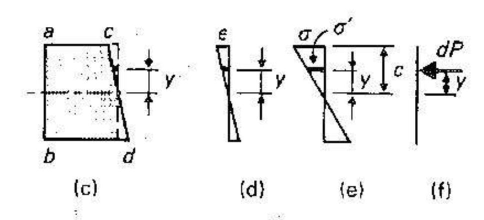


FIGURA 5.3

fibra es σ', el esfuerzo que actúa sobre la fibra extrema es σ, y la distancia desde el eje neutro a la fibra extrema es c, entonces, por los triángulos semejantes de la Fig. 5.3 (e), tenemos:

$$\frac{\sigma'}{y} = \frac{\sigma}{c} \qquad \text{o} \qquad \sigma' = \sigma \frac{y}{c}.$$

2. Conociendo el esfuerzo sobre esta fibra y su área dA, se determina la fuerza ejercida por esta fibra:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad dP = \sigma' \, dA = \sigma \frac{y}{c} \, dA.$$

3. El momento de esta fuerza dP con respecto al eje neutro es:

$$dM = dPy = \left(\sigma \frac{y}{c} \, dA\right) y, \qquad dM = \frac{\sigma}{c} y^2 \, dA.$$

4. Sumando los momentos de cada una de las fibras de la viga se obtiene:

$$\int_0^M dM = \int_{-c}^{+c} \frac{\sigma}{c} y^2 \, dA,$$

$$M = \frac{\sigma}{c} \int_{-c}^{+c} y^2 \, dA.$$

El término $\int_{-c}^{+c} y^2\, dA$ es, por definición, el momento de inercia I de la sección transversal. La fórmula de la flexión entonces se convierte en:

$$M = \frac{\sigma}{c} I$$

o

$$\sigma = \frac{Mc}{I}, \tag{5.1}$$

donde

σ = esfuerzo en las fibras extremas de la viga, en lb/plg², o en Pa.
M = momento flexionante interno en la viga, en lb-plg, o en N · m.
I = momento de inercia de la sección transversal de la viga, en plg⁴, o en m⁴.
c = distancia desde el eje neutro de la viga hasta las fibras extremas, en plg, o en m.

Debe notarse que el eje neutro siempre coincide con el centroide de la sección transversal si la viga está sujeta a esfuerzos menores a los del punto de fluencia y no se presentan fuerzas axiales.

5.4 Uso de la fórmula de la flexión

Se puede usar la fórmula de la flexión para determinar los esfuerzos máximos en las fibras de vigas en las cuales se conocen M, c, e I, o éstos se pueden determinar a partir de las cargas dadas y de las dimensiones. Los ejemplos 5.1, 5.2 y 5.3 ilustran este procedimiento.

Frecuentemente, las vigas tienen secciones transversales asimétricas con respecto al eje de flexión, semejantes a las indicadas en la Fig.5.4. El procedimiento para analizar estas vigas es semejante al ilustrado en los ejemplos 5.1, 5.2 y 5.3. La única diferencia es que existen dos valores de c. Si se quiere determinar el esfuerzo máximo se debe usar la mayor distancia c. Sin embargo, si se van a determinar los esfuerzos tanto en las fibras de la parte superior como en las fibras de la parte inferior, se aplica la fórmula $\sigma = Mc/I$ dos veces, usando las respectivas distancias c.

Como el eje neutro siempre está en el centroide de la sección transversal, el primer cálculo consiste en localizar este eje, para determinar las dos distancias c. El procedimiento para calcular centroides y mo-

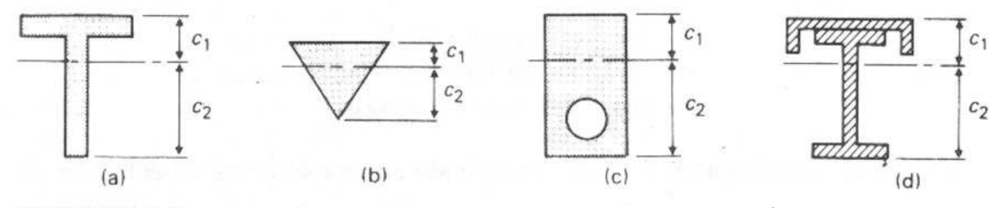


FIGURA 5.4

mentos de inercia se presenta en el Apéndice A, y se ilustra en el ejemplo 5.4.

El ejemplo 5.5 ilustra otro problema de análisis que se presenta frecuentemente. En este caso, se dan las dimensiones de la viga y los esfuerzos admisibles. El problema consiste en determinar la máxima carga que se puede aplicar.

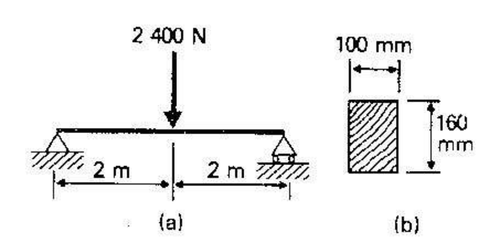


FIGURA 5.5

EJEMPLO 5.1 Determinar el esfuerzo en las fibras extremas de la viga de 100 mm × 160 mm indicada en la Fig. 5.5.

a) Despreciar el peso de la viga.

b) Incluir el peso de la viga (el peso específico de la madera es de 5 600 N/m³).

SOLUCION

a) El momento máximo debido a la carga concentrada puede determinarse según el caso 1 del Apéndice *D*. Así,

$$M_{\text{máx}} = \frac{PL}{4} = \frac{(2\,400)(4)}{4} = 2\,400 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El momento de inercia es

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(100 \times 10^{-3} \text{ m})(160 \times 10^{-3} \text{ m})^3,$$
$$I = 34 \times 10^{-6} \text{ m}^4.$$

El esfuerzo en las fibras extremas, superiores o inferiores, es

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(2\,400 \text{ N} \cdot \text{m})(80 \times 10^{-3} \text{ m})}{34 \times 10^{-6} \text{ m}^4},$$
$$\sigma = 5.65 \text{ MPa}.$$

b) Cuando se incluye el peso de la viga como una carga uniformemente distribuida, el valor de w es

$$w = \text{peso específico} \times \text{volumen}$$
$$w = (5\,600 \text{ N/m}^3)(100 \times 10^{-3} \text{ m})(160 \times 10^{-3} \text{ m})$$
$$w = 89.6 \text{ N/m}.$$

El momento adicional debido a esta carga es

$$M = \tfrac{1}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}(89.6)(4)^2 = 179.2 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El esfuerzo adicional debido a este momento es

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(179.2)(80 \times 10^{-3})}{34 \times 10^{-6}}$$
$$= 422 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 0.42 \text{ MPa}.$$

El esfuerzo máximo en la viga, incluyendo su propio peso, es entonces de

$$\sigma = 5.65 + 0.42 = 6.07 \text{ MPa}. \quad ■$$

EJEMPLO 5.2 Determinar el esfuerzo en las fibras extremas de la viga indicada en la Fig. 5.6.

SOLUCION El esfuerzo máximo puede determinarse a partir de $\sigma = Mc/I$. Sin embargo, en este caso debemos calcular primero I. Para determinar el momento de inercia con respecto al eje neutro (pasando a través del centroide de la sección transversal), usamos la Tabla 5.1. Por inspección vemos que el centroide está a 6 plg de la parte inferior.

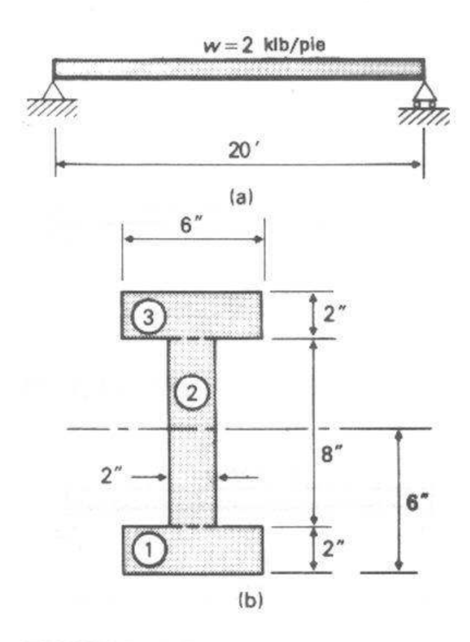


FIGURA 5.6

TABLA 5.1

Bloque	I_0	A	d	Ad^2
1	$\frac{1}{12}(6)(2)^3 = 4$	$(6)(2) = 12$	5	300
2	$\frac{1}{12}(2)(8)^3 = 85.3$	$(8)(2) = 16$	0	0
3	$\frac{1}{12}(6)(2)^3 = 4$	$(6)(2) = 12$	5	300
	$\Sigma I_0 = 93.3$			$\Sigma Ad^2 = 600$

A partir de la Tabla 5.1, calculamos

$$I = I_0 + Ad^2 = 93.3 + 600, \qquad I = 693 \text{ plg}^4$$

El momento es:

$$M_{máx} = \tfrac{1}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}(2)(20)^2 = 100 \text{ klb-pie}$$

Ahora calculamos el esfuerzo y obtenemos

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(100 \times 12)6}{693},$$
$$\sigma = 10.4 \text{ klb/plg}^2 \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.3 Determinar el esfuerzo máximo en una viga W 12 × 26 que está soportando la carga mostrada en la Fig. 5.7.

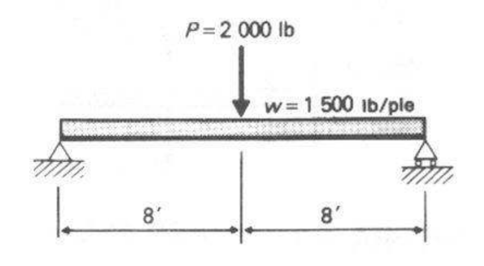


FIGURA 5.7

SOLUCION Las propiedades de diseño para perfiles de acero laminado se encuentran en manuales tales como el Steel Construction publicado por American Institute of Steel Construction. Las propiedades de algunos perfiles seleccionados en este libro se incluyen en el Apéndice J. En la descripción de un perfil laminado, la letra indica su forma (en este caso de ala ancha), el primer número representa el peralte (la altura), nominal de la viga, el segundo número representa su peso por pie de longitud. En este ejemplo, W 12 × 26 significa que es una viga en I de ala ancha, de aproximadamente 12 plg de alto, que pesa 26 lb/pie.

Con esta información, consultamos el Apéndice J. para determinar el esfuerzo, solamente se necesita el momento de inercia con respecto al eje x-x y la mitad del peralte. Según el Apéndice J, $I_{XX} = 204$ plg^4 y $c = 12.22/2 = 6.11$ plg. Sin embargo, como la relación I/c se usa muy frecuentemente, también esta tabulada. En este caso I/c (llamado el módulo de la sección S) es de 33.4 plg^3.

El momento de la viga se calcula como

$$M_{\text{máx}} = \frac{PL}{4} + \frac{1}{8}wL^2,$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{(2\,000)(16)}{4} + \frac{(1\,500)(16)^2}{8}$$

$$M_{\text{máx}} = 56\,000 \text{ lb-pie}$$

Ahora calculamos el esfuerzo en la viga, y obtenemos

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c} = \frac{56\,000 \times 12}{33.4}$$

$$\sigma = 20\,120 \text{ lb/plg}^2. \quad ■$$

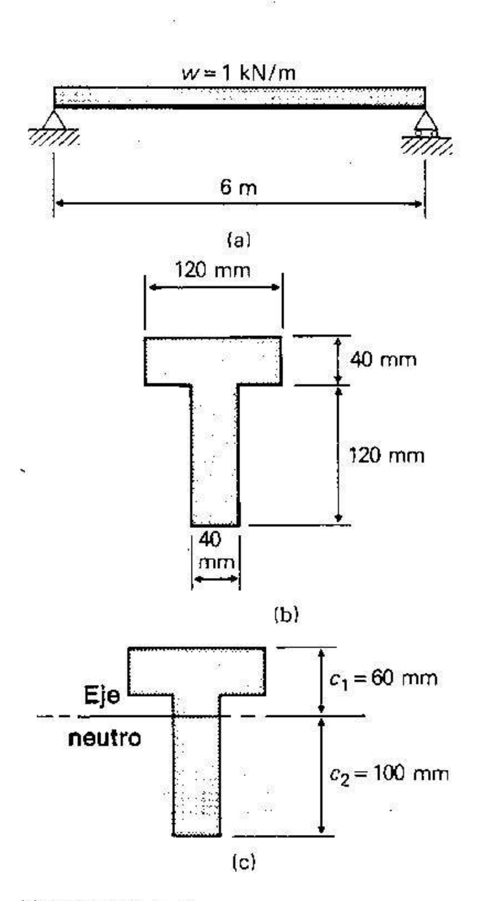


FIGURA 5.8

EJEMPLO 5.4 Determinar los esfuerzos en las fibras extremas, superiores e inferiores, de la viga de sección T indica en la Fig. 5.8.

SOLUCION Para aplicar la fórmula de la flexión $\sigma = Mc/I$, debemos calcular tanto I como c. El primer paso es determinar la ubicación del centroide de la sección. A partir del ejemplo A.18, sabemos que éste queda 100 mm por encima de la base. En seguida debemos calcular el momento de inercia con respecto al eje que pasa por este punto. Según el ejemplo A.24, $I = 31.76 \times 10^{-6}$ m^4. Por consiguiente:

$$M_{\text{máx}} = \tfrac{1}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}(1 \text{ kN/m})(6 \text{ m})^2$$

$$M_{\text{máx}} = 4.5 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

El esfuerzo (máximo) en las fibras extremas inferiores es

$$\sigma = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(4.5 \text{ N}\cdot\text{m})(100 \times 10^{-3} \text{ m})}{31.76 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\sigma = 20.68 \times 10^3 \text{ N/m}^2,$$

$$\sigma = 20.68 \text{ kPa}.$$

El esfuerzo en las fibras extremas superiores es

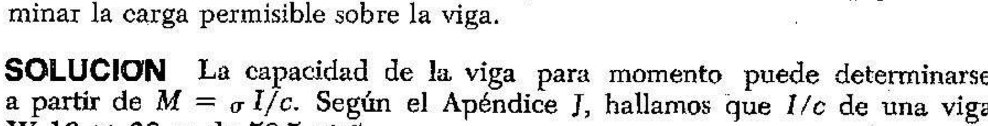
$$\sigma = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(4.5 \text{ N}\cdot\text{m})(60 \times 10^{-3} \text{ m})}{21.76 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\sigma = 20.68 \text{ kPa},$$

$$\sigma = 12.41 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = 12.41 \text{ kPa}. \quad ■$$

EJEMPLO 5.5 Una viga W 16 × 36 soporta una carga uniformemente distribuida. El claro es de 20 pies y el esfuerzo permisible es de 24 000 lb/plg^2. Determinar la carga permisible sobre la viga.



SOLUCION La capacidad de la viga para momento puede determinarse a partir de $M = \sigma I/c$. Según el Apéndice J, hallamos que I/c de una viga W 16 × 36 es de 56.5 plg^3.

Por lo que:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}; \qquad M = \sigma\frac{I}{c} = (24\,000)(56.5)$$
$$= 1\,356\,000 \text{ lb-plg}$$
$$M = \frac{1\,356\,000}{12} = 113\,000 \text{ lb-pie}$$

Para una carga uniformemente distribuida, como se indica en la Fig. 5.9, el momento máximo es

$$M = \tfrac{1}{8}wL^2; \qquad 113\,000 = \tfrac{1}{8}w(20)^2,$$
$$w = 2\,260 \text{ lb/pie}. \blacksquare$$

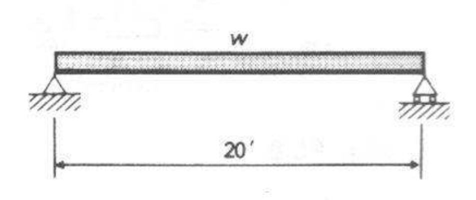


FIGURA 5.9

Problemas

En todos los problemas de este capítulo puede despreciarse el peso propio de la viga, a menos que se especifique lo contrario. En la práctica, el peso de la viga se incluye como una parte de las cargas aplicadas a la viga.

5.1-5.5 Determinar los esfuerzos en las fibras extremas de las vigas indicadas en las Figs. P5.1 a P5.5.

5.6-5.13 Calcular los esfuerzos en las fibras extremas, superiores e inferiores, de las vigas indicadas en las Figs. P5.6 a P5.13.

5.14 Una viga de acero W 16 × 36, de 24 pies de longitud soporta una carga uniformemente distribuida. El esfuerzo admisible es $\sigma = 24\,000$ lb/plg². Determinar la carga w en lb/pie que puede soportar la viga.

5.15 Una viga de madera de 6 plg × 6 plg, de 9 pies de longitud, soporta dos cargas concentradas iguales en sus puntos tercios. El esfuerzo admisible es de 1 400 lb/plg². Determinar la carga admisible.

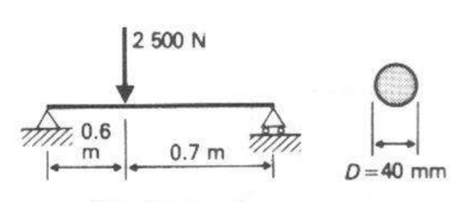


FIGURA P5.1

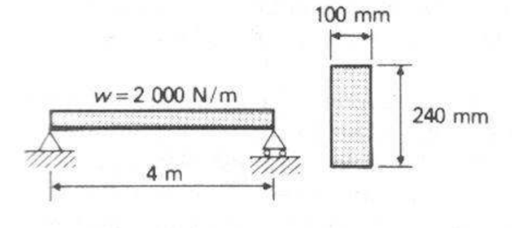


FIGURA P5.2

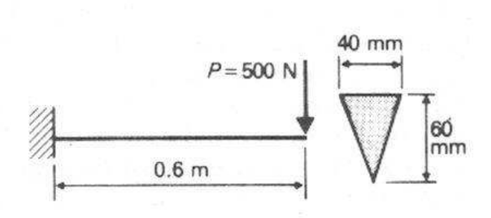


FIGURA P5.3

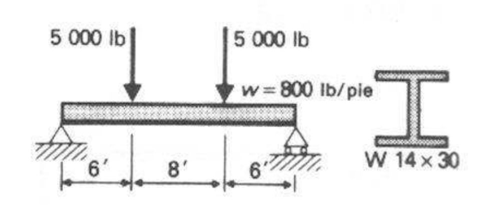


FIGURA P5.4

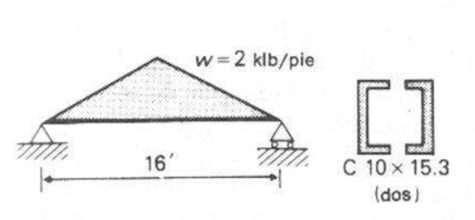


FIGURA P5.5

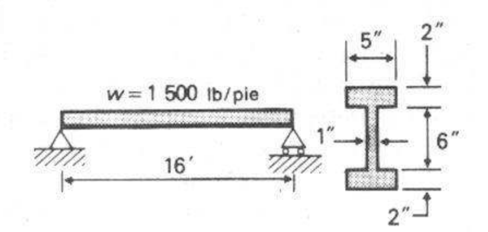


FIGURA P5.6

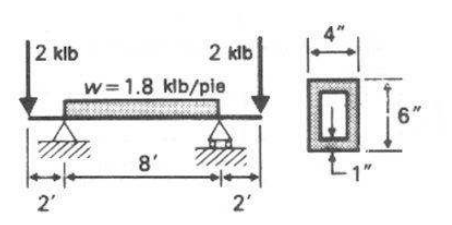


FIGURA P5.7

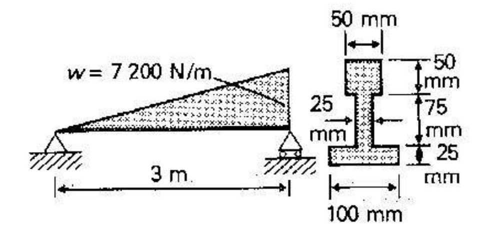


FIGURA P5.8

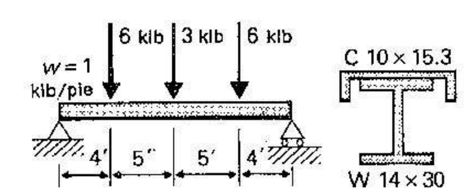


FIGURA P5.9

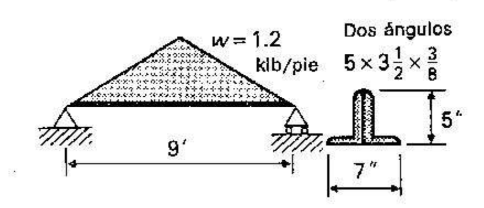


FIGURA P5.10

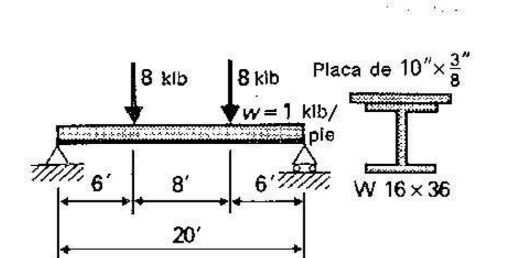


FIGURA P5.11

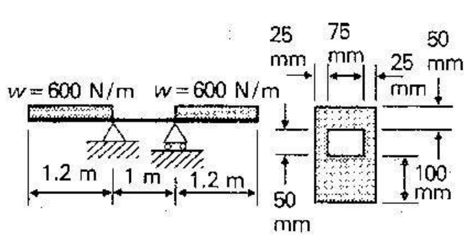


FIGURA P5.12

FIGURA P5.13

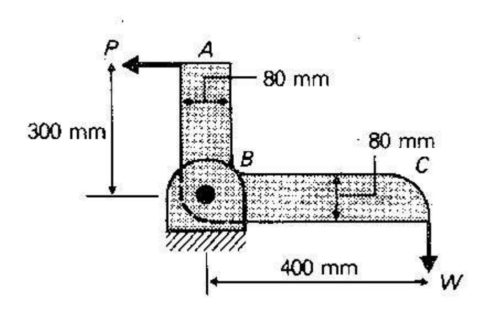
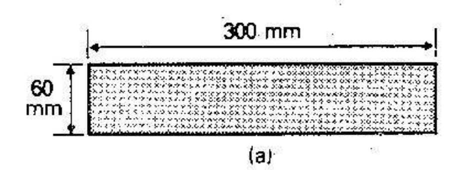


FIGURA P5.16



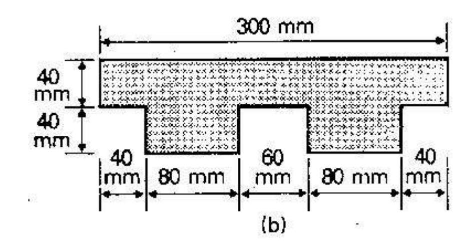


FIGURA P5.18

5.16 La escuadra mostrada en la Fig. P5.16 tiene una sección transversal uniforme de 50 mm de ancho y 80 mm de alto. Calcule la carga W máxima que puede soportar. El esfuerzo admisible es de 125 MPa.

5.17 Un tubo estándar de acero, de 4 plg y de 6 pies de longitud se usa como viga simplemente apoyada. Si el esfuerzo admisible es de 20 000 lb/plg², ¿cuál es la carga concentrada máxima que puede soportar en el centro?

5.18-5.19 Para obtener una mayor resistencia y rigidez a la flexión, algunas veces se añaden nervaduras a las partes planas de los perfiles de fundición. Las Figs. P5.18 (a) y P5.19 (a) muestran una sección transversal rectangular, mientras que las partes (b) muestran una sección transversal que tiene la misma área, pero con nervaduras. Determine el porcentaje de aumento en la capacidad para resistir momento de las secciones con nervaduras, con respecto a las secciones planas.

5.20 Determine la carga máxima P que puede soportar la ménsula de fundición de hierro mostrada en la Fig. P5.20. El esfuerzo de tensión admisible es de 20 MPa. y el esfuerzo de compresión admisible es de 80 MPa.

5.21 Determine la carga máxima P que puede aplicarse a la viga de fundición de hierro mostrada en la Fig. P5.21. Los esfuerzos admisibles son de 3 000 lb/plg² en tensión, y de 12 000 lb/plg² en compresión.

5.22-5.23 Determine el momento máximo que pueden soportar las secciones de la viga de alma llena mostradas en las Figs. P5.22 y P5.23 $\sigma_a = 22$ klb/plg².

5.24 Una viga de 8 plg × 12 plg debe fabricarse mediante cuatro secciones de 2 plg × 8 plg, como se muestra en la Fig. P5.24. El momento es de 12 000 lb-pies. Determine la fuerza de compresión total soportada por la sección de 2 plg × 8 plg correspondiente a la sección superior (sombreada).

5.25 Se va a construir una viga de 8 plg × 12 plg a partir de dos secciones de 2 plg × 12 plg y dos secciones de 2 plg × 4 plg, como se muestra en la Fig. P5.25. Determine la fuerza de compresión total soportada por la sección superior (sombreada) de 2 × 4. El momento es de 12 000 lb-pies.

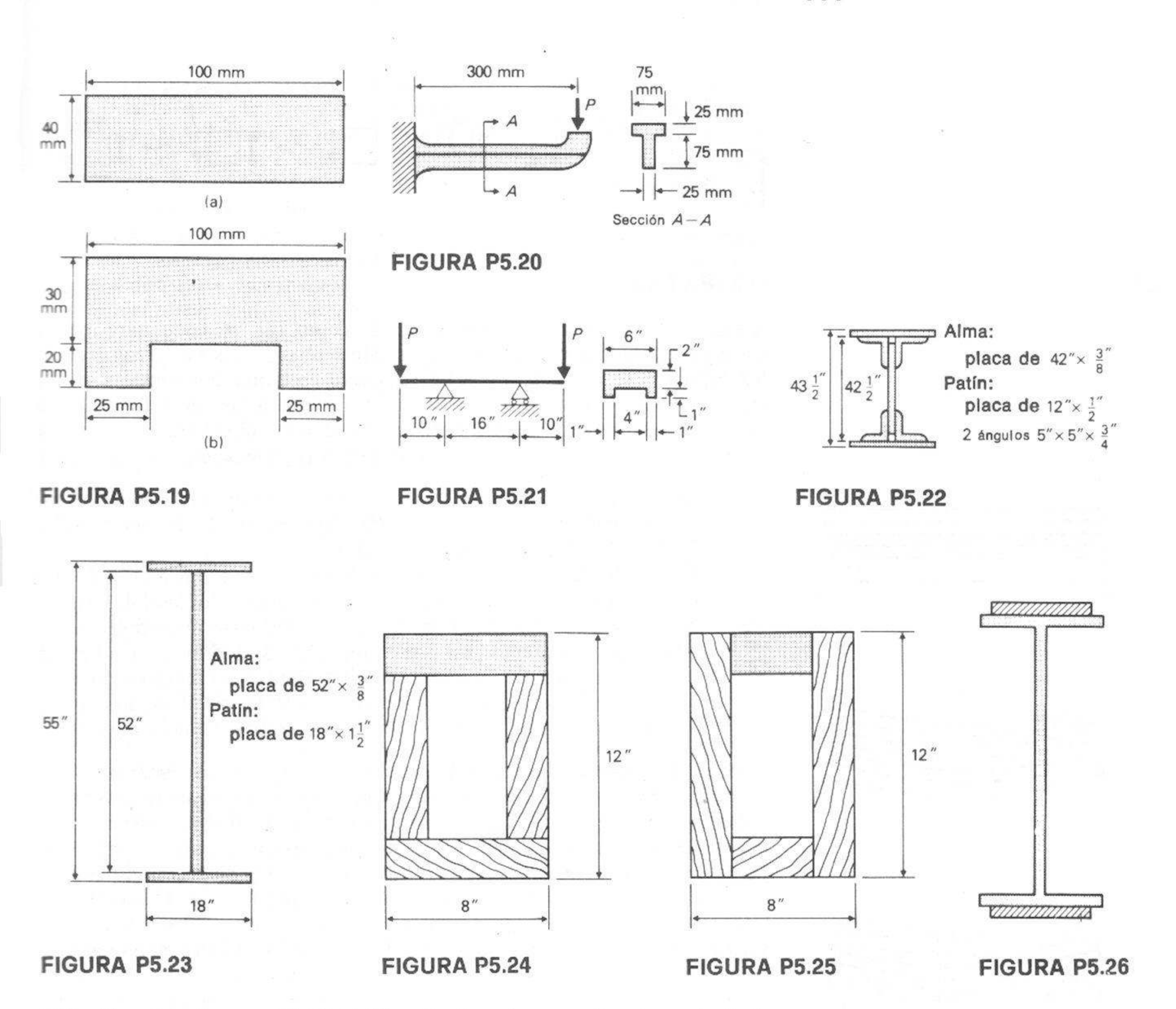


FIGURA P5.19

FIGURA P5.20

FIGURA P5.21

FIGURA P5.22

FIGURA P5.23

FIGURA P5.24

FIGURA P5.25

FIGURA P5.26

5.26 Una viga de acero W 18 × 50 está reforzada con cubreplacas de 6 plg × ¾ plg, soldadas a los patines superior e inferior, como se muestra en la Fig. P5.26. Determine la fuerza total en el cubreplaca en una sección donde el momento flexionante es de 220 klb-pie.

5.5 Esfuerzos cortantes

El capítulo 4, se dedicó en parte a explicar la construcción de diagramas de fuerzas cortantes para fuerzas cortantes verticales en vigas. La consi-

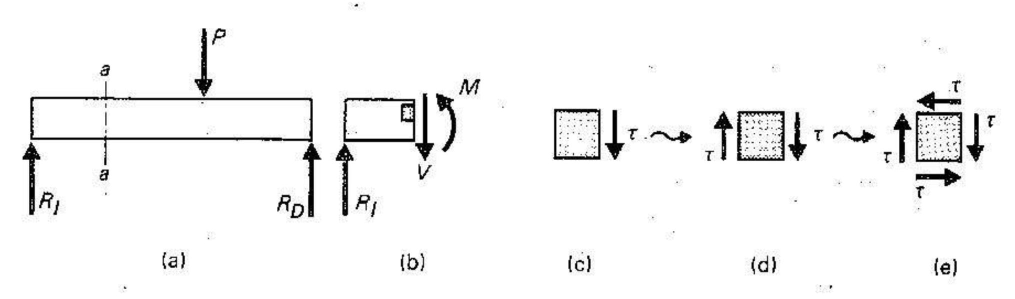
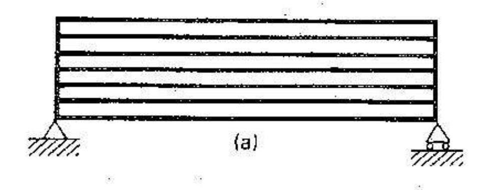
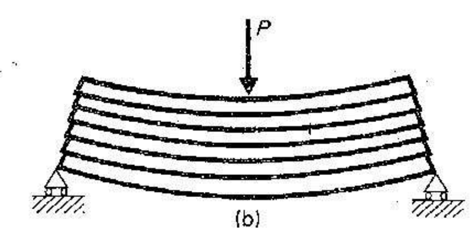


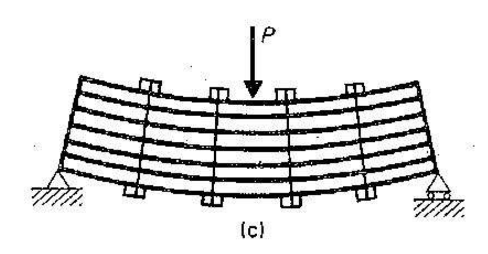
FIGURA 5.10

deración del esfuerzo cortante vertical, como tal, se hace muy pocas veces en el análisis y diseño de vigas. Sin embargo, los esfuerzos cortantes verticales se relacionan con los esfuerzos cortantes horizontales en las vigas, y esto es de gran importancia en algunos aspectos del diseño de vigas. Los esfuerzos cortantes horizontales deben considerarse en las dos aplicaciones importantes que se describen a continuación.

a) El material usado para la viga tiene una baja resistencia al esfuerzo cortante en una dirección (generalmente la horizontal). Esto ocurre en las vigas de madera.
b) Las partes de las vigas fabricadas deben estar unidas en una forma segura. Una viga de acero puede reforzarse uniéndole cubreplacas, y una viga de madera puede reforzarse uniéndole varias piezas más pequeñas. En estas aplicaciones se deben calcular las fuerzas cortantes horizontales para determinar el número requerido de clavos, de remaches, o de pernos, o la longitud de soldadura necesaria para que la sección compuesta trabaje como una unidad.







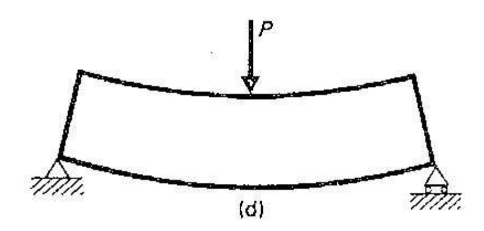


FIGURA 5.11

Hay dos métodos para establecer la existencia de los esfuerzos cortantes horizontales. Considérese una viga sujeta a cargas transversales como en la Fig. 5.10. La fuerza cortante vertical que actúa sobre cualquier sección, tal como la *a-a*, produce esfuerzos cortantes verticales. Sepárese un pequeño bloque de la viga y trácese un diagrama de cuerpo libre mostrando los esfuerzos cortantes en la superficie *a-a*. Como la viga está en equilibrio, el bloque también debe estar en equilibrio. Para conseguir que $\Sigma F_Y = 0$, $\Sigma F_X = 0$, y $\Sigma M = 0$, debe haber esfuerzos cortantes iguales (fuerzas) sobre las cuatro superficies en las direcciones indicadas en la Fig. 5.10 (e); es decir, el esfuerzo cortante horizontal en un punto dado debe ser igual al esfuerzo cortante vertical en ese punto. También puede notarse que siempre que haya un esfuerzo cortante en un punto de un bloque, debe haber esfuerzos cortantes iguales sobre las cuatro superficies mutuamente perpendiculares del bloque. Este concepto se discutió en la sección 3.4.

La Fig. 5.11 es otro ejemplo de la acción de los esfuerzos cortantes horizontales en una viga. En la Fig. 5.11 (a), se supone que la viga está compuesta de varias placas delgadas colocadas una sobre otra, pero sin estar unidas de ninguna manera. Cuando se aplica una carga a la viga y ocurre la deformación, las superficies de contacto entre las placas se deslizarán, y sus posiciones finales serán como se indica en la Fig. 5.11(b).

Si estas placas estuvieran unidas por algún medio antes de que se aplique la carga (por ejemplo, por medio de pernos), la viga actuará como una unidad, como se muestra en la Fig. 5.11 (c). Estos medios de conexión (los pernos considerados aquí) impedirán el deslizamiento de las superficies individuales. Por consiguiente los pernos están ejerciendo fuerzas horizontales.

Si la viga está compuesta de un solo bloque, y se aplica una carga sobre ella, como se muestra en la Fig. 5.11 (d), cada superficie horizontal tiende a deslizarse con respecto a la superficie adyacente. Realmente el deslizamiento no ocurre (excepto en el caso de una falla por esfuerzo cortante horizontal), pues la resistencia de la viga al esfuerzo cortante horizontal impide el deslizamiento; sin embargo, debe recordarse que en una viga que soporta cargas transversales existen esfuerzos cortantes horizontales.

5.6 Fórmula del esfuerzo cortante

En análisis y diseño de ingeniería interesa la magnitud y la distribución de los esfuerzos cortantes en las vigas. Una expresión para determinar los valores del esfuerzo cortante horizontal puede obtenerse de la manera siguiente:

La Fig. 5.12 (a) muestra una viga de ancho b que soporta cargas transversales. Quítese una sección de la viga de longitud dx y trácese un diagrama de cuerpo libre de esa porción de la viga (Fig. 5.12 b). El momento flexionante sobre la cara cd será mayor que el de la cara ab (según el diagrama de momentos, que no se muestra), y por consiguiente, los esfuerzos sobre las fibras de la cara cd serán mayores que los de la cara ab. Ahora considere el diagrama de cuerpo libre de una sección de la Fig. 5.12 (c), cortada a una distancia y_1 del eje neutro. Esto se muestra en la Fig. 5.12 (d). En este diagrama de cuerpo libre, la fuerza de compresión C_{ab} (resultante de $C = \sigma\, dA$ de cada fibra sobre ab arriba del corte) será menor que C_{cd} debido a que los esfuerzos sobre la cara ab son menores que los esfuerzos sobre la cara cd. Ya que esta sección debe estar en equilibrio y $\Sigma F_X = 0$, debe actuar una fuerza horizontal hacia la derecha. Esta fuerza es P_s, la fuerza cortante horizontal en la

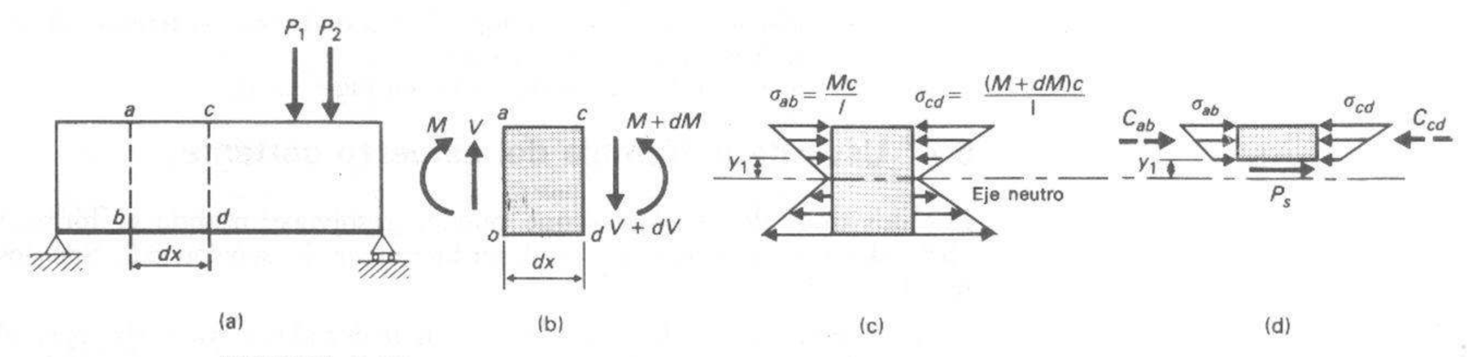


FIGURA 5.12

viga en esa sección. Dividiendo P_s entre el área sobre la cual actúa, obtenemos el esfuerzo cortante horizontal τ en la viga en ese lugar.

Los conceptos anteriores pueden expresarse en forma matemática como sigue:

$$C_{ab} = \int_{y_1}^{c} \sigma'_{ab}\, dA = \int_{y_1}^{c} \frac{My}{I}\, dA,$$

$$C_{cd} = \int_{y_1}^{c} \sigma'_{cd}\, dA = \int_{y_1}^{c} \frac{(M + dM)y}{I}\, dA.$$

$$\sum F_H = 0: \qquad C_{ab} + P_s = C_{cd} = 0,$$

$$P_s = C_{cd} - C_{ab} = \int_{y_1}^{c} \frac{(M + dM)y}{I}\, dA - \int_{y_1}^{c} \frac{My}{I}\, dA$$

$$= \frac{dM}{I}\int_{y_1}^{c} y\, dA = \frac{dM}{I} Q. \tag{a}$$

El término $\int_{y_1}^{c} y\, dA$ representa el momento estático del área con respecto al eje neutro, y normalmente se representa por Q. En otras palabras, $Q = \bar{y}\, A$ de la sección, donde $\bar{y}$ es la distancia desde el eje neutro al centroide del área que queda arriba (o abajo) del corte, y A es el área de la sección transversal que queda arriba (o abajo) del corte.

Por lo estudiado en capítulos anteriores, $P_s = \tau A = \tau b\, dx$ (sección 2.10), y $DM = V\, dx$ (sección 4.9). Haciendo estas substituciones en la ec. (a), obtenemos:

$$P_s = \tau b\, dx = \frac{dM}{I} Q, \quad \tau = \frac{dM}{dx}\frac{Q}{Ib}$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \tag{5.2}$$

donde:

τ = esfuerzo cortante horizontal, en lb/plg^2, o en N/m^2.
V = fuerza cortante vertical en la sección, en lb o en N,
Q = momento estático del área que queda arriba (o abajo) del corte ($Q = A\bar{y}$), en plg^3 o en m^3,
I = momento de inercia de toda el área de la sección transversal con respecto al eje neutro, en plg^4 o en m^4,
d = ancho de la sección del corte, en plg o en m.

5.7 Usos de la fórmula del esfuerzo cortante

Los dos tipos de problemas que pueden resolverse usando la fórmula (5.2) del esfuerzo cortante se describieron en la sección 5.6. Son los problemas de:

a) Encontrar el esfuerzo cortante en materiales cuya resistencia al esfuerzo horizontal es pequeña.

b) Diseñar o analizar conexiones en miembros compuestos, en lo que respecta a fuerzas cortantes horizontales.

Los ejemplos 5.6 a 5.8 ilustran, respectivamente, cada uno de estos tipos de problemas.

EJEMPLO 5.6 Trazar una gráfica de la distribución de esfuerzos para la vigueta I indicada en la Fig. 5.13. Calcular los valores a cada 30 mm del peralte, para una fuerza cortante de $V = 20$ kN.

SOLUCION La gráfica final se indica en la Fig. 5.13 (b). Los valores del esfuerzo cortante se calculan como sigue:

$$I = \tfrac{1}{12}(180 \times 10^{-3})(300 \times 10^{-3})^3 \quad \tfrac{1}{12}(120 \times 10^{-3})(180 \times 10^{-3})^3$$
$$= (405 \times 10^{-6}) - (58 \times 10^{-6}) = 347 \times 10^{-6}\ \text{m}^4.$$

Patín superior: En la parte superior de la viga, $Q = 0$; por consiguiente, $\tau = 0$

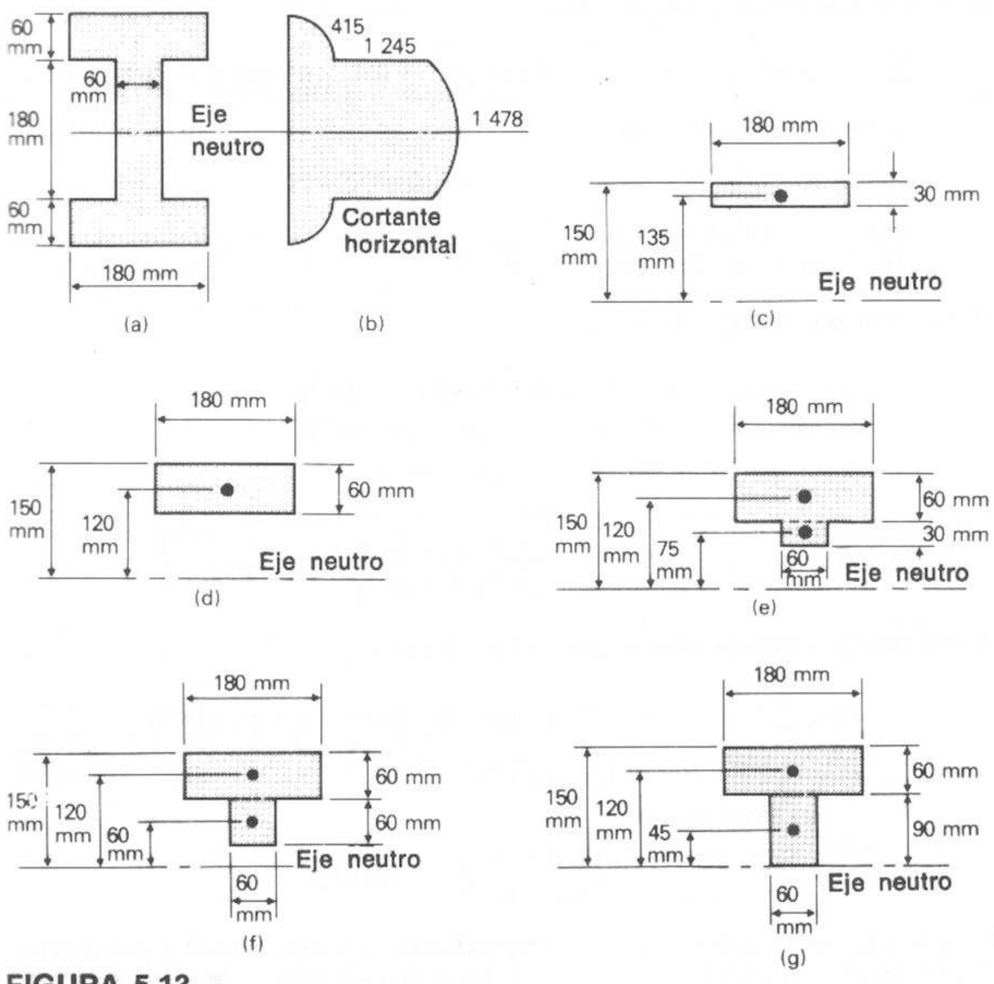


FIGURA 5.13

en la parte superior. A 30 mm por debajo (Fig. 5.13c),

$$Q = Ay = (180 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-3})(135 \times 10^{-3}) = 729 \times 10^{-6}\ \text{m}^3;$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(20 \times 10^3)(729 \times 10^{-6})}{(347 \times 10^{-6})(180 \times 10^{-3})} = 233\ \text{kPa}.$$

En un punto localizado a 60 mm debajo del borde superior (Fig. 5.13d) se calcularán dos valores, uno justamente arriba de la junta del patín y el alma, donde $b = 180$ mm, y el otro justamente debajo donde $b = 60$ mm. El momento estático Q será el mismo para cada lugar. Se obtiene:

$$Q = Ay(180 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3}) = 1\,296 \times 10^{-6}\ \text{m}^3;$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(20 \times 10^3)(1\,296 \times 10^{-6})}{(347 \times 10^{-6})(180 \times 10^{-3})} = 415\ \text{kPa};$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(20 \times 10^3)(1\,296 \times 10^{-6})}{(347 \times 10^{-6})(60 \times 10^{-3})} = 1\,245\ \text{kPA}.$$

A 90 mm por debajo (Fig. 5.13e);

$$\begin{aligned} Q = \sum Ay &= (180 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3}) + (60 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-3})(75 \times 10^{-3}) \\ &= (1\,296 \times 10^{-6}) + (135 \times 10^{-6}) \\ &= 1\,431 \times 10^{-6}\ \text{m}^3; \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(20 \times 10^3)(1\,431 \times 10^{-6})}{(347 \times 10^{-6})(60 \times 10^{-3})} = 1\,374\ \text{kPa}.$$

A 120 mm por debajo (Fig. 5.13f),

$$\begin{aligned} Q = \sum Ay &= (180 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3}) \\ &\quad + (60 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3}) \\ &= (1\,296 \times 10^{-6}) + (216 \times 10^{-6}) \\ &= 1\,512 \times 10^{-6}\ \text{m}^3; \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(20 \times 10^3)(1\,512 \times 10^{-4})}{(347 \times 10^{-6})(60 \times 10^{-3})} = 1\,452\ \text{kPa}.$$

A 150 mm por debajo (eje neutro) (Fig. 5.13 g),

$$\begin{aligned} Q = \sum Ay &= (1\,296 \times 10^{-6}) + (90 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})(45 \times 10^{-3}) \\ &= (1\,296 \times 10^{-6}) + (243 \times 10^{-6}) \\ &= 1\,539 \times 10^{-6}\ \text{m}^3; \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(20 \times 10^3)(1\,539 \times 10^{-6})}{(347 \times 10^{-6})(60 \times 10^{-3})} = 1\,478\ \text{kPa}.$$

Debido a la simetría, los valores correspondientes a puntos situados por debajo del eje neutro, son iguales a los calculados anteriormente. ■

EJEMPLO 5.7 Se va a fabricar una viga de 8 plg × 12 plg con secciones de madera como se muestra en la Fig. 5.14. Si los clavos se van a espaciar cada 3 plg, ¿son más deseables las cuatro secciones de 2 × 8 de la Fig. 5.16 (a) ó las dos de 2 × 12 y las dos de 2 × 4, de la Fig. 5.14 (b) con respecto a los esfuerzos cortantes? Las secciones de madera son de tamaño natural y $V = 1\ 000$ lb. Se tiene:

$$I = \tfrac{1}{12}(8)(12)^3 - \tfrac{1}{12}(4)(8)^3 = 1\ 152 - 171 = 981 \text{ plg}^4.$$

SOLUCION Calculamos la fuerza cortante horizontal sobre los clavos de la Fig. 5.14 (a). En este problema, como en muchos otros donde se requieren las fuerzas cortantes, es más conveniente determinar el "flujo cortante" que el esfuerzo cortante. El *flujo cortante* es la fuerza cortante por pulgada (o metro) de longitud y se calcula como:

$$q = \tau b = \frac{VQ}{I}.$$

Así, para la Fig. 5.14 (c),

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(1\ 000)(2 \times 8)(5)}{981}, \qquad q = 81.8 \text{ lb/plg}.$$

Como los clavos están espaciados 3 plg, la fuerza sobre cada par de clavos es:

$$P_s = (81.8 \text{ lb/plg})(3 \text{ plg.}) = 245.4 \text{ lb}.$$

La fuerza cortante sobre cada clavo es la mitad de 245.4, o sea 122.7 lb.

Para encontrar la fuerza cortante horizontal sobre los clavos de la Fig. 5.16 (b), se calcula (véase Fig. 5.14 d):

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(1\ 000)(2 \times 4)(5)}{981}, \qquad q = 40.9 \text{ lb/plg}$$

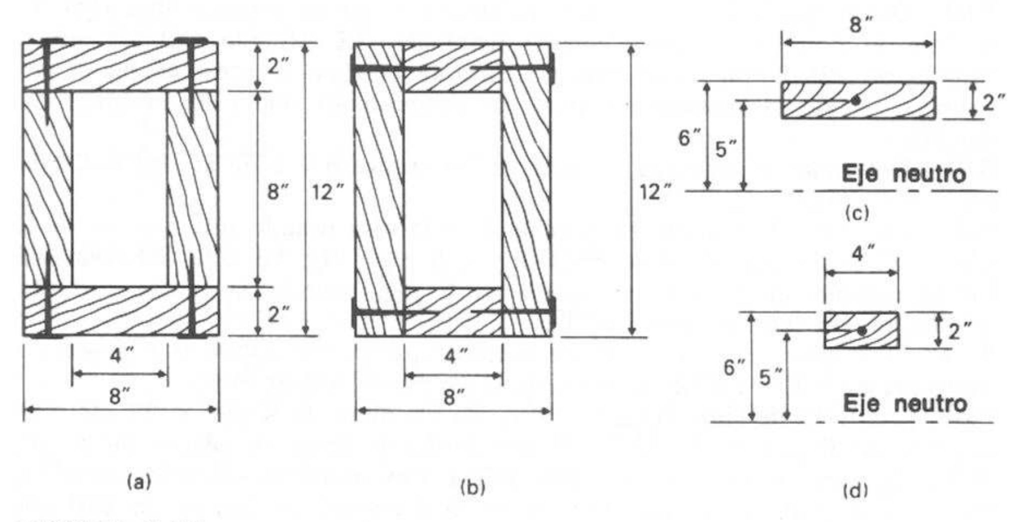


FIGURA 5.14

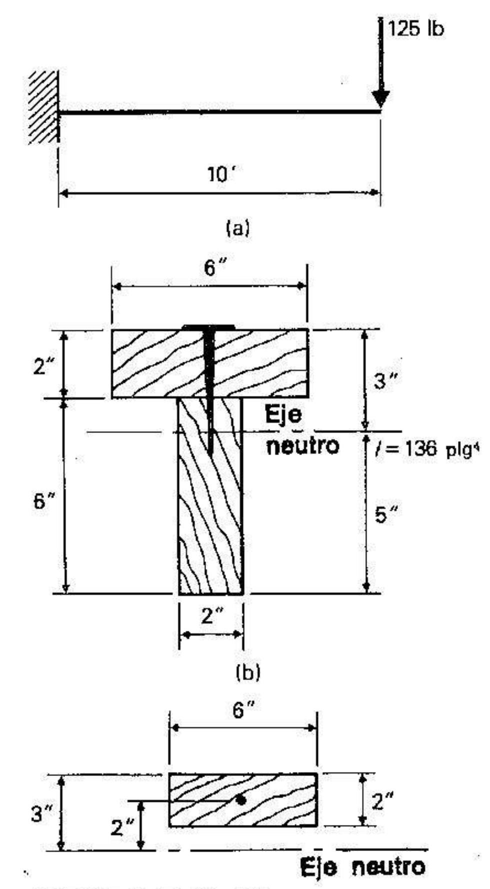


FIGURA 5.15 (c)

La fuerza sobre cada par de clavos es:

$$P_s = (40.9 \text{ lb/plg})(3 \text{ plg}) = 122.7 \text{ lb}.$$

La fuerza sobre cada clavo es la mitad de esta fuerza, o sea 61.4 lb. Por consiguiente, con relación a la fuerza cortante soportada por los clavos, es preferible el arreglo mostrado en la Fig. 5.14 (b). ■

EJEMPLO 5.8 Determine el espaciamiento necesario de los clavos, Ref. 10 *d*, para asegurar que la viga de sección *T* consistente de dos secciones de madera de 2 plg × 6 plg mostrada en la Fig. 5.15 actúe como una unidad. La resistencia permisible para esfuerzo cortante horizontal de un clavo 10 *d* es de 94 lb.

SOLUCION La fuerza cortante es de valor constante e igual a 125 lb, de modo que los clavos pueden quedar igualmente espaciados a través de la longitud de la viga. El flujo cortante para cualquier sección es:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(125)(2 \times 6)(2)}{136}, \qquad q = 22.1 \text{ lb/plg}.$$

Como se debe obtener una resistencia al esfuerzo cortante de 22.1 lb por cada pulgada de longitud, el espaciamiento de los clavos es:

$$\text{espaciamiento} = \frac{94 \text{ lb}}{22.1 \text{ lb/plg}} = 4.25 \text{ plg} \qquad ■$$

Problemas

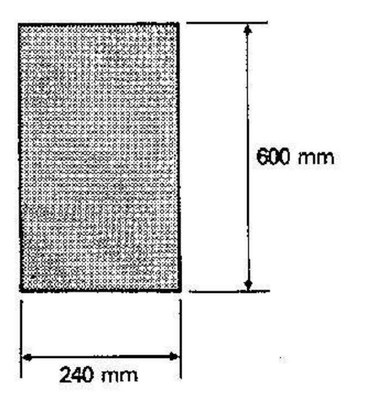


FIGURA P5.27

5.27-5.28 Trace una gráfica de la distribución del esfuerzo cortante para las secciones indicadas en las Figs. P5.27 y P5.28. Suponga que $V = 48$ kN.
5.29 Determine el esfuerzo cortante en el eje neutro de la sección circular de 1 plg de diámetro indicada en la Fig. P5.29; $V = 2\,000$ lb.
5.30 Determine la fuerza cortante máxima que puede soportar una viga de madera de 2 plg × 10 plg (tamaño nominal). El esfuerzo cortante admisible es de 120 lb/plg² y el esfuerzo cortante máximo se presenta en el eje neutro. (Véase el Apéndice I para las dimensiones reales de la pieza de madera.)
5.31 Determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b* de la viga indicada en la Fig. P5.31.
5.32 Una viga de madera de sección *I* se fabrica usando una sección de 2 plg × 12 plg y dos secciones de 2 plg × 8 plg (Fig. P5.32). Determine la fuerza cortante en los clavos espaciados 5 plg, cuando la fuerza cortante vertical en esa sección es de 150 lb.
5.33 Determine la fuerza cortante máxima que puede aplicarse a la sección mostrada en la Fig. P5.32 cuando cada clavo puede resistir 90 lb.
5.34 Una viga de alma llena se forma de un alma de ⅜ plg × 36 plg, dos ángulos de 6 plg × 6 plg × ⅝ plg arriba y abajo, y placas de 1 plg × 14 plg, como se muestra en la Fig. P5.34. Determine los esfuerzos sobre los remaches *A* y *B*. La fuerza cortante vertical en esa sección es de 180 klb y el espaciamiento de los remaches es de 4 plg.

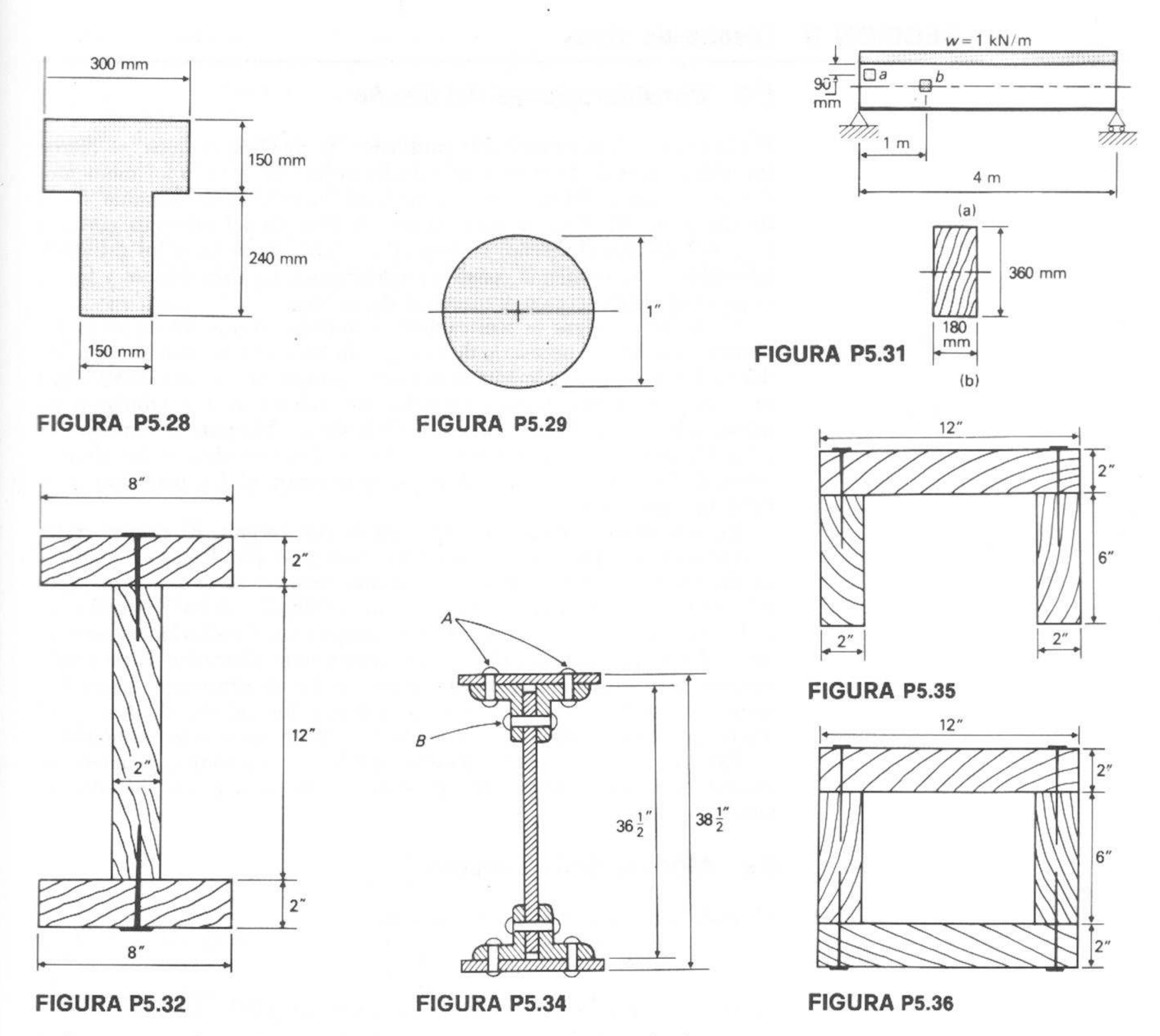


FIGURA P5.28

FIGURA P5.29

FIGURA P5.31

FIGURA P5.35

FIGURA P5.32

FIGURA P5.34

FIGURA P5.36

5.35 Una viga de madera está hecha en forma de canal clavando dos piezas de 2 plg × 6 plg a una pieza de 2 plg × 12 plg, como se muestra en la Fig. P5.35. Cada clavo puede resistir una fuerza cortante de 94 lb y la fuerza cortante sobre la sección es de 200 lb. Determine el espaciamiento longitudinal de los clavos. Puede trabajarse con la sección nominal de la madera.

5.36 Resuelva el problema 5.35, suponiendo que se usa una pieza adicional de 2 plg × 12 plg en la parte inferior, formando una sección en forma de caja como se muestra en la Fig. P5.36.

SECCION B Diseño de vigas

5.8 Consideraciones del diseño

Hasta aquí, se han considerado problemas de análisis; es decir, se dieron las dimensiones de la viga, y se calcularon los esfuerzos o los momentos (cargas). Los problemas de diseño también utilizan la fórmula de la flexión $\sigma = Mc/I$ y, ocasionalmente, la fórmula del esfuerzo cortante $\tau = VQ/Ib$. En el diseño, se conoce el claro, la carga, y los esfuerzos admisibles, y el problema consiste en determinar las dimensiones y forma requeridas de la sección transversal de la viga.

El diseño de vigas es teóricamente complejo porque involucra la determinación del I/c necesario de la viga. Sin embargo, la solución práctica del problema es generalmente muy simple porque la mayoría de las vigas se consiguen en dimensiones estándar con valores de I/c tabulados en tablas adecuadas. En el diseño de las vigas debemos determinar el valor I/c necesario a partir de I/c M/σ, y después obtener las dimensiones de la sección transversal que proporcionará el I/c necesario o un valor ligeramente mayor.

En este libro, el diseño se explicará en dos formas. El primer tratamiento será semejante al que pudiera a aplicarse problemas elementales de diseño de máquinas, donde la sección transversal es una área geométrica simple, tal como un círculo, un rectángulo, o un triángulo. Se deducirán las relaciones I/c de formas simples y se igualarán los resultados al I/c requerido para obtener las dimensiones deseadas. El segundo método se usa para seleccionar vigas en las dimensiones comercialmente disponibles. En este caso, se tabulan los valores de I/c, y el diseño se lleva a cabo seleccionando las dimensiones más económicas.

Para aquellos casos en los que los perfiles no son formas geométricas simples o formas comerciales estándar, debe usarse un método de tanteo.

5.9 Módulo de la sección

El módulo de la sección se define como

$$S = \frac{I}{c}. \tag{5.3}$$

Con esta definición la fórmula de la flexión se puede escribir como

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}.$$

5.10 Diseño de vigas que tienen formas geométricas simples

Cuando el área de la sección transversal de una viga es un círculo, un rectángulo, un triángulo, u otra forma geométrica, para las cuales se

cuenta con fórmulas para el momento de inercia y el centroide, sus dimensiones pueden determinarse usando la definición del módulo de la sección. Si se dan las cargas y los esfuerzos admisibles, el módulo de la sección necesario puede calcularse a partir de $S_{necesario} = M/\sigma$. Después se usa la definición de módulo de la sección ($S = I/c$) para determinar las dimensiones de la sección transversal. Los ejemplos siguientes ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 5.9 Una viga de aluminio de 2 m de longitud soporta una carga de 12 kN aplicada a 0.8 m de un extremo (véase Fig. 5.16). La sección transversal de la viga debe ser rectangular, con un peralte igual al doble del ancho. El esfuerzo permisible es de 80 MPa. Determinar las dimensiones necesarias.

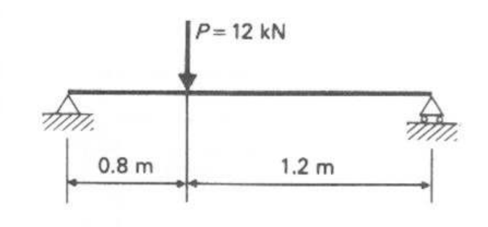


FIGURA 5.16

SOLUCION

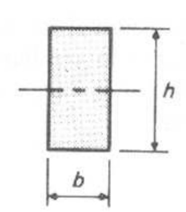
$$M_{máx} = \frac{Pab}{L} = \frac{(12\,000)(0.8)(1.2)}{2} = 5\,760 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El módulo de la sección necesario es:

$$S_{necesario} = \frac{M}{\sigma} = \frac{5\,760 \text{ N} \cdot \text{m}}{80 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 72 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

La sección necesaria es rectangular. El módulo de la sección para esta forma se encuentra como sigue:

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3, \quad c = \frac{h}{2}; \qquad S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \tfrac{1}{6}bh^2.$$



Igualando el módulo de la sección necesario con el de un rectángulo, se ve que:

$$S_{proporcionado} = S_{necesario}; \qquad \tfrac{1}{6}bh^2 = 72 \times 10^{-6}, \quad h = 2b, \quad \tfrac{1}{6}b(2b)^2 = 72 \times 10^{-6},$$

según la cual

$$b^3 = 108 \times 10^{-6} \text{ m}^3;$$

por consiguiente,

$$b = 0.0477 \text{ m} = 47.7 \text{ mm}, \quad h = 2b = 95.4 \text{ mm}. \quad ■$$

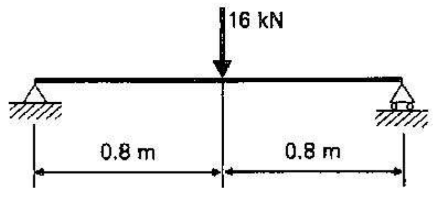


FIGURA 5.17

EJEMPLO 5.10 Una parte de una máquina tiene 1.6 m de longitud y soporta una carga de 16 kN en su centro (Fig. 5.17). El esfuerzo admisible es de 110 MPa. Determine el diámetro necesario para una sección circular.

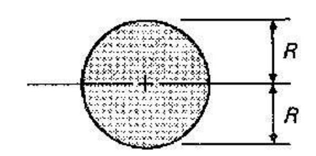
SOLUCION

$$M_{\text{máx}} = \frac{PL}{4} = \frac{(16\,000)(1.6)}{4} = 6\,400 \text{ N}\cdot\text{m};$$

$$S_{\text{necesario}} = \frac{M}{\sigma} = \frac{6\,400}{110 \times 10^6} = 58.2 \times 10^{-6}.$$

El módulo de la sección para una sección circular se deduce así:

$$I = \frac{\pi D^4}{64}, \quad c = \frac{D}{2}; \qquad S = \frac{I}{c} = \frac{\pi D^4/64}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}.$$



Igualando el módulo de la sección necesario con el de una sección circular, tenemos

$$S_{\text{proporcionado}} = S_{\text{requerido}}; \qquad \frac{\pi D^3}{32} = 58.2 \times 10^{-6},$$

$$D^3 = 593 \times 10^{-6},$$

$$D = 84 \text{ mm}. \quad ■$$

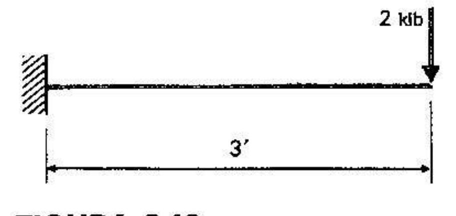


FIGURA 5.18

EJEMPLO 5.11 La sección transversal de una viga en voladizo de 3 pies de longitud (Fig. 5.18) es un triángulo equilátero. Determine las dimensiones de la viga, suponiendo que soporta una carga de 2 klb en su extremo. El esfuerzo admisible es de 16 klb/plg².

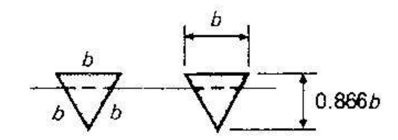
SOLUCION

$$M_{\text{máx}} = PL = (2)(3) = 6 \text{ klb-pies}$$

$$S_{\text{necesario}} = \frac{M}{\sigma} = \frac{6 \times 12}{16} = 4.5 \text{ plg}^3$$

El módulo de la sección de una sección triangular se deduce como sigue:

$$I = \tfrac{1}{36}bh^3, \quad c = \tfrac{2}{3}h; \qquad S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{36}bh^3}{\frac{2}{3}h} = \frac{1}{24}bh^2.$$



Para un triángulo equilátero, la altura es $(\sqrt{3}/2)\ b = 0.866b$. Igualando el módulo de la sección necesario, con el proporcionado, obtenemos:

$$S_{\text{proporcionado}} = S_{\text{necesario}}; \quad \tfrac{1}{24}bh^2 = 4.5, \quad \tfrac{1}{24}b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 = 4.5,$$

$$b^3 = 144, \qquad b = 5.24 \text{ plg} \quad ■$$

Problemas

5.37 La viga *BCD* de la Fig. P5.37 está formada de dos barras, de ¾ plg de ancho cada una. Se aplica una fuerza de 1 000 lb como se indica, y el esfuerzo admisible es de 16 000 lb/plg². Determine el peralte necesario.

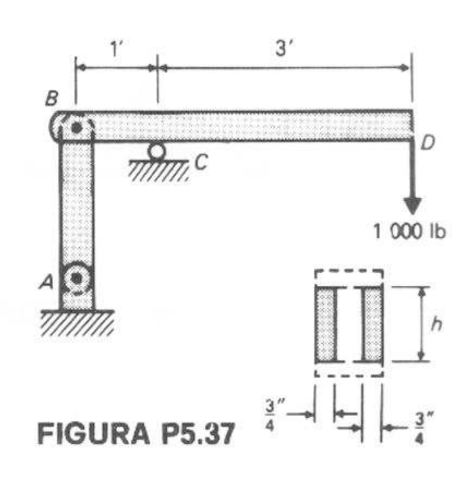


FIGURA P5.37

5.38 Un muelle de ballesta de 240 mm de longitud (Fig. P5.38) soporta una carga de 200 N en su extremo. El espesor va a ser de 5 mm y el esfuerzo permisible es de 330 MPa. Determine el ancho necesario.

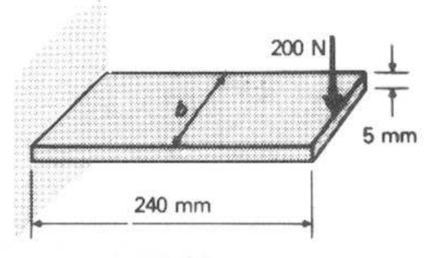


FIGURA P5.38

5.39 La varilla redonda indicada en la Fig. P5.39 está sujeta a una fuerza de 3 600 N. Determinar el diámetro requerido. El esfuerzo admisible es de 110 MPa.

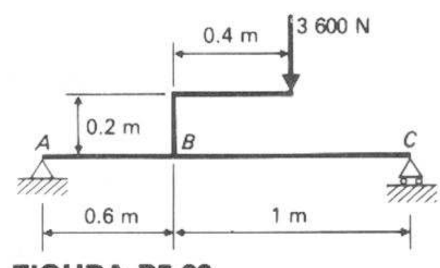


FIGURA P5.39

5.40 Se necesita una viga para soportar cargas que producen un momento flexionante de 6 000 lb-pie. Determinar las dimensiones, suponiendo que la sección transversal tiene la forma de un triángulo isósceles cuya base es la mitad de la altura. El esfuerzo admisible es de 15 000 lb/plg².

5.41 La palanca indicada en la Fig. P5.41 debe ejercer una fuerza de 5 000 N en *B*. Diseñar la palanca con un peralte igual a tres veces su ancho. El esfuerzo admisible es de 110 MPa.

5.42 Una parte de una máquina soporta cargas que producen un momento flexionante máximo de 10 000 lb-plg. Si la sección transversal de esta viga es un semicírculo y el esfuerzo admisible es de 16 000 lb/plg², ¿cuál es el diámetro necesario?

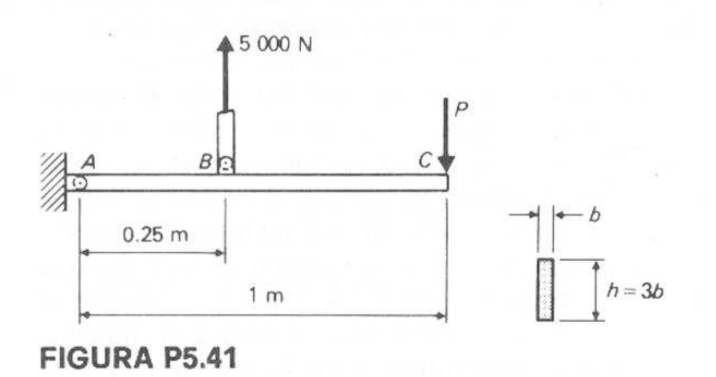


FIGURA P5.41

5.11 Diseño usando perfiles estándar, disponibles comercialmente

El procedimiento de diseño descrito en la sección anterior es difícil de aplicar si la sección transversal de la viga fuera diferente de una de las

formas geométricas simples. El diseño de vigas que tienen formas compuestas se hace mediante uno de dos métodos –ya sea eligiendo una sección a partir de las muchas formas y tamaños estándar, comercialmente disponibles, o por tanteos. El primer procedimiento es el método más común y fácil en el diseño estructural. Se recurre al método de tanteos solamente en casos en que la forma y dimensiones de la viga no sean estándar.

El diseño estructural normal consiste en elegir la forma y dimensiones de la viga más económica, a partir de perfiles estándar, comercialmente disponibles. En el diseño de vigas de acero, las formas más comúnmente usadas son de patín ancho (W)*, la Estándar Americana (S) en canal (C), o en ángulo. En el Apéndice J se presentan tablas con las dimensiones de algunos de estos perfiles. En el manual Steel Construction que publica el American Institute of Steel Construction se puede encontrar una lista completa de ellos.

Las vigas de madera son otros materiales estructurales comúnmente usados. Las dimensiones de una viga de madera se dan mediante su tamaño nominal. Sin embargo, este generalmente no proporciona las dimensiones verdaderas, ya que las cuatro caras de una viga de madera se cepillan en el aserradero. El tamaño nominal, llamado también la "dimensión sin labrar", es la dimensión de la viga antes de que se cepillen los lados. El tamaño labrado, es el tamaño después del cepillado que es como generalmente se compra en las madererías. Por ejemplo, un tamaño nominal de 2 × 6 realmente mediría $1\frac{1}{2}$ plg × $5\frac{1}{2}$ plg. En el Apéndice I hay una tabla donde se indica el tamaño nominal, el tamaño labrado y las propiedades de diseño. También se usa el símbolo S4S para describir una pieza de madera cepillada por los cuatro lados.

El procedimiento básico en el diseño estructural es determinar el módulo de la sección necesario dividiendo el momento flexionante máximo por el esfuerzo permisible, y después escoger un tamaño de viga que proporcionará ese módulo de la sección o un valor ligeramente mayor.

Es conveniente hacer aquí unos cuantos comentarios sobre la economía en la selección de tamaños. Las vigas de acero se venden sobre la base de su peso. Entre más ligera es una viga, es menos costosa, independiente de su peralte. Por consiguiente, la viga de acero más liviana que proporcione la resistencia necesaria es la menos costosa. Frecuentemente las consideraciones prácticas de diseño requieren el uso de secciones que pueden pesar más de lo que se requiere, pero que se ajustan más fácilmente al detalle general de construcción. Como hay muchas consideraciones prácticas de diseño que influyen en la elección de una viga, es imposible considerarlas en este libro. Para nuestros propósitos, la viga más económica es la sección de menor peso que proporcione la resistencia necesaria.

La madera se vende por pie de tablón, basado en el tamaño nominal.

---

* N. del R. En México se usa también la notación WF, pero se dejó la denominación Americana W debido a que en otros países se usa bastante.

Un pie tablón es el volumen equivalente a un tablón de 1 pie de largo por 1 pie de ancho y por 1 plg de grueso. Por ejemplo, una viga de 3 plg × 8 plg y de 8 pies de longitud contendría (3 × 8) / (12 × 1) = 2 pie tablones/pie. Para 8 pies de longitud, la pieza contendría 2 × 8 = 16 pies tablones de madera. El módulo de sección varía con el cuadrado del peralte y directamente con el ancho. Por consiguiente, las secciones de mayor peralte son las más económicas.

Los ejemplos 5.12 y 5.13 ilustran el diseño de vigas de acero y de madera.

EJEMPLO 5.12 Diseñe una viga de acero que soporte las cargas mostradas en la Fig. 5.19. El esfuerzo de flexión admisible es de 24 klb/plg².

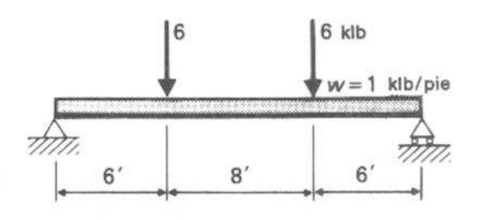


FIGURA 5.19

SOLUCION El momento máximo puede calcularse combinando los casos 3 y 4 del Apéndice D:

$$M = \tfrac{1}{8}wL^2 + Pa = \tfrac{1}{8}(1)(20)^2 + (6)(6), \quad M = 86 \text{ klb-pie}$$

$$S_{\text{necesario}} = \frac{M}{\sigma} = \frac{(86 \times 12)}{24} = 43 \text{ plg}^3$$

Según las tablas de perfiles estructurales dados en el Apéndice J, se pueden usar:

W 8 × 48,	$S = 43.3$ plg³	W 14 × 34,	$S = 48.6$ plg³
W 10 × 45,	$S = 49.1$ plg³	W 16 × 36,	$S = 56.5$ plg³
W 12 × 35,	$S = 45.6$ plg³	S 12 × 40.8,	$S = 45.4$ plg³

Entre todas estas posibilidades, la de menor peso, y por consiguiente, la sección más económica, sería la W 14 × 34. ■

EJEMPLO 5.13 Diseñe la viga de madera más económica (tamaño labrado) para soportar las cargas mostradas en la Fig. 5.20. El esfuerzo de flexión admisible es de 1 500 lb/plg².

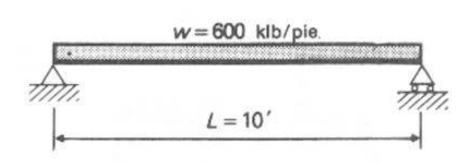


FIGURA 5.20

SOLUCION Las superficies labradas o cepilladas se dan en el Apéndice *I*:

$$M = \tfrac{1}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}(600)(10)^2 = 7\,500 \text{ lb-pie}$$

$$S_{\text{necesaria}} = \frac{M}{\sigma} = \frac{(7\,500 \times 12)}{1\,500} = 60 \text{ plg}^3$$

Según el Apéndice H se podrían usar:

4 × 12,	$S = 73.8$ plg³
6 × 10,	$S = 82.7$ plg³
8 × 8,	$S = 70.3$ plg³

Vemos que el tamaño de 4 × 12 sería el más económico, ya que tiene 4 pies tablón/pie. ■

5.12 Esfuerzo cortante en el diseño

El esfuerzo cortante debe considerarse en el diseño de cualquier viga. Como el esfuerzo cortante frecuentemente no es tan crítico en el diseño de las vigas como los esfuerzos de flexión, el procedimiento normal consiste en dimensionar la viga sobre la base de los esfuerzos de flexión, y verificar que en esa sección no hay esfuerzos cortantes excesivos.

Como en la práctica, los esfuerzos cortantes nunca controlan el diseño de las vigas de acero, a menos que se apliquen grandes cargas concentradas cerca de los apoyos, no se considerarán aquí. Sin embargo, se recomienda al lector que investigue las especificaciones de diseño, en el raro caso en que se apliquen cargas concentradas grandes cerca de un apoyo.

Para las vigas de madera, cuya capacidad para resistir fuerzas cortantes horizontales es muy baja, los esfuerzos cortantes controlan frecuentemente el diseño. Como se indicó anteriormente, el procedimiento usual consiste en diseñar la viga sobre la base de los esfuerzos de flexión, y después revisar para los esfuerzos cortantes horizontales. Si el cortante horizontal es excesivo, debe incrementarse el tamaño para reducir el esfuerzo cortante hasta límites permisibles.

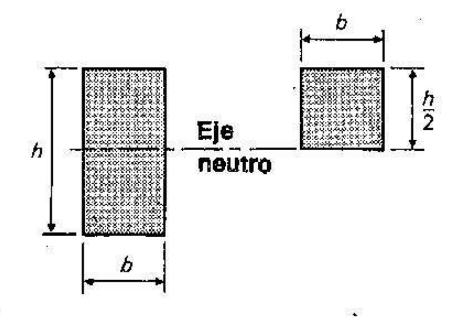


FIGURA 5.21

El esfuerzo cortante horizontal máximo ocurre en el eje neutro (excepto en vigas que tienen lados ahusados, tales como un triángulo). Como la mayoría de las vigas de madera son rectangulares, la fórmula del esfuerzo cortante, ec. (5.2), puede volver a escribirse para obtener el esfuerzo cortante máximo para este caso, como se muestra en los cálculos que siguen (véase Fig. 5.21):

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V[b(h/2)](h/4)}{(\frac{1}{12}bh^3)(b)}, \quad \tau = \frac{3V}{2bh} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}.$$

El área A puede obtenerse en las tablas de propiedades de diseño dadas en el Apéndice *I*.

EJEMPLO 5.14 Diseñe la viga de madera mostrada en la Fig. 5.22. El esfuerzo de flexión admisible es τ = 1 500 lb/plg², y el esfuerzo cortante admisible es de τ = 120 lb/plg².

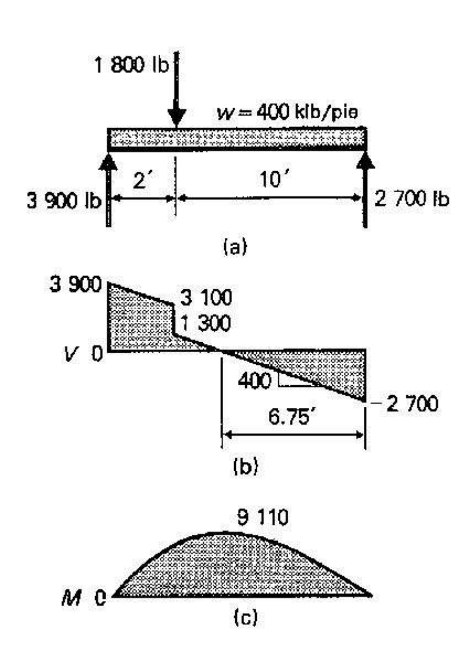


FIGURA 5.22

SOLUCION Por estática, calculamos las reacciones R_I = 3 900 lb y R_D = 2 700 lb. Los diagramas de V y M se muestran en la Fig. 5.22 (b) y (c). Calculando:

$$M_{máx} = \tfrac{1}{2}(2\ 700)(6.75) = 9\ 110 \text{ lb-pies}$$

$$S_{necesario} = \frac{M}{\sigma} = \frac{9\ 110(12)}{1\ 500} = 72.9 \text{ plg}^3$$

Ensayemos una sección de 4 × 12 (que tiene un S = 73.8 plg³) y verifiquemos el esfuerzo cortante horizontal:

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3(3\ 900)}{2(39.4)} = 148 \text{ lb/plg}^2 > 120 \text{ lb/plg}^2$$

Este diseño no cumple las condiciones. Por consiguiente, probemos una sección

de 6 × 10 (que tiene un S = 82.7 plg³) y verifiquemos otras vez el esfuerzo cortante horizontal:

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3(3\,900)}{2(52.25)} = 112 \text{ lb/plg}^2 < 120 \text{ lb/plg}^2$$

Este diseño soportará la carga, y se puede usar una viga de madera de 6 × 10 S4S. ■

5.13 Vigas no apoyadas lateralmente

Todo el material explicado hasta aquí en este capítulo se ha basado en la suposición de que la parte en compresión de la viga está apoyada lateralmente; es decir, que el patín a compresión no puede torcerse hacia los lados. La Fig. 5.23 (a) y (b) muestra vigas que están lateralmente apoyadas, y la Fig. 5.23 (c) muestra una viga que no está apoyada lateralmente.

Ciertas secciones de vigas son inestables cuando no están apoyadas lateralmente y son relativamente largas. Las cargas tienden a "salirse" de la viga, y por tanto, ésta sólo puede soportar una carga mucho menor. En ausencia de apoyo lateral, las "secciones abiertas", tales como

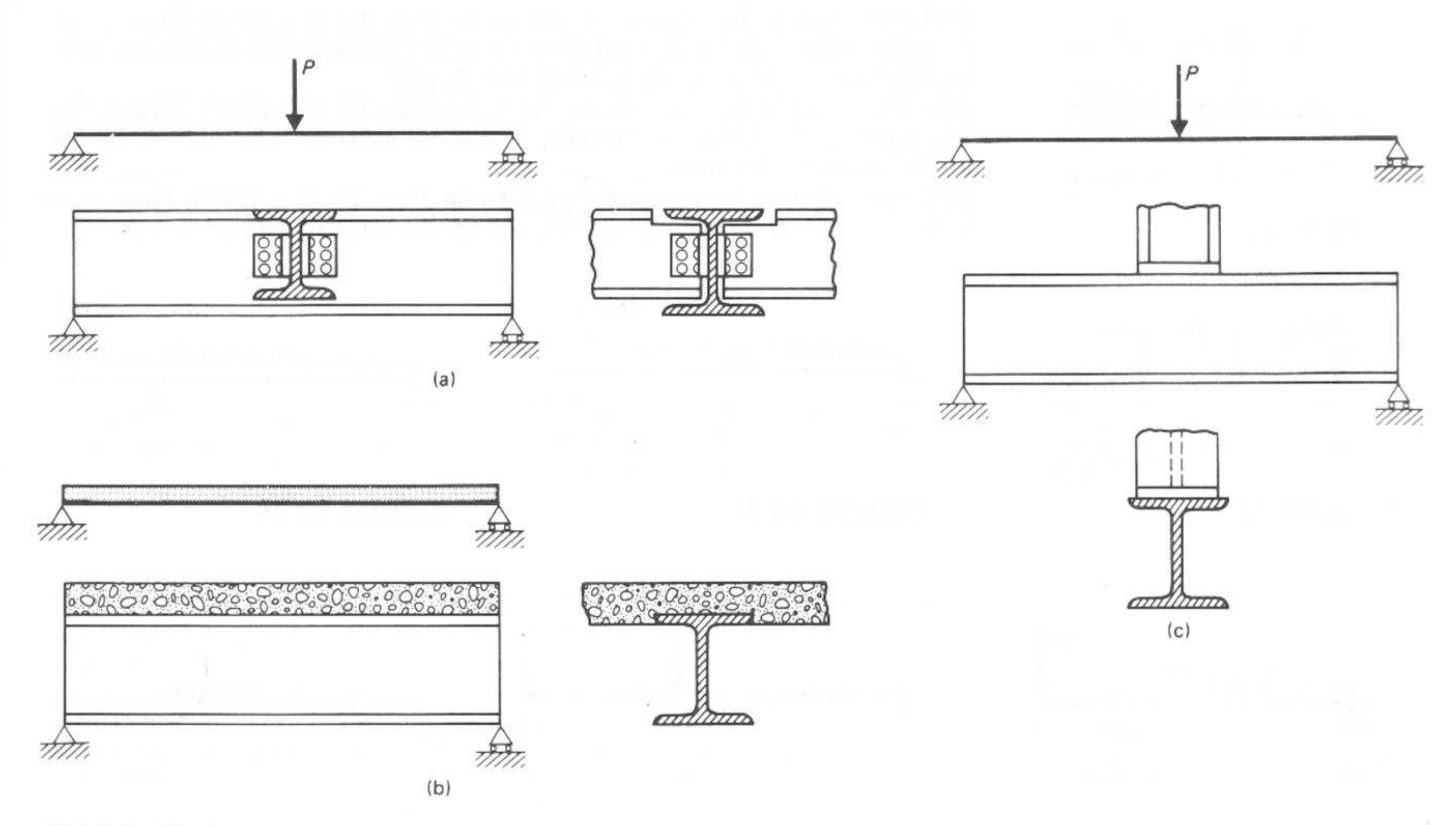


FIGURA 5.23

las vigas W y S son muy débiles, mientras que las secciones "cerradas" o en caja pueden soportar cargas mucho mayores.

El análisis de los esfuerzos y la estabilidad de vigas no apoyadas lateralmente es extremadamente complejo. Si se va a diseñar una de tales vigas, la práctica aceptada es seguir las especificaciones de diseño, ya que en ellas se prevén las posibles fallas por inestabilidad de las vigas no apoyadas lateralmente (o para las vigas donde los apoyos laterales están espaciados grandemente), reduciendo el esfuerzo admisible.

Las especificaciones de 1978 del American Institute of Steel Construction requieren que si los apoyos laterales están espaciados más de 13 veces apropiadamente, el espesor del patín a compresión, debe reducirse el esfuerzo admisible. Las fórmulas para este esfuerzo reducido parecen complejas, pero las tablas disponibles en el manual *Steel Construction* vuelven relativamente fácil ese problema normalmente tedioso.

En este libro no se explicará el diseño de vigas no apoyadas lateralmente, pero se advierte al estudiante que recuerde siempre que para las vigas no apoyadas lateralmente, aunque escasas, en la práctica, un diseño inadecuado tendría serias consecuencias.

Problemas

5.42-5.47 Diseñe las vigas mostradas en las Figs. P5.42 a P5.47. Elija la viga de patín ancho más ligera a partir de las tablas del Apéndice J. Use en todos los casos un esfuerzo admisible de 24 000 lb/plg^2.

5.48-5.50 Diseñe las vigas mostradas en las Figs. P5.48 a P5.50. Elija la viga más ligera en las tablas de Apéndice J. Use un esfuerzo admisible de 24 000 lb/plg^2 en todos los casos.

5.51-5.53 Diseñe las vigas mostradas en las Figs. P5.51 a P5.53. Estas vigas se van a fabricar de ángulos dobles, ya sea de lados iguales o de lados des-

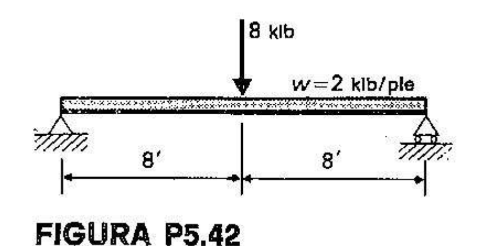


FIGURA P5.42

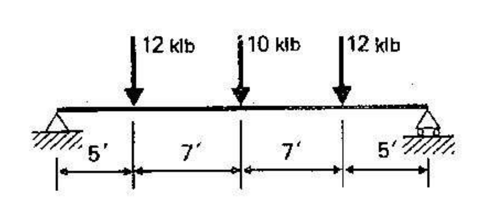


FIGURA P5.43

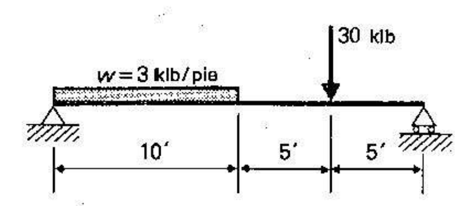


FIGURA P5.44

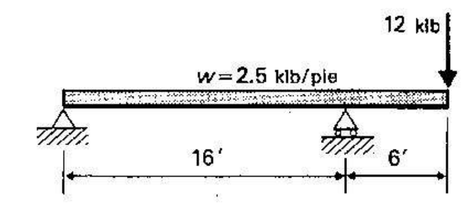


FIGURA P5.45

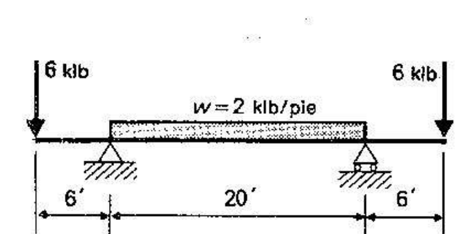


FIGURA P5.46

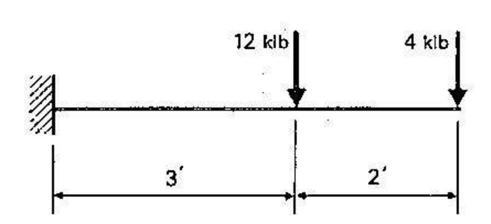


FIGURA P5.47

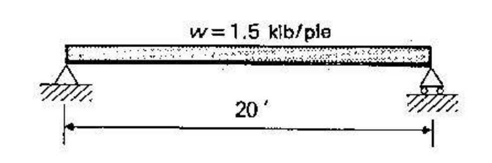


FIGURA P5.48

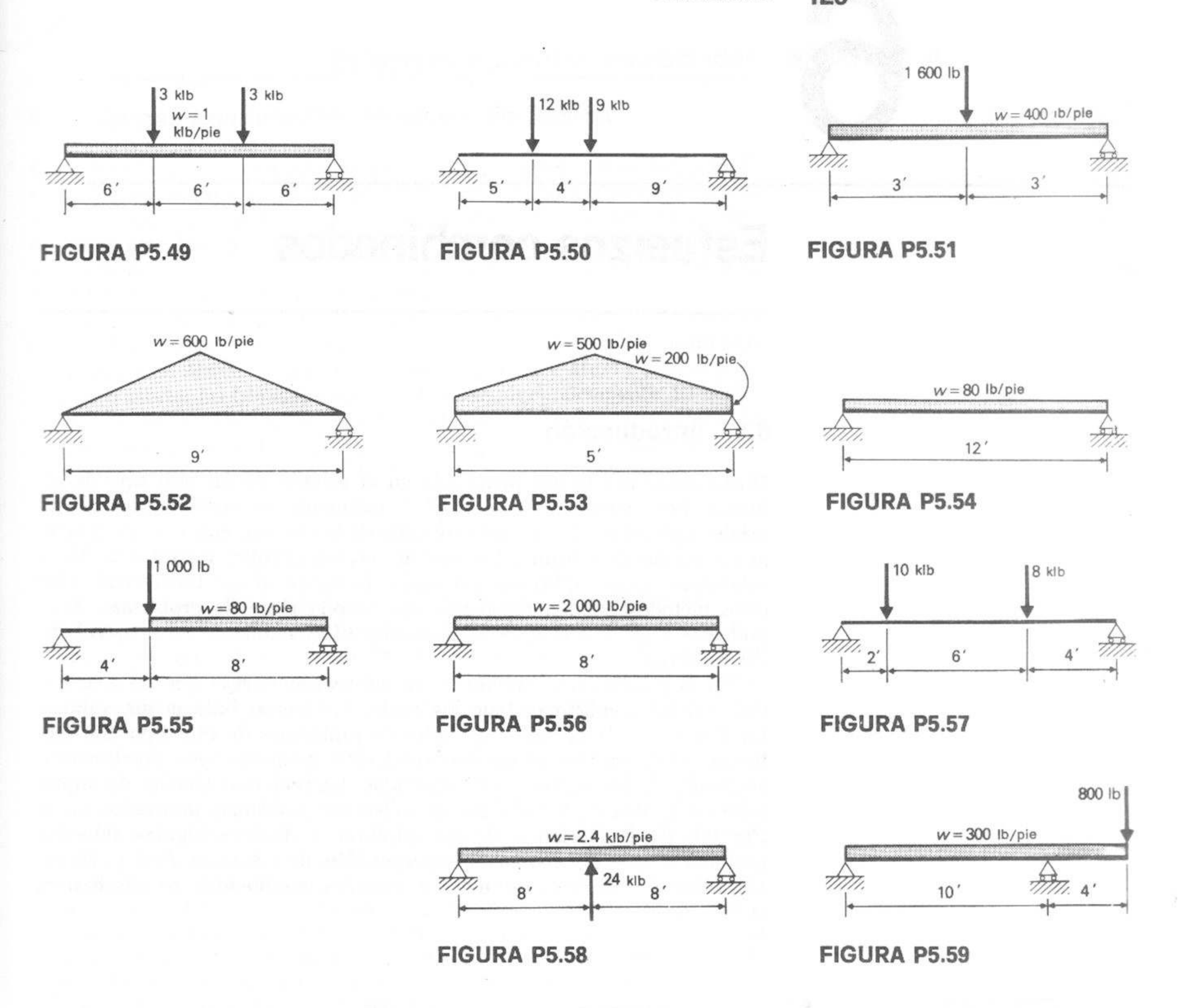


FIGURA P5.49

FIGURA P5.50

FIGURA P5.51

FIGURA P5.52

FIGURA P5.53

FIGURA P5.54

FIGURA P5.55

FIGURA P5.56

FIGURA P5.57

FIGURA P5.58

FIGURA P5.59

iguales. Procure seleccionar los ángulos más ligeros disponibles en las tablas del Apéndice J. El esfuerzo admisible es de 22 000 lb/plg^2.

5.54-5.59 Diseñe las vigas mostradas en las figs. P5.54 a P5.59. Estas vigas se van a hacer de madera, cepilladas por los cuatro lados (S4S). Las propiedades de diseño se dan en el Apéndice I. En todos los casos use un esfuerzo de flexión admisible de 1 500 lb/plg^2 y un esfuerzo cortante admisible de 120 lb/plg^2.

6

Esfuerzos combinados

6.1 Introducción

Hasta ahora nos hemos interesado en el cálculo de un sólo tipo de esfuerzo. Por ejemplo, con $\sigma = P/A$ solamente se consideraron cargas axiales aplicadas a través del centroide de la sección, con $\tau = Tc/J$ solamente cargas de torsión sobre ejes de sección circular, y para $\sigma = Mc/I$ solamente cargas aplicadas perpendicularmente al eje transversal. Con estos métodos pueden resolverse una amplia clase de problemas. Pero podemos ampliar esta clase combinando adecuadamente estos tipos básicos de carga.

En la práctica frecuentemente se encuentran cargas que no concuerdan con las condiciones bajo las cuales las teorías básicas son válidas. La Fig. 6.1 muestra varios ejemplos de problemas de este tipo. Sin embargo, estos problemas pueden resolverse mediante una combinación adecuada de los métodos ya estudiados. La poderosa técnica de superposición se usa en la solución de todos los problemas mostrados en la Fig. 6.1. En la sección A de este capítulo se discuten algunos de estos problemas, que involucran la superposición de esfuerzos P/A y Mc/I. Los casos de esfuerzos normales y cortantes combinados, se estudian en la Sección B.

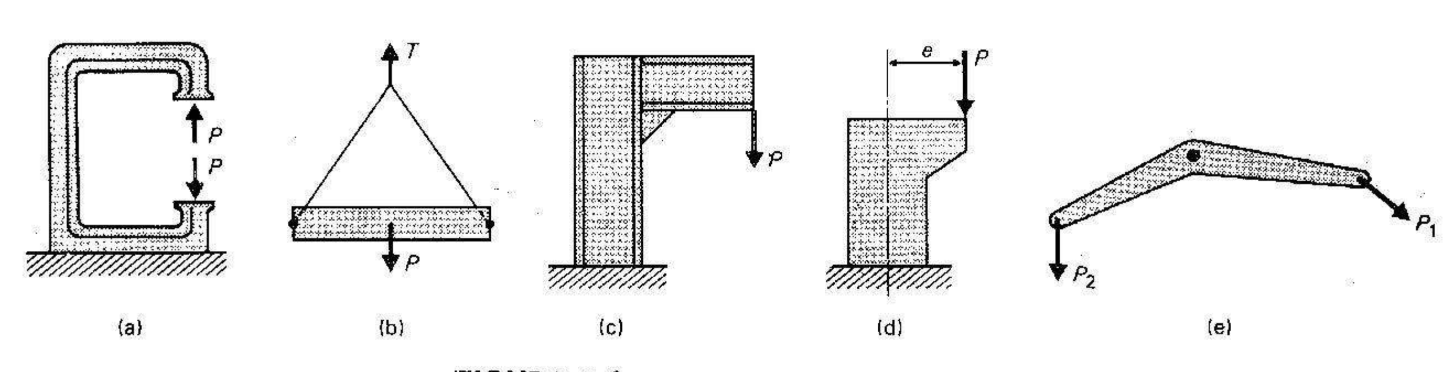


FIGURA 6.1

Esfuerzos normales combinados SECCION A

6.2 Cargas combinadas, axiales y de flexión

Considere la viga empotrada en un extremo y sujeta a una carga inclinada P, como se muestra en la Fig. 6.2 (a). Esta carga no produce flexión ni carga axial solamente, sino una combinación de las dos. Si se descompone esta fuerza en sus componentes horizontal y vertical, como en la Fig. 6.2 (b) y (c), estas componentes actúan en las direcciones que permiten aplicar la teoría de los capítulos 2 y 5.

La fuerza axial P_X (Fig. 6.2b) produce esfuerzos directos de tensión $\sigma = P/A$ en todas las fibras. La fuerza P_Y (Fig. 6.2c) produce esfuerzos de flexión $\sigma = Mc/I$. Como ambos esfuerzos (P/A y Mc/I) actúan para alargar o acortar las fibras, pueden combinarse algebraicamente. El hecho de que ambas cargas producen esfuerzos que tienen la misma línea de acción confirma que la superposición de esfuerzos es válida. Los esfuerzos en cualquier fibra pueden calcularse como:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} \tag{6.1}$$

Los esfuerzos de tensión se consideran positivos, mientras que los esfuerzos de compresión son negativos. Esta convención de signos nos ayuda a determinar la naturaleza de los esfuerzos finales. El término c en el factor Mc/I puede reemplazarse por la distancia general y a partir del eje neutro, si se requiere el esfuerzo en un punto diferente al de las fibras extremas.

Los esfuerzos calculados mediante la ec. (6.1) no son enteramente correctos. La carga P_Y produce una deflexión (no mostrada) que, cuando se multiplica por la fuerza axial P_X, produce un pequeño momento secundario. En casos de tensión axial y flexión, este momento secundario tiende a reducir el momento total, y por consiguiente, puede despreciarse. Si la fuerza axial es de compresión, el momento secundario incrementa el momento total, y el despreciar este término no resulta conservativo. Sin embargo, en la mayoría de los problemas de esfuerzos combinados, el efecto de este término es pequeño y puede despreciarse. En el caso de vigas-columnas esbeltas, el efecto puede no ser despreciable. En el capítulo 9 se discuten problemas de este tipo.

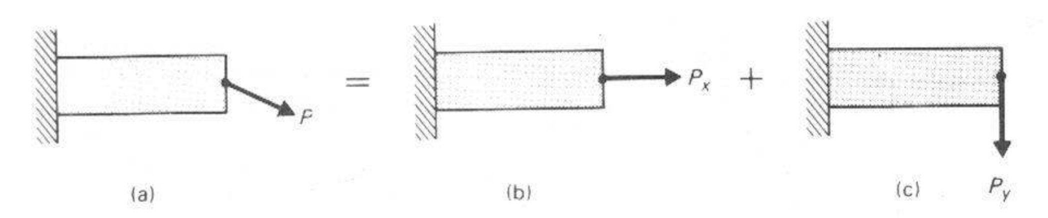


FIGURA 6.2

EJEMPLO 6.1 Calcular los esfuerzos máximos y localizar el eje neutro en la viga en voladizo de 40 mm × 100 mm, indicada en la Fig. 6.3.

SOLUCION El esfuerzo máximo ocurrirá en el extremo empotrado, pues en ese lugar el momento flexionante es máximo.

La carga de flexión de la Fig. 6.3 (c) produce esfuerzos de tensión en las fibras superiores y esfuerzos de compresión en las fibras inferiores. La carga axial de la Fig. 6.3 (b) produce esfuerzos de tensión en todas las fibras. Así,

$$\sigma_{\text{sup.}} = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} = +\frac{11\,520}{(40\times10^{-3})(100\times10^{-3})} + \frac{(3\,360)(360\times10^{-3})(50\times10^{-3})}{\frac{1}{12}(40\times10^{-3})(100\times10^{-3})^3}$$

$$= +2.88\text{ MPa} + 18.14\text{ MPa}$$

$$= +21.02\text{ MPa (tensión)};$$

$$\sigma_{\text{inf.}} = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} = 2.88 - 18.14$$

$$= -15.26\text{ MPa (compresión)}.$$

La combinación de esfuerzos se indica gráficamente en la Fig. 6.4. El eje neutro es el plano de esfuerzos nulos, y puede localizarse mediante la ecuación (6.1), o mediante simple geometría. Usando la ecuación (6.1), tenemos:

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{My}{I},$$

$$0 = +2.88 - \frac{(3\,360)(360\times10^{-3})y}{\frac{1}{12}(40\times10^{-3})(100\times10^{-3})^3},$$

$$0 = (2.88\times10^6) - (362.88\times10^6)y,$$

$$y = 0.00794\text{ m} = 7.94\text{ mm}. \quad ■$$

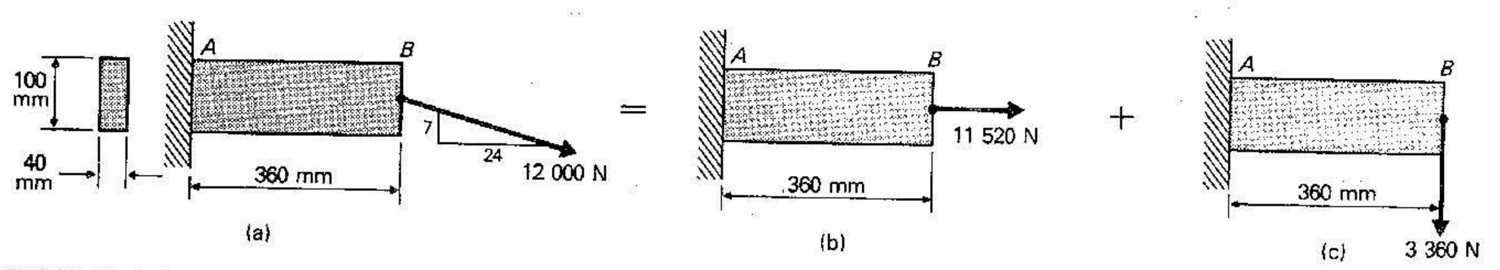


FIGURA 6.3

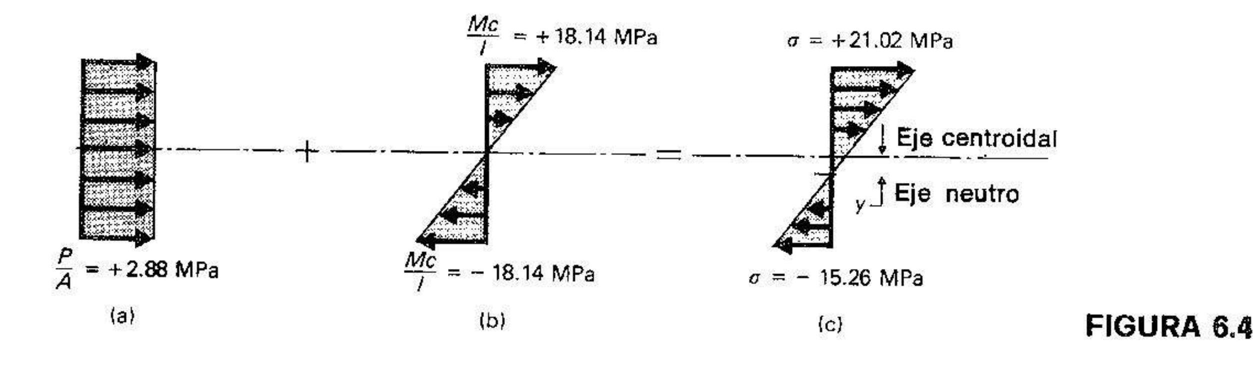


FIGURA 6.4

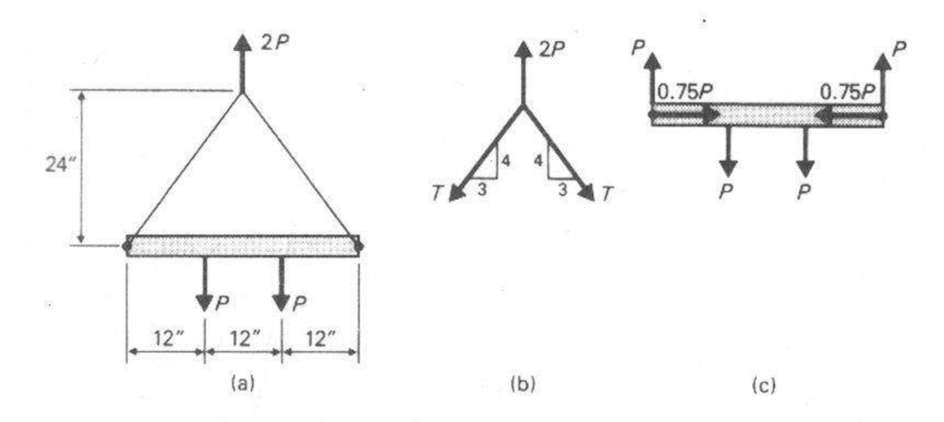


FIGURA 6.5

EJEMPLO 6.2 Un tubo de acero estándar de 4 plg y de 36 plg de longitud se usa como dispositivo de izaje para una grúa. Suponiendo que las cargas se aplican en los tercios de su longitud (véase Fig. 6.5), y el esfuerzo máximo en el tubo no debe exceder de 20 000 lb/plg², determinar el valor admisible de *P*.

SOLUCION La fuerza axial en el tubo puede calcularse por estática en términos de *P*. El momento flexionante también se conoce en términos de *P* a partir del caso 3 del Apéndice D. Considerando el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 6.5 (b), se tiene:

$$\sum F_Y = 0: \qquad \tfrac{4}{5}T + \tfrac{4}{5}T = 2P,$$

$$T = 1.25P.$$

La componente horizontal de la tensión es la fuerza axial en el tubo, y puede calcularse como:

$$T_X = \tfrac{3}{5}(1.25P) = 0.75P.$$

Aplicando la ec. (6.1) a los esfuerzos en las fibras superiores de la Fig. 6.5 (c), pues tanto los debidos a la carga axial como a la carga flexionante, son de compresión, se obtiene:

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I};$$

$$-20\,000 = -\frac{0.75P}{3.17} - \frac{(12P)(4.500/2)}{7.23} = -0.24P - 3.72P;$$

$$P = 5\,030 \text{ lb.} \quad \blacksquare$$

Problemas

6.1 Una pequeña ménsula consistente en dos barras de 90 mm × 20 mm (Fig. P6.1) soporta una carga de 84 kN, inclinada según una pendiente de 2 a 1. Determinar los esfuerzos máximos en la sección *A-A* de la ménsula.

6.2 La barra indicada en la Fig. P6.2 tiene una sección transversal rectangular de 30 mm × 120 mm. Cuando el esfuerzo admisible en la barra es de 140 MPa. ¿cuál es la carga máxima que puede aplicarse?

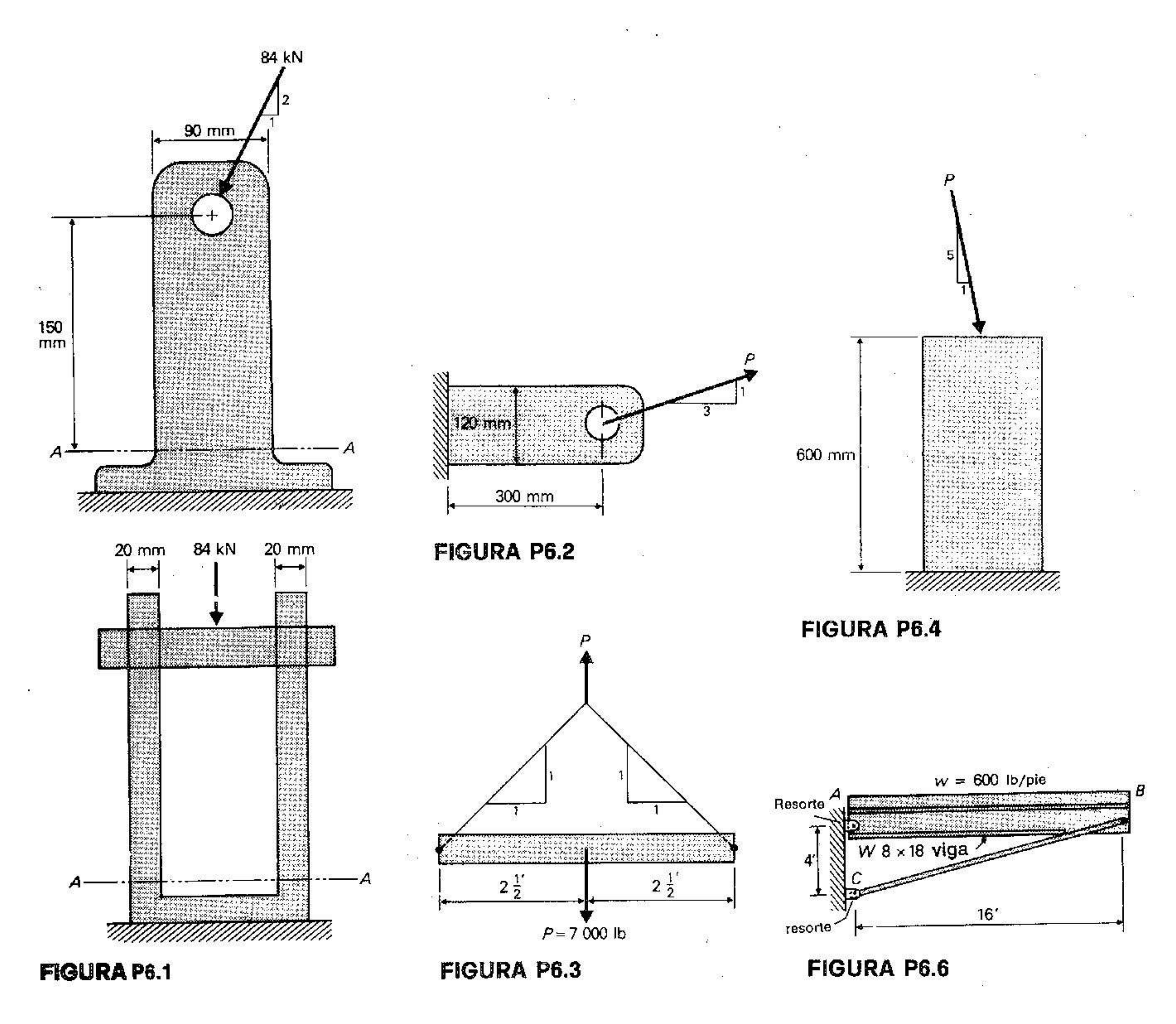


FIGURA P6.1

FIGURA P6.2

FIGURA P6.3

FIGURA P6.4

FIGURA P6.6

6.3 La pequeña barra de izaje indicada en la Fig. P6.3 está formada por un tubo de acero estándar de 6 plg y de 5 pies de longitud. Se aplica una carga $P = 7\,000$ lb al centro. Determinar los esfuerzos máximos que se producirán.

6.4 Determinar los esfuerzos máximos en el poste redondo de 300 mm de diámetro indicado en la Fig. P6.4 cuando $P = 24\,000$ N.

6.5 Determinar la carga máxima P que puede aplicarse al poste redondo de 300 mm de diámetro indicado en la Fig. P6.4, dado que el esfuerzo admisible es de 10 MPa.

6.6 Determinar los esfuerzos máximos en la viga de acero W 8 × 18 indicada en la Fig. P6.6.

6.7 Determinar la carga máxima, P, que puede aplicarse a la vigueta de acero W 6 × 16 indicada en la Fig. P6.7. El esfuerzo admisible es de 22 klb/plg^2.

6.8 Las secciones A-A y B-B del mecanismo indicado en la Fig. P6.8 son de 3 plg × ¾ plg. Determinar los esfuerzos en esas secciones, suponiendo que $P_1 = 5\,000$ lb.

6.9 Determinar el valor máximo de P_1 y el valor correspondiente de P_2 para el mecanismo indicado en la Fig. P6.8. El esfuerzo admisible en las secciones A-A y B-B es de 16 000 lb/plg^2.

6.10 Tres pesos iguales de magnitud P están colgados de barras redondas de acero de 50 mm de diámetro (Fig. P6.10). El esfuerzo admisible es de 165 MPa. Determinar el valor admisible de P.

6.11 La viga ABC de la Fig. P6.11 está hecha de dos secciones C 5 × 6.7. Determinar los esfuerzos máximos en la viga cuando $P = 7\,500$ lb.

6.12 El cordón inferior AB de la pequeña armadura indicada en la Fig. P6.12 está hecho de dos ángulos de 4 × 3 × $\frac{5}{16}$, con los lados largos espalda contra espalda. Calcular el esfuerzo máximo en las fibras superiores e inferiores de los ángulos. Supóngase que hay articulaciones en A, B, y C.

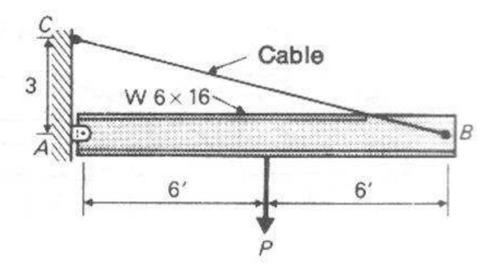


FIGURA P6.7

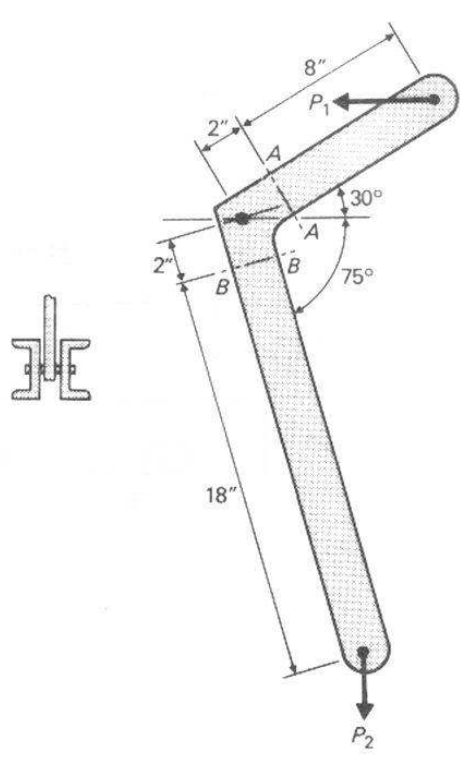


FIGURA P6.8

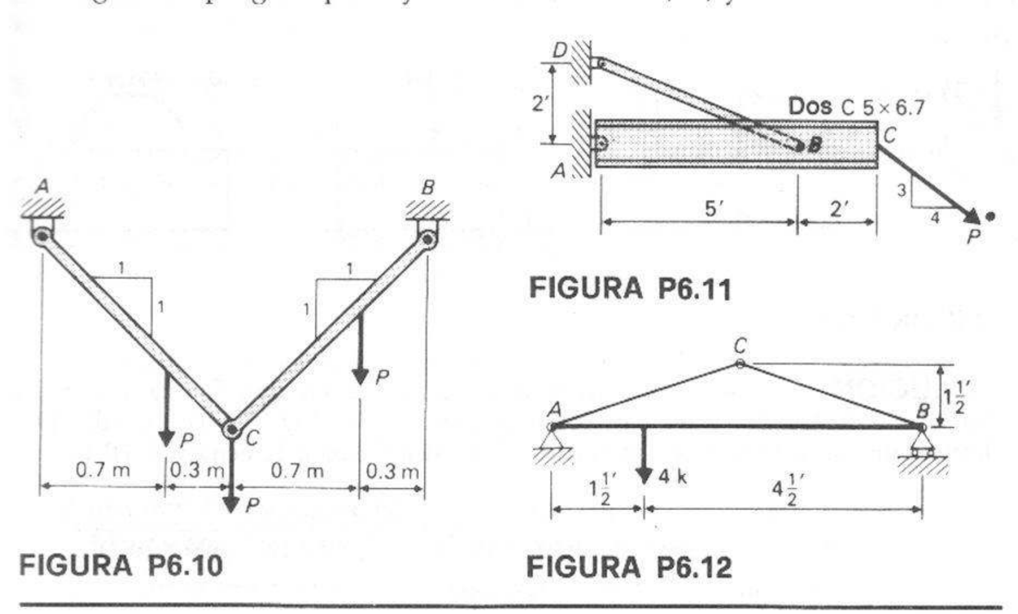


FIGURA P6.10

FIGURA P6.11

FIGURA P6.12

6.3 Cargas excéntricas

Cuando a un miembro se le aplica una carga axial, la carga debe coincidir con el eje centroidal de éste para que sea válida la ecuación $\sigma = P/A$. En algunos casos la carga se aplica paralela al eje centroidal del miembro, pero a cierta distancia de él (véase la Fig. 6.6b). Este tipo de carga se describe como excéntrica, siendo la excentricidad e la distancia entre la carga y el eje centroidal.

Para resolver este tipo de problema, la carga excentrica se descompone en una fuerza que pasa por el centroide de la sección y un par,

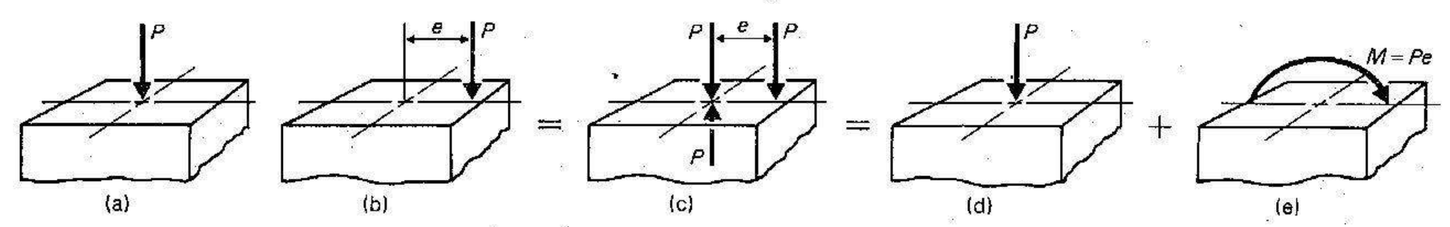


FIGURA 6.6 (a) Carga concéntrica, (b) carga excéntrica

como se muestra en la Fig. 6.6 (d) y (e). El procedimiento para descomponer una fuerza en una fuerza y un par se explica en el Apéndice, sección A.9. Los esfuerzos en cualquier punto pueden así calcularse usando nuevamente la ec. (6.1) con el momento $M = Pe$.

Los ejemplos 6.3 y 6.4 ilustran el procedimiento para resolverlos.

EJEMPLO 6.3 Determinar los esfuerzos en las fibras extremas del bloque cargado excéntricamente, indicado en la Fig. 6.7.

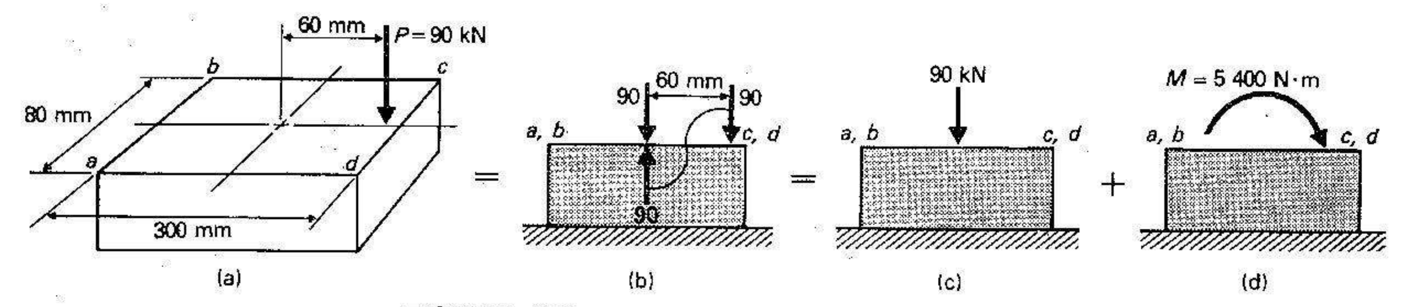


FIGURA 6.7

SOLUCION La carga excéntrica se descompone en una fuerza que pasa por el eje centroidal, y un par, como se indica en la Fig. 6.7 (c) y (d). Determinamos el esfuerzo en los bordes ab y cd aplicando la ecuación (6.1):

$$\sigma_{ab} = -\frac{P}{A}+\frac{Mc}{I} = -\frac{(90\ 000)}{(80\times 10^{-3})(300\times 10^{-3})}+\frac{(90\ 000)(60\times 10^{-3})(150\times 10^{-3})}{\frac{1}{12}(80\times 10^{-3})(300\times 10^{-3})^3}$$

$$= -3.75+4.5 = +0.75 \text{ MPa (tensión)};$$

$$\sigma_{cd} = -\frac{P}{A}-\frac{Mc}{I} = -3.75-4.5 = -8.25 \text{ MPa (compresión)}. \quad ■$$

EJEMPLO 6.4 Determinar la excentricidad máxima que puede tolerarse en el bloque indicado en la Fig. 6.8, sin producir ningún esfuerzo de tensión.

SOLUCION La excentricidad máxima hará que el esfuerzo neto sobre la cara ab sea cero. Se escribe la ecuación (6.1) para el esfuerzo sobre esa cara; se hace σ igual a cero; y la expresión se resuelve para e.

$$\sigma = -\frac{P}{A}+\frac{Mc}{I} = -\frac{P}{bd}+\frac{Pe(d/2)}{\frac{1}{12}bd^3}$$

$$0 = -1+\frac{e}{d/6}$$

$$e = \tfrac{1}{6}d. \quad ■$$

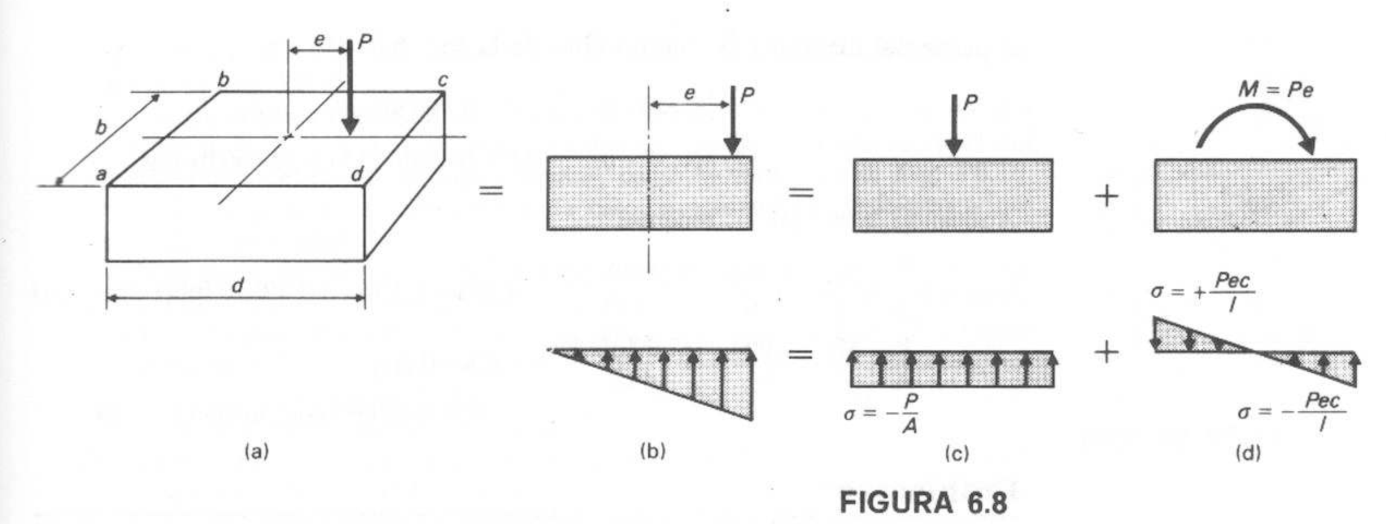


FIGURA 6.8

EJEMPLO 6.5 Determinar los esfuerzos en las fibras extremas de la prensa indicada en la Fig. 6.9.

SOLUCION El primer paso consiste en localizar el centroide de la sección *A-A* para determinar la excentricidad total a partir de este punto.

Para localizar el centroide de la sección *A-A*, Fig. 6.9 (c), suponemos un eje de referencia a través de la cara *AB* (Fig. 6.9c):

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Ax}{\Sigma A} = \frac{(4)(2)(1) + (2)(4)(4)}{(4)(2) + (2)(4)} = \frac{40}{16},$$

$$\bar{x} = 2.5 \text{ plg.}$$

El momento de inercia con respecto al eje centroidal *Y-Y* se calcula como sigue:

$$I_Y = \sum (\bar{I} + Ad^2) = \tfrac{1}{12}(4)(2)^3 + (4)(2)(1.5)^2 + \tfrac{1}{12}(2)(4)^3 + (4)(2)(1.5)^2 = 49.3 \text{ plg}^4$$

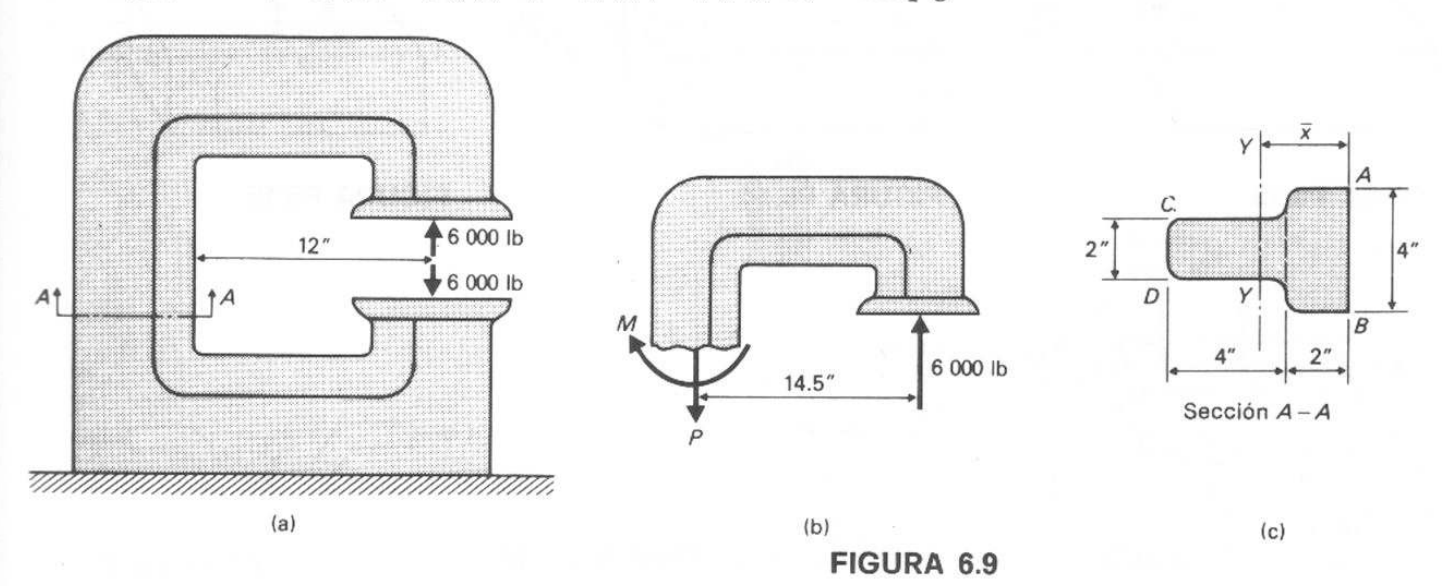


FIGURA 6.9

A partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 6.9(b):

$$\sum F_Y = 0: \qquad P = 6\,000 \text{ lb};$$

$$\sum M_{Y-Y} = 0: \qquad M = (6\,000)(14.5) = 87\,000 \text{ lb-plg}$$

Aplicando la ec. (6.1), tenemos

$$\sigma_{AB} = +\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{6\,000}{16} + \frac{(87\,000)(2.5)}{49.3} = +375 + 4\,420 = +4\,795 \text{ lb/plg}^2 \text{ (tensión)}$$

$$\sigma_{CD} = +\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{6\,000}{16} - \frac{(87\,000)(3.5)}{49.3} = +375 - 6\,200$$

$$= -5\,825 \text{ lb/plg}^2 \text{ (compresión)} \quad ■$$

Problemas

6.13-6.15 Determinar los esfuerzos a lo largo de cada una de las cuatro caras de los bloques sujetos a las cargas excéntricas indicadas en las Figs. P6.13 a P6.15.

6.16 La Fig. P6.16 indica un bloque que mide 180 mm × 360 mm.

a) Determinar la excentricidad máxima que puede tolerarse a lo largo del eje *X-X* para que el bloque no tenga esfuerzos de tensión a lo largo de la cara *AB*.

b) Determinar la excentricidad máxima que puede tolerarse a lo largo del eje *Y-Y* para que el bloque no tenga esfuerzos de tensión a lo largo de la cara *AD*.

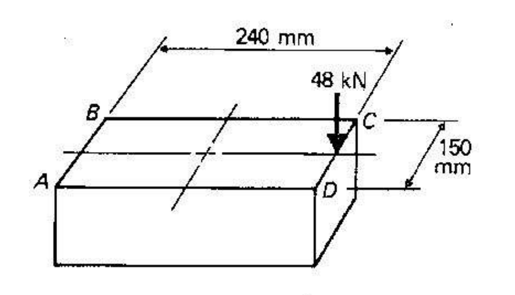


FIGURA P6.13

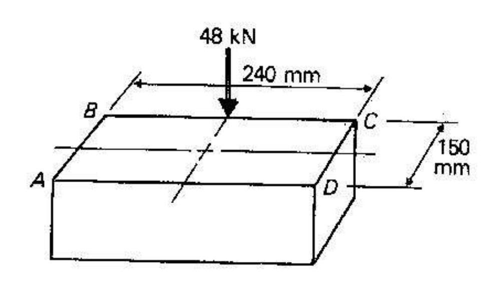


FIGURA P6.14

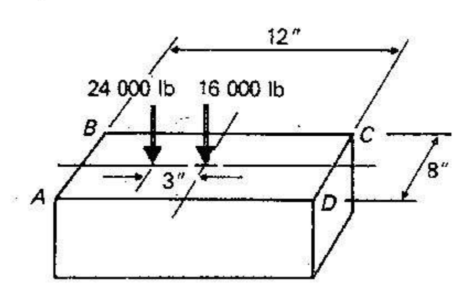


FIGURA P6.15

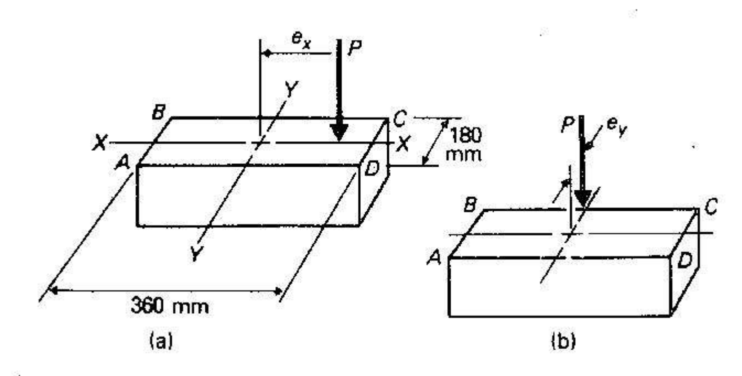


FIGURA P6.16

6.17 Calcular el esfuerzo máximo en las secciones *A-A* y *B-B* del bloque indicado en la Fig. P6.17.

6.18 Un miembro estructural de 6 pies de longitud está fabricado de dos ángulos de 6 × 4 × ⅜. Las conexiones extremas pueden hacerse al nivel del centroide o al nivel de los patines salientes, como se indica en la Fig. P6.18. Calcular la carga máxima axial para cada caso, suponiendo un esfuerzo admisible de 22 000 lb/plg².

6.19 Una parte de máquina con la forma indicada en la Fig. P6.19 tiene una sección transversal circular de 25 mm de diámetro. El esfuerzo admisible es de 140 MPa, y la excentricidad es (a) $e = 25$ mm y (b) $e = 50$ mm. Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse.

6.20 El marco indicado en la Fig. P6.20 está hecho de una sección de acero W 8 × 18. Si $P = 8\,000$ lb, ¿cuáles son los esfuerzos máximos?

6.21 Determinar la carga máxima *P* que puede soportar el marco de la Fig. P6.20 cuando el esfuerzo admisible es de 22 000 lb/plg² y el marco está hecho de una sección W 10 × 24.

6.22 Determinar los esfuerzos máximos en la sección *A-A* del gancho indicado en la Fig. P6.22.

6.23 Dado que $P = 6\,000$ lb, determinar los esfuerzos en las fibras extremas del marco indicado en la Fig. P6.23.

6.24 El marco indicado en la Fig. P6.23 es de hierro colado con esfuerzos admisibles de 4 klb/plg² a tensión, y de 12 klb/plg² a compresión. Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse.

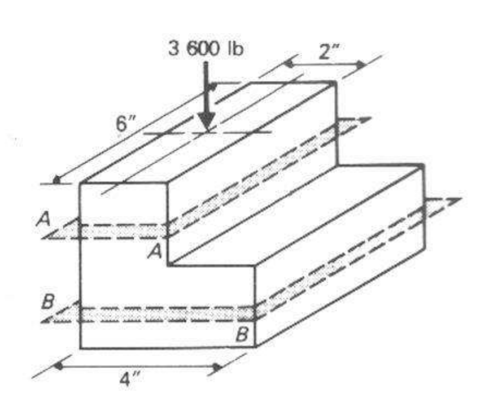


FIGURA P6.17

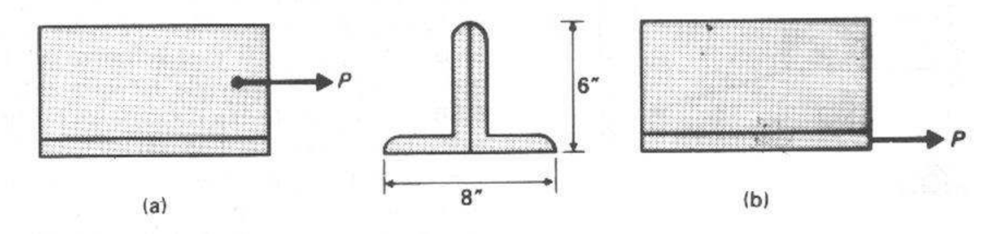


FIGURA P6.18

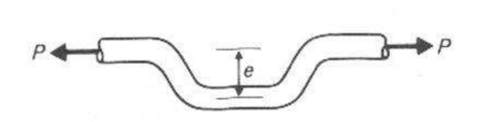


FIGURA P6.19

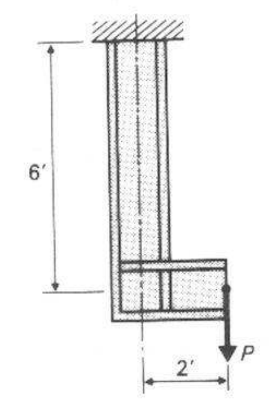


FIGURA P6.20

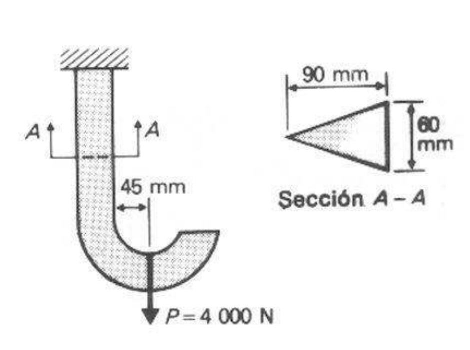


FIGURA P6.22

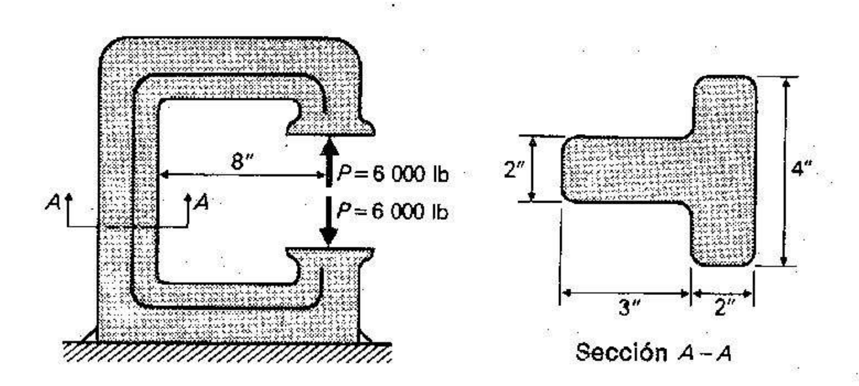


FIGURA P6.23

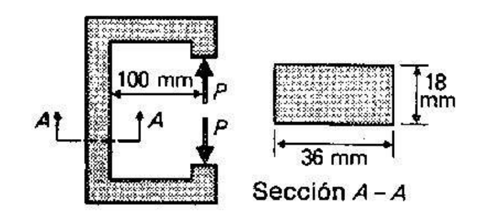


FIGURA P6.25

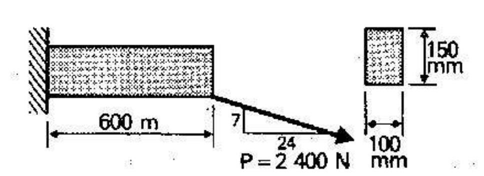


FIGURA P6.26

6.25 Calcular la carga admisible en la mordaza de acero indicada en la Fig. P6.25 cuando el esfuerzo admisible es de 110 MPa.

6.26 Calcular los esfuerzos máximos en las fibras superiores e inferiores de la viga indicada en la Fig. P6.26 cuando la carga $P = 2\,400$ N.

6.27 Calcular los esfuerzos máximos en las fibras superiores e inferiores de la viga indicada en la Fig. P6.27 cuando $P = 2\,600$ N.

6.28 Un pilote de concreto reforzado precolado, de 30 pies de longitud, que pesa 200 lb/pie es izado por medio de ganchos colocados a los tercios de su longitud. Los ganchos se colocan como se indica en la Fig. P6.28. Determinar el esfuerzo máximo en el pilote.

6.29 Una viga inclinada de acero soporta una carga vertical *P*, como se indica en la Fig. P6.29. ¿Cuál es el valor máximo de *P* cuando la sección de acero es una W 10 × 60 y el esfuerzo admisible es de 24 000 lb/plg². Supóngase que la viga está apoyada lateralmente.

6.30 Una plataforma de izaje se fabrica soldando secciones de tubo cuadrado, como se indica en la Fig. P6.30. El tubo es de 6 plg × 6 plg × $\frac{3}{8}$ plg de espesor, con las propiedades geométricas siguientes: $A = 7.95$ plg², $I = 40.5$ plg⁴, $S = 13.5$ plg³. ¿Cuál es el peso máximo, *W*, que puede izarse sin exceder un esfuerzo de 22 000 lb/plg²? Supóngase que existen articulaciones entre la plataforma y la estructura.

6.31 Resolver el problema 6.30 suponiendo que la estructura tiene la forma indicada en la Fig. P6.31.

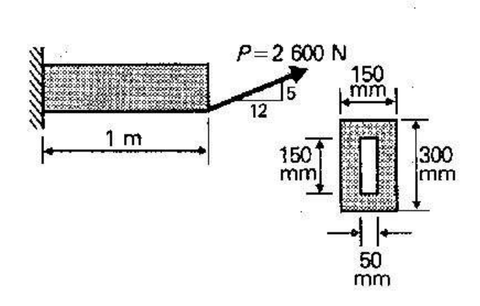


FIGURA P6.27

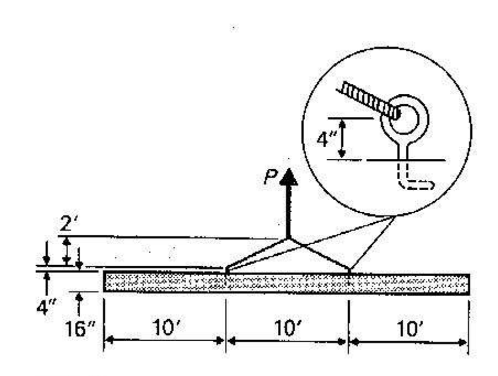


FIGURA P6.28

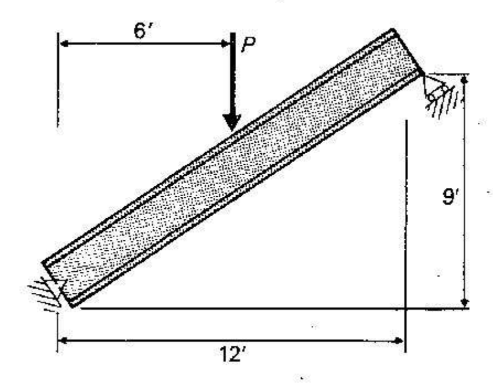


FIGURA P6.29

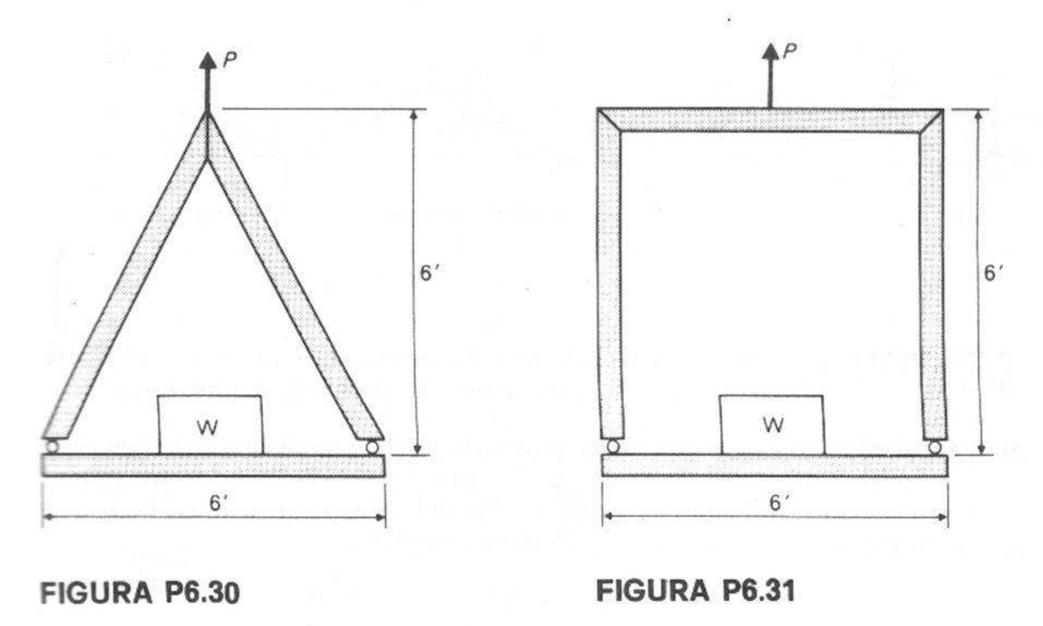


FIGURA P6.30 **FIGURA P6.31**

6.4 Cargas axiales excéntricas con respecto a dos ejes

Las cargas excéntricas descritas en la sección 6.3 eran excéntricas con respecto solamente a un eje; es decir, la carga estaba aplicada a lo largo de uno de los ejes principales. Si la carga no se aplica a lo largo de ninguno de los ejes principales, como en la Fig. 6.10 el problema se resuelve por el mismo procedimiento básico; es decir, la fuerza excéntrica se descompone en una fuerza axial que pasa por el centroide y un par, como se muestra en la Fig. 6.10 (b). Sin embargo, el par no actúa a lo largo de un eje principal, y a su vez debe descomponerse en los pares $M_x = Pe_y$ y $M_y = Pe_x$.

El esfuerzo en cualquier punto es la suma de los esfuerzos debidos a las tres cantidades P, M_x y M_y, y se expresa algebraicamente como:

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{M_X y}{I_X} \pm \frac{M_Y x}{I_Y}. \qquad (6.2)$$

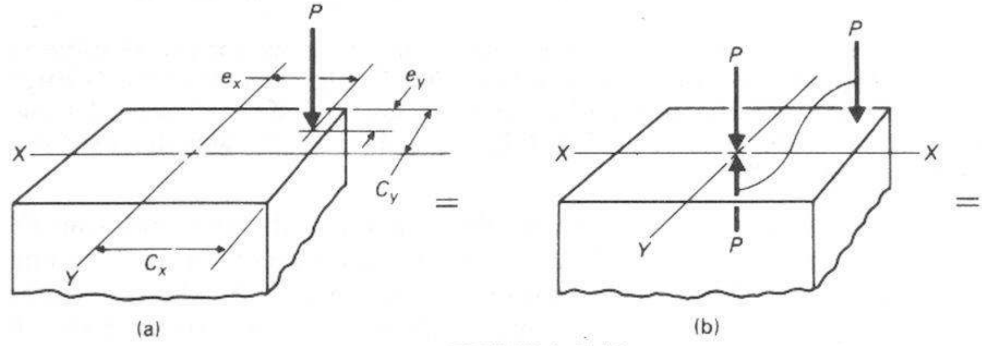


FIGURA 6.10

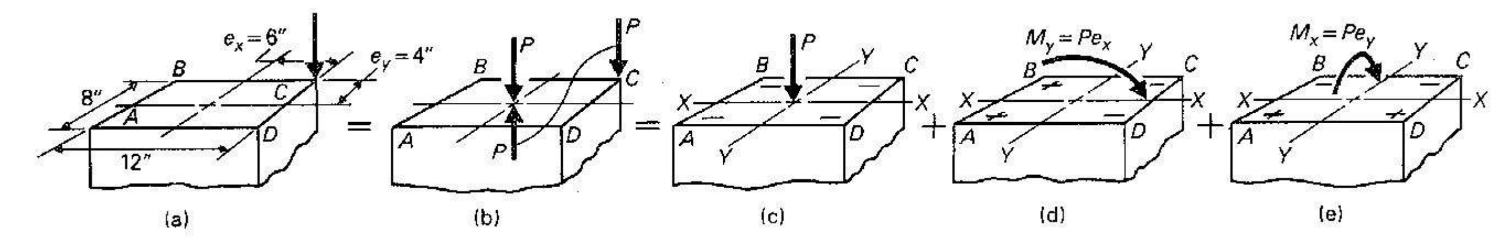


FIGURA 6.11

EJEMPLO 6.6 Determinar los esfuerzos en las cuatro esquinas de un bloque de 8 plg × 12 plg cuando se aplica una carga de 48 000 lb en una esquina.

SOLUCION La carga excéntrica mostrada en la Fig. 6.11 se descompone en una fuerza axial y dos pares, M_Y y M_Y. El carácter de los esfuerzos producidos por las tres cantidades se indica mediante los signos + o − en las esquinas de la Fig. 6.11 (c), (d) y (e). Primero se determina:

$$I_X = \tfrac{1}{12}(12)(8)^3 = 512 \text{ plg}^4, \quad c_X = 6 \text{ plg}$$
$$I_Y = \tfrac{1}{12}(8)(12)^3 = 1{,}152 \text{ plg}^4; \quad c_Y = 4 \text{ plg}$$

Así podemos calcular que

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_Y c_X}{I_Y} + \frac{M_X c_Y}{I_X} = -\frac{48\,000}{8(12)} + \frac{(48\,000)(6)(6)}{1{,}152} + \frac{(48\,000)(4)(4)}{512},$$

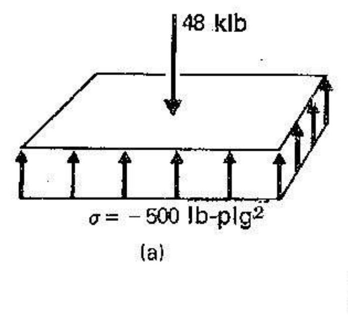
y los esfuerzos son

$$\sigma_A = -500 + 1\,500 + 1\,500 = +2\,500 \text{ lb/plg}^2 \text{ (tensión)}$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} + \frac{M_Y c_X}{I_Y} - \frac{M_Y c_Y}{I_X}$$
$$= -500 + 1\,500 - 1\,500 = -500 \text{ lb/plg}^2 \text{ (compresión)}$$

$$\sigma_C = -\frac{P}{A} - \frac{M_Y c_X}{I_Y} - \frac{M_X c_Y}{I_X}$$
$$= -500 - 1\,500 - 1\,500 = -3\,500 \text{ lb/plg}^2 \text{ (compresión)}$$

$$\sigma_D = -\frac{P}{A} - \frac{M_Y c_X}{I_Y} + \frac{M_X c_Y}{I_X}$$
$$= -500 - 1\,500 + 1\,500 = -500 \text{ lb/plg}^2 \text{ (compresión)}$$



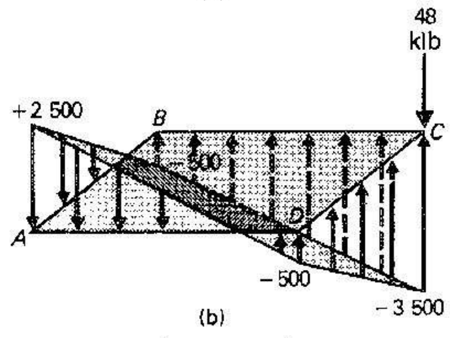


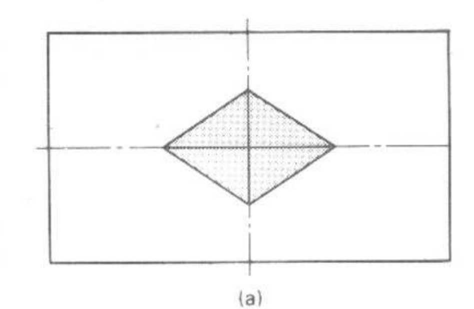
FIGURA 6.12

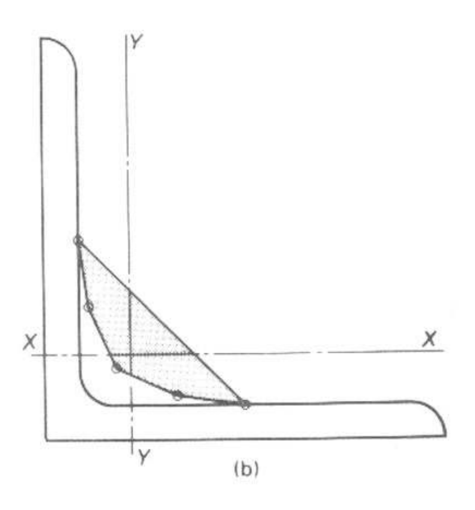
Si la carga de 48 klb fuera concéntrica en vez de excéntrica, el **esfuerzo** sería uniformemente distribuido y valdría 500 lb/plg². Sin embargo, la **carga** excéntrica produce una distribución de esfuerzos no uniforme cuyo valor máximo es de −3 500 lb/plg². La Fig. 6.12 (a) y (b) muestra estas distribuciones gráficamente. ■

Una carga axial concéntrica produce una distribución uniforme de esfuerzos de magnitud $\sigma = P/A$. Una carga axial excéntrica produce una distribución de esfuerzos no uniforme, experimentando algunas fibras esfuerzos de compresión altos, y otras esfuerzos de compresión bajos, o aún esfuerzos de tensión.

Hay casos de diseño donde es indeseable que se presenten esfuerzos de tensión. Los muros de mampostería y las zapatas de concreto reforzado, por ejemplo, pueden fallar bajo la acción de cargas excéntricas cuando el momento de volcamiento hace que gran parte de la sección transversal esté sujeta a tensión.

El núcleo central de una sección es aquella área dentro de la cual debe actuar la fuerza resultante para evitar esfuerzos de tensión en cualquier fibra. Los límites del núcleo central pueden determinarse generando una ecuación para cada uno de sus lados, usando la ecuación (6.2). La forma del núcleo central será un polígono con tantos lados como esquinas tenga la sección transversal. Así, como se ilustra en la Fig. 6.13, el núcleo central de un rectángulo tiene cuatro lados, el núcleo central de una sección ángulo tiene cinco lados, y el núcleo central de un círculo tiene un número infinito de lados.


(a)



(b)

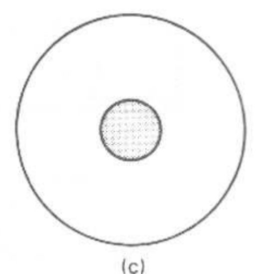
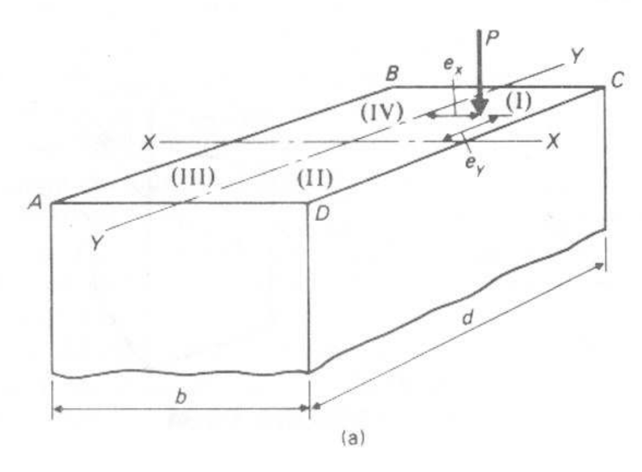

(c)

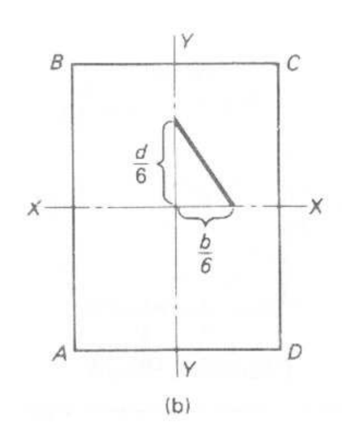
FIGURA 6.13

EJEMPLO 6.7 Determinar el núcleo central para el bloque rectangular indicado en la Fig. 6.14.

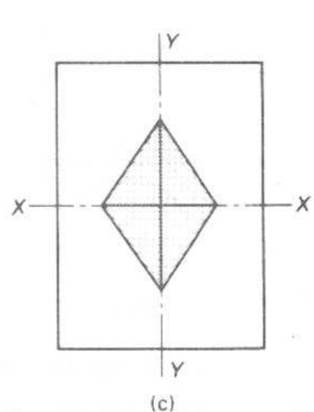
SOLUCION Cuando la carga excéntrica ocurre en el cuadrante *I*, el esfuerzo máximo de tensión ocurrirá en la esquina *A* debido a que el par Pe_x produce esfuerzos de tensión a lo largo de la cara *AB*, y el par Pe_y produce esfuerzos



(a)



(b)



(c)

FIGURA 6.14

de tensión a lo largo de la cara AD. Por consiguiente, escribimos la ecuación (6.2) del esfuerzo en A en función de e_x y de e_y, en el cuadrante I.

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_X c}{I_X} + \frac{M_Y c}{I_Y}$$

$$\sigma_A = -\frac{P}{bd} + \frac{Pe_y(d/2)}{\frac{1}{12}bd^3} + \frac{Pe_x(b/2)}{\frac{1}{12}db^3}$$

Haciendo $\sigma_A = 0$, y resolviendo, obtenemos:

$$\frac{e_x}{b} + \frac{e_y}{d} = \frac{1}{6}$$

esta es la ecuación de una recta, en las variables e_x y e_y. En la Fig. 6.14 (b) se tiene trazada dicha recta.

Las líneas restantes que definen el núcleo central se determinan aplicando sucesivamente la ecuación (6.2) con $\sigma = 0$ para las esquinas B, C y D. ■

Problemas

6.32-6.35 Determinar los esfuerzos en todas las esquinas de los bloques indicados en las Figs. P6.32 a P6.35.

6.36-6.38 Determinar el núcleo central de las secciones transversales indicadas en las Figs. P6.36 a P6.38.

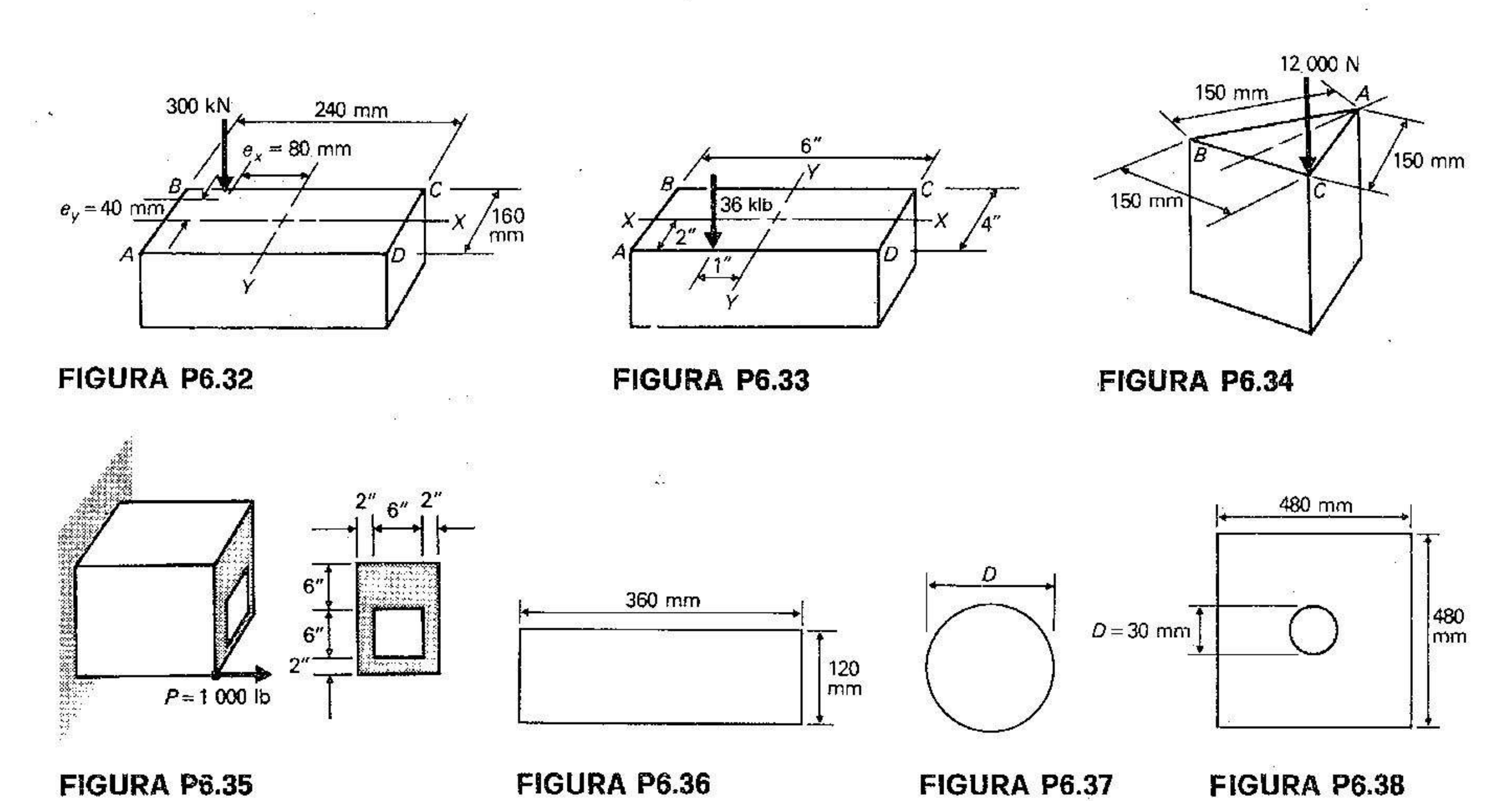


FIGURA P6.32

FIGURA P6.33

FIGURA P6.34

FIGURA P6.35

FIGURA P6.36

FIGURA P6.37

FIGURA P6.38

Esfuerzos combinados, normal y cortante SECCION B

6.5 Determinación del esfuerzo máximo

En la sección A se ilustraron varios ejemplos de esfuerzos combinados por superposición. La Fig. 6.15 muestra un problema de este tipo. El esfuerzo en cualquier punto, tal como el punto A, se calcula mediante $\sigma = \pm P/A \pm My/I$

Cuando se dice que se calcula el esfuerzo en un punto, la palabra "punto" generalmente se usa con la intención de significar un cubo muy pequeño de material cortado mediante secciones planas, como se muestra en la Fig. 6.15 (a) y (b). El cubo se considera tan pequeño que podemos suponer que los esfuerzos sobre las caras están uniformemente distribuidos y no cambian significativamente de una cara a la otra.

Los métodos de superposición descritos en la sección A fueron válidos en problemas tales como el de la Fig. 6.15, debido a que los esfuerzos, como se indica sobre el bloque de esfuerzos de la Fig. 6.15 (b), tenían la misma línea de acción y por lo tanto podían superponerse. Sin embargo, si se considera un eje sujeto a un par y a una fuerza axial (Fig. 6.16), vemos que la fuerza axial produce esfuerzos normales $\sigma = P/A$ en cada punto, y el par produce esfuerzos cortantes $\tau = T\,\rho/J$. Estos esfuerzos se muestran sobre los cubos elementales de la Fig. 6.16 (b)-(d). Nótese que los esfuerzos cortante y normal no tienen la misma línea de acción. Por consiguiente, la suma algebraica de los esfuerzos (por superposición no es válida aquí. Se necesitan diferentes técnicas de adición para determinar los esfuerzos máximos que ocurren a partir de combinaciones de este tipo.

Esta sección explica los procedimientos para combinar estos esfuerzos. Los métodos de solución, presentados en la sección 12.8, son relativamente fáciles de aplicar, y proporcionan soluciones rápidas a problemas difíciles. Sin embargo, la presentación del material básico, necesariamente requiere la solución de unos cuantos problemas laboriosos para asegurar que las técnicas fundamentales están completamente entendidas.

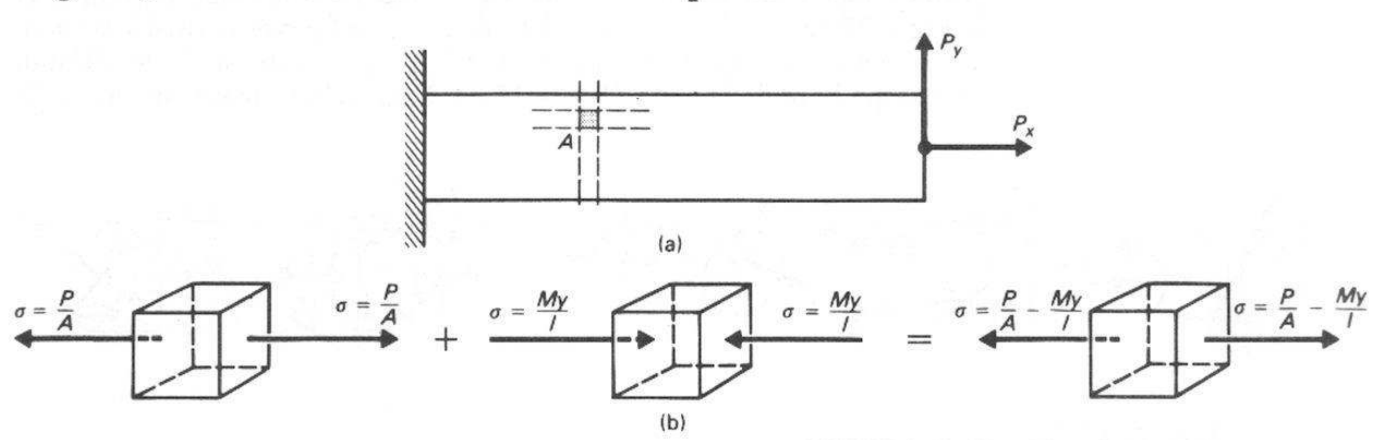


FIGURA 6.15

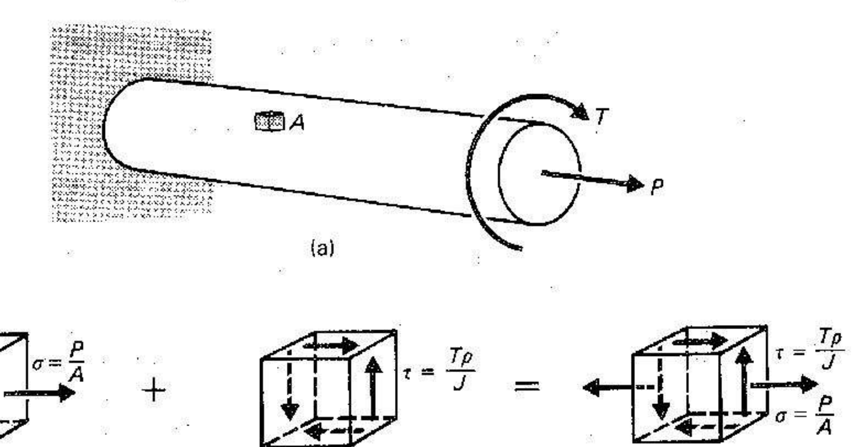


FIGURA 6.16

6.6 Esfuerzos sobre planos oblicuos

Si una barra, tal como la mostrada en la Fig. 6.17 (a), se corta a lo largo de una sección que no es perpendicular a su eje, existirán esfuerzos sobre la superficie del corte para mantener en equilibrio el cuerpo libre resultante. Como hay la posibilidad de que existan tanto esfuerzos normales como cortantes, ambos se muestran en la sección Fig. 6.17 (b). El problema consiste en determinar la magnitud de estos esfuerzos que actúan sobre la sección oblicua.

Antes de investigar los esfuerzos en un punto situado sobre la sección oblicua *mn* de la Fig. 6.17, consideremos los esfuerzos que actúan sobre las caras del bloque elemental de esfuerzos *abcd*. En este caso, calculamos los esfuerzos normales y los esfuerzos cortantes a partir de $\sigma = P/A$ y $\tau = T\,\rho/J$. Debemos conocer la magnitud de estos esfuerzos antes de que se puedan determinar los esfuerzos sobre los planos oblicuos.

Supongamos que el bloque *abcd* se localiza en una posición tal que el plano oblicuo *mn* pasará a través de la arista en *a*, como se indica en la Fig. 6.17 (a) y (c). Se deben determinar los esfuerzos normal y cortante σ y τ sobre la superficie inclinada del bloque. Esto se hace aislando un cuerpo libre de la cuña (Fig. 6.17 d). Esta cuña se mantiene en equili-

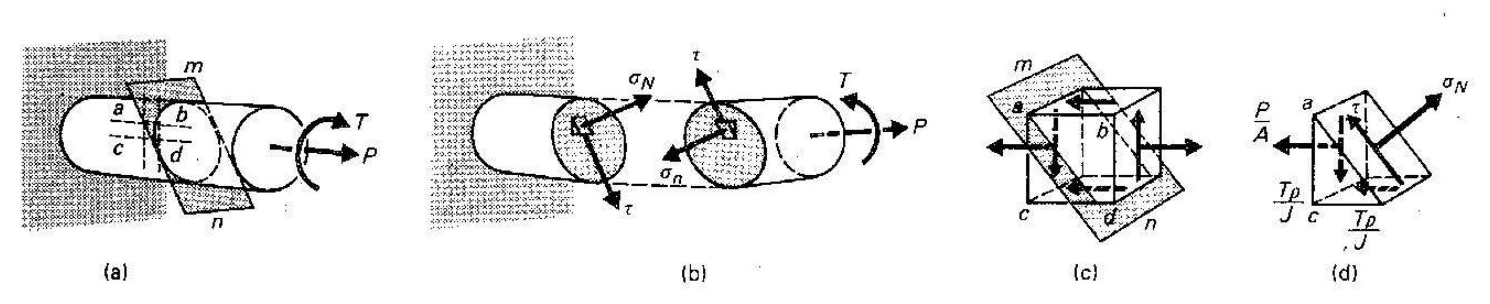


FIGURA 6.17

brio mediante las fuerzas que actúan sobre sus superficies. Debido a que la cuña es de tamaño infinitesimal, se considera que estas fuerzas actúan en un punto, y solamente se usan las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_X = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum F_Y = 0$$

No actúa ningún par sobre la cuña.

Aunque debemos determinar los esfuerzos que actúan sobre la superficie, las ecuaciones de equilibrio se aplican solamente a las *fuerzas* que actúan sobre el cuerpo libre. Los esfuerzos no solamente tienen magnitud y dirección, sino que también dependen del área sobre la cual actúan. Podemos convertir un esfuerzo en su fuerza correspondiente multipicándolo por el área sobre la cual actúa. El ejemplo numérico presentado en la sección 6.7 ilustra este método de cálculo.

Es muy importante recordar que se considera que los esfuerzos que se están calculando actúan en un *punto* particular sobre la superficie inclinada; no son los mismos sobre *toda* la sección inclinada. Por ahora no nos importa si estos esfuerzos son o no máximos. Estamos interesados solamente en la magnitud y dirección de estos esfuerzos y en el método para calcularlos. Los esfuerzos máximos se calcularán en secciones posteriores.

6.7 Determinación de esfuerzos sobre una sección oblicua

El método básico para calcular los esfuerzos normal y cortante sobre una sección oblicua a través de un cuerpo es la técnica llamada de *cuerpo libre*. El ejemplo 6.8 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 6.8 Determinar los esfuerzos en el punto *A* sobre una sección oblicua cortada según un ángulo de 60° con respecto al eje del miembro mostrado en la Fig. 6.18. El punto *A* es un pequeño cubo sobre la superficie exterior de un eje de 2 plg de diámetro.

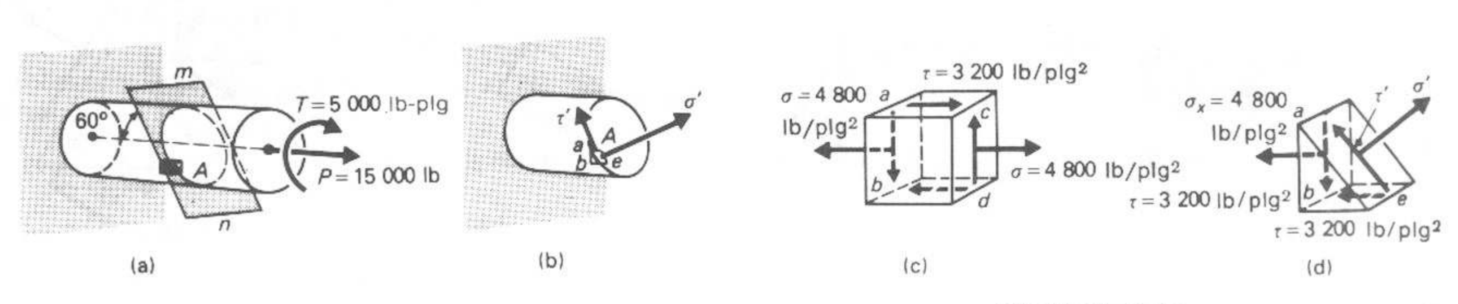


FIGURA 6.18

SOLUCION El esfuerzo normal sobre las caras verticales *ab* y *cd* del punto *A* se calcula como:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{15\,000}{(\pi/4)(2)^2} = 4\,800 \text{ lb/plg}^2$$

El esfuerzo cortante sobre la superficie es:

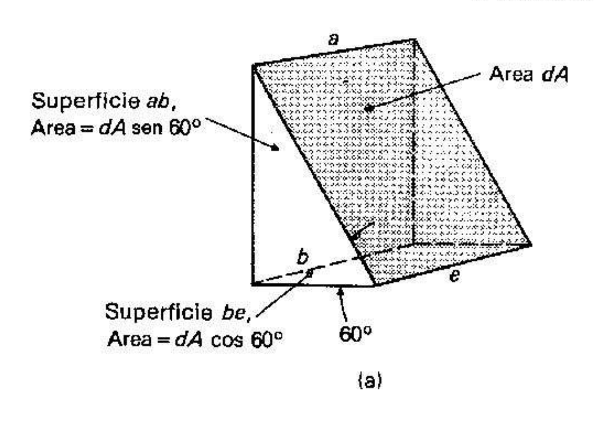
$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{5\,000(1)}{(\pi/32)(2)^4} = 3\,200 \text{ lb/plg}^2$$

Estos esfuerzos se muestran sobre el cubo elemental de la Fig. 6.18 (c).

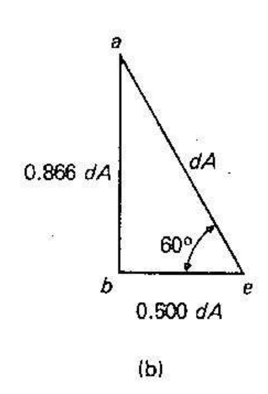
La sección a 60° con respecto al eje pasa a través de la arista superior *a* del cubo. Los esfuerzos σ y τ', mostrados sobre la cara inclinada de la cuña resultante de la Fig. 6.18 (d), son las cantidades que se deben calcular. La determinación de estos esfuerzos se hace mediante un análisis estático de las fuerzas sobre la cuña.

Primero los esfuerzos deben convertirse en fuerzas. Para hacer esto, multiplicamos los esfuerzos por las áreas sobre las que actúan. Es más conveniente considerar el área de la superficie inclinada de la cuña como *dA*, y las superficies de los otros dos lados como las fracciones correspondientes de *dA*. La Fig. 6.19 (a) y (b), muestra el área de la superficie, *ae* como *dA*, y las áreas de *ab* y *be* como *dA* sen 60° y *dA* cos 60°, respectivamente.

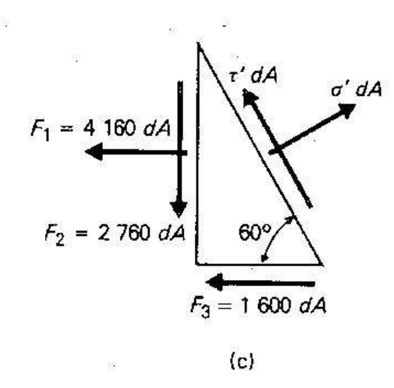
Los esfuerzos que actúan sobre estas áreas deben convertirse en las fuerzas correspondientes. Los resultados, que se dan en la Fig. 6.19 (c), se calculan a continuación.



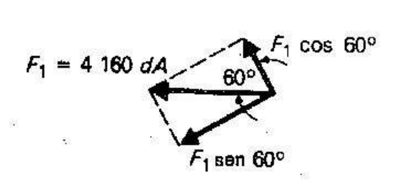
(a)

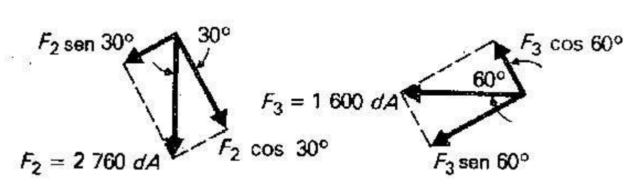


(b)

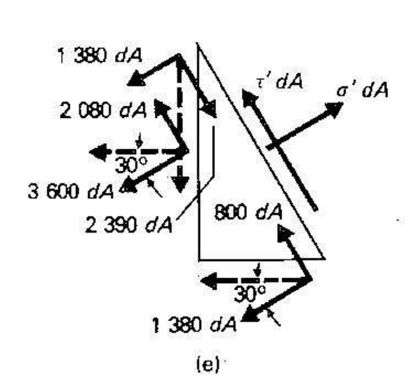


(c)





(d)



(e)

FIGURA 6.19

Superficie ae:

$$P'_N = \tau' \, dA, \qquad P'_s = \sigma' \, dA.$$

Superficie ab:

$$F_1 = \sigma A = 4\,800(0.866\, dA), \qquad F_1 = 4\,160\, dA;$$
$$F_2 = \tau A = 3\,200(0.866\, dA), \qquad F_2 = 2\,760\, dA.$$

Superficie be:

$$F_3 = \tau A = 3\,200(0.500\, dA), \qquad F_3 = 1\,600\, dA.$$

Se considera que las fuerzas mostradas en la Fig. 6.19 (c) son concurrentes pues la cuña es de tamaño infinitesimal. Solamente es necesario resolver las ecuaciones de equilibrio, $\Sigma F_X = 0$ y $\Sigma F_Y = 0$ para conocer las dos incógnitas σ' y τ'. Cuando se aplican estas ecuaciones, todas las fuerzas mostradas en la Fig. 6.49 (c) pueden descomponerse en sus componentes horizontal y vertical. Aunque este es un tratamiento válido, las incógnitas σ' y τ' aparecen en ambas ecuaciones, y por consiguiente es necesaria la solución de ecuaciones simultáneas.

Un enfoque más conveniente, particularmente relacionado con el material presentado en la sección 6.8, consiste en descomponer todas las fuerzas en sus componentes paralelos y perpendiculares a la superficie inclinada de la cuña, como se muestra en la Fig. 6.19 (d) y (e). Después sumamos las fuerzas en estas dos direcciones y así se evita la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas.

A continuación se calculan las componentes de F_1, F_2 y F_3 en las direcciones paralela y perpendicular a la superficie inclinada, usando las fuerzas mostradas en la Fig. 6.19 (d). Los resultados se muestran en la Fig. 6.19 (e).

Fuerza $\mathbf{F_1}$:

$$F_{1\parallel} = F_1 \cos 60° = 4\,160\, dA(0.500) = 2\,080\, dA;$$
$$F_{1\perp} = F_1 \operatorname{sen} 60° = 4\,160\, dA(0.866) = 3\,600\, dA.$$

Fuerza $\mathbf{F_2}$:

$$F_{2\parallel} = F_2 \cos 30° = 2\,760\, dA(0.866) = 2\,390\, dA;$$
$$F_{2\perp} = F_2 \operatorname{sen} 30° = 2\,760\, dA(0.500) = 1\,380\, dA.$$

Fuerza $\mathbf{F_3}$:

$$F_{3\parallel} = F_3 \cos 60° = 1\,600\, dA(0.500) = 800\, dA;$$
$$F_{3\perp} = F_3 \operatorname{sen} 60° = 1\,600\, dA(0.866) = 1\,380\, dA.$$

Aplicando las ecuaciones de estática al cuerpo libre de la fig. 6.19 (e), tenemos:

$$\sum F_\perp = 0: \qquad \sigma' \, dA - 3\,600\, dA - 1\,380\, dA - 1\,380\, dA = 0,$$
$$\sigma' \, dA = +6\,360\, dA; \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_\parallel = 0: \qquad \tau' \, dA - 2\,390\, dA + 2\,080\, dA + 800\, dA = 0,$$
$$\tau' \, dA = -490\, dA. \qquad \text{(b)}$$

Se determinan los esfuerzos dividendo las fuerzas dadas por las ecs. (a) y (b) por el área dA. Los esfuerzos son, entonces:

$$\sigma' = +6\,360 \text{ lb/plg}^2,$$
$$\tau' = -490 \text{ lb/plg}^2.$$

El signo "más" para el esfuerzo normal significa que el sentido supuesto del esfuerzo normal desconocido de la Fig. 6.19 era el sentido correcto. El signo "menos" para el esfuerzo cortante significa que en la Fig. 6.19, el sentido supuesto estaba incorrecto. El esfuerzo cortante realmente actúa hacia abajo del plano, en vez de hacia arriba, como se indica. ■

Problemas

6.39-6.44 Las Figs. P6.39 a P6.44 muestran bloques de esfuerzos en cuerpos sujetos tanto a esfuerzo normal como a esfuerzo cortante. Determinar los esfuerzos normal y cortante sobre los planos inclinados.

6.45 Dado un eje de 50 mm de diámetro (Fig. P6.45), ¿cuáles son los esfuerzos normal y cortante para un punto en la superficie exterior del eje según ángulos de inclinación de 75° y 60° con respecto al eje del árbol?

6.46 Determinar los esfuerzos normal y cortante en el punto A (Fig. P6.46) según ángulos de inclinación de 45° y 30° con respecto al eje del árbol. El punto A está en las fibras de la parte superior en el centro del eje. Despréciese el peso del eje y el de las poleas. El diámetro de aquél es 1 plg.

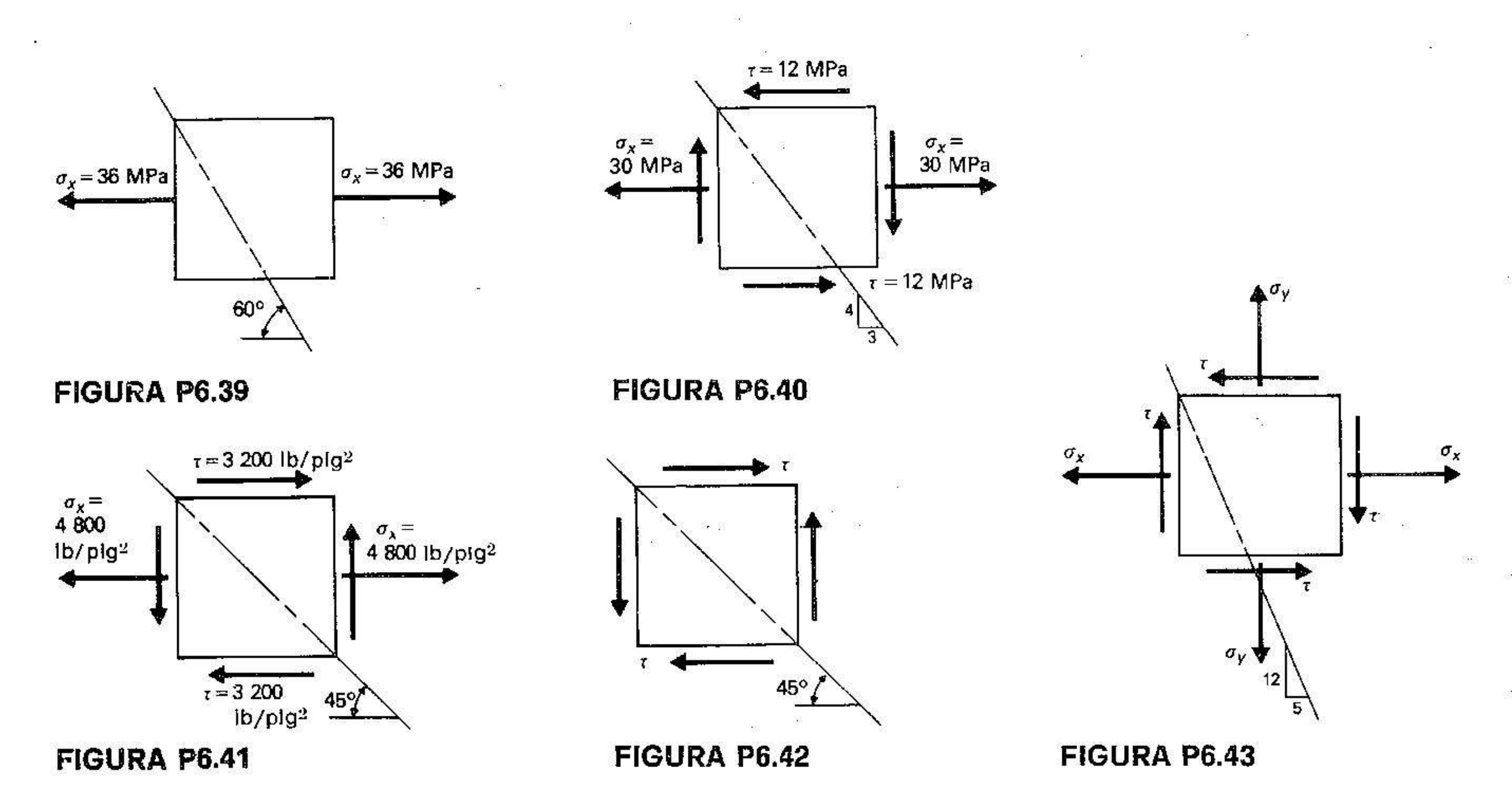


FIGURA P6.39

FIGURA P6.40

FIGURA P6.41

FIGURA P6.42

FIGURA P6.43

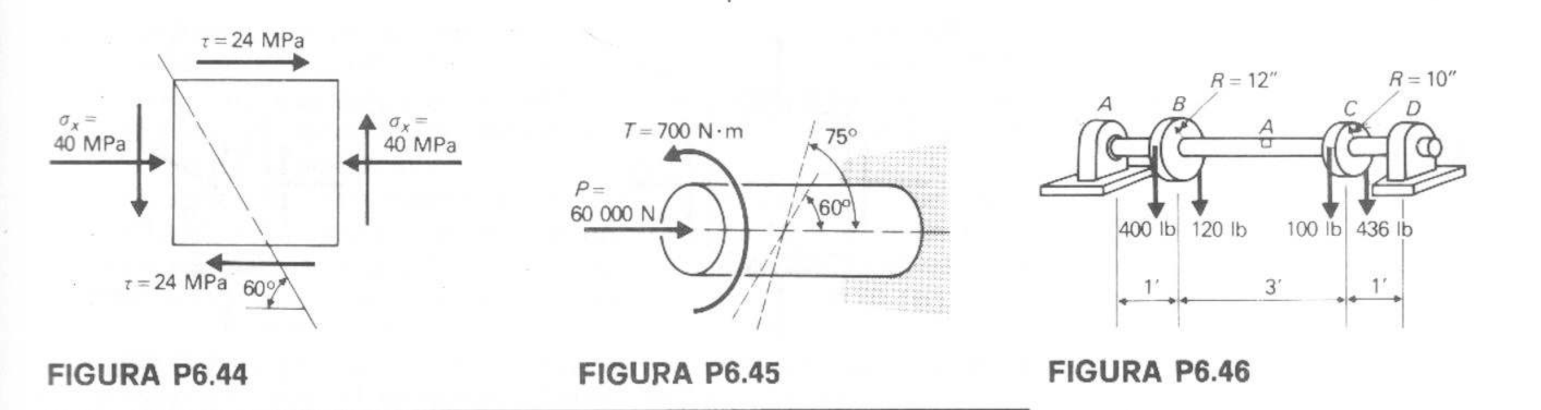


FIGURA P6.44 **FIGURA P6.45** **FIGURA P6.46**

6.8 Fórmulas generales para el esfuerzo en un punto

El método anterior para calcular esfuerzos además de requerir de mucho tiempo, solamente determina los esfuerzos a un ángulo particular de inclinación. Sin embargo, se pueden deducir fórmulas generales para los esfuerzos normal y cortante en un punto sobre un plano de cualquier inclinación deseada. La deducción emplea las mismas técnicas que las descritas en la sección 6.7.

Para obtener fórmulas que sean suficientemente generales para resolver todas las combinaciones posibles de esfuerzo plano, se deducirán las fórmulas para los esfuerzos mostrados sobre el cubo elemental de la Fig. 6.20 (a). La cuña mostrada en la Fig. 6.20 (b) muestra las fuerzas que actúan sobre las superficies. Nuestra tarea consiste en deducir ecuaciones para σ' y τ' escribiendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre. Para poder sumar las fuerzas paralelas y perpendiculares a la superficie inclinada, se deben descomponer las fuerzas mostradas en la Fig. 6.20 (b) en sus componentes según esas direcciones. Estas componentes se muestran en la Fig. 6.20 (c).

A partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 6.20 (d), se tiene:

$$\sum F_{\perp} = 0: \quad \sigma'\,dA + \tau\,dA \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau\,dA\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$- \sigma_x\,dA\cos^2\theta - \sigma_y\,dA\operatorname{sen}^2\theta = 0,$$

$$\sigma' = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\operatorname{sen}^2\theta - 2\tau\operatorname{sen}\theta\cos\theta. \quad \text{(a)}$$

Para obtener una expresión más útil, sustitúyanse las identidades trigonométricas:

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

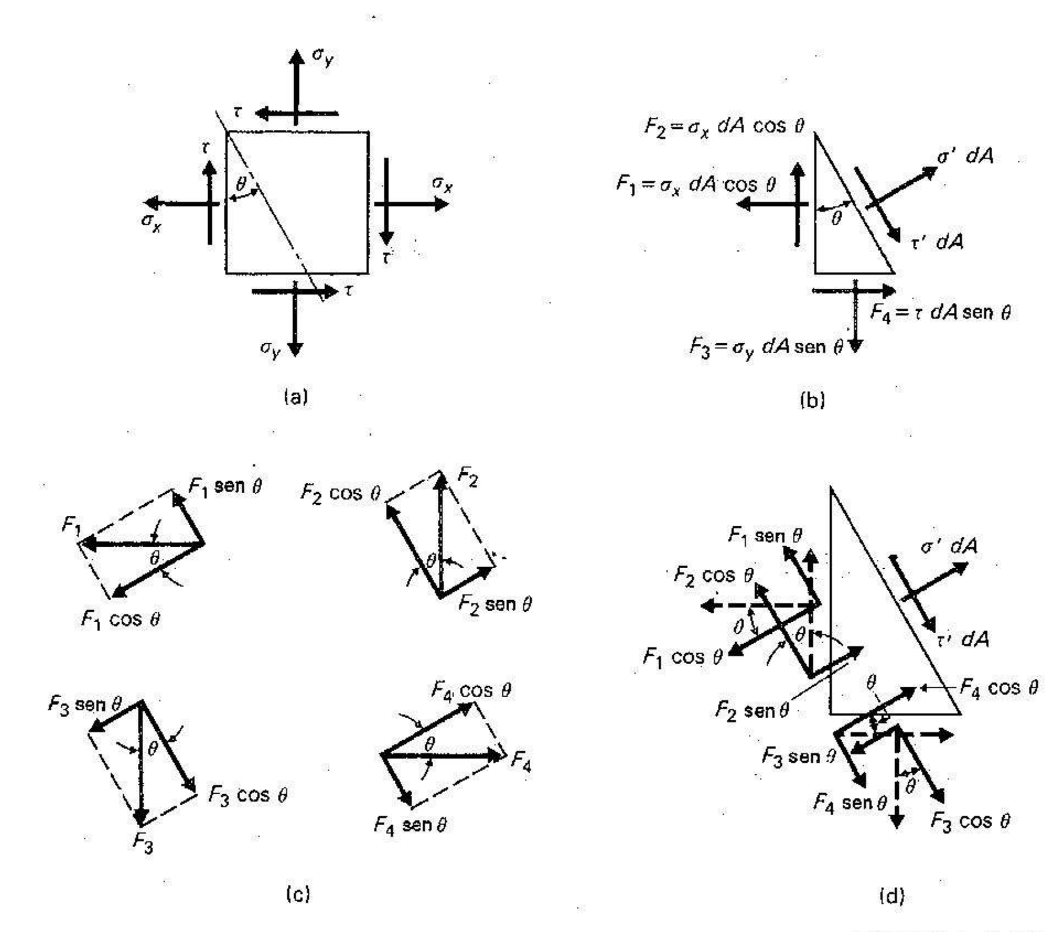


FIGURA 6.20

en la ec. (a). Haciendo estas sustituciones y simplificando la expresión resultante se llega a:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau \operatorname{sen} 2\theta. \tag{6.3}$$

Análogamente, las fuerzas paralelas al plano inclinado pueden sumarse, como se indica a continuación:

$$\sum F_{\parallel} = 0: \qquad \tau'\, dA - \sigma_x\, dA \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \tau\, dA \cos^2\theta + \tau\, dA \operatorname{sen}^2\theta$$
$$+ \sigma_y\, dA \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0,$$
$$\tau' = (\sigma_x - \sigma_y)(\operatorname{sen}\theta \cos\theta) + \tau(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta). \tag{b}$$

Nuevamente, haciendo las mismas sustituciones trigonométricas y simplificando la expresión resultante, tenemos:

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau \cos 2\theta. \tag{6.4}$$

Usamos las ecs. (6.3) y (6.4) para calcular los esfuerzos normal y cortante según cualquier ángulo de inclinación. Sin embargo, se debe adoptar una convención de signos de manera que el signo algebraico

de la respuesta indique la clase de esfuerzo presente en la sección. La convención de signos para las ecs. (6.3) y (6.4) considera los esfuerzos de tensión como positivos y los esfuerzos de compresión como negativos. Los esfuerzos cortantes en los sentidos mostrados en la Fig. 6.20 (a) se considera que son positivos.

De acuerdo con esta convención, un valor positivo del esfuerzo normal indica que el esfuerzo es de tensión, como se indica mediante el sentido de σ' en la Fig. 6.20 (b), y un resultado positivo para el esfuerzo cortante indica que τ' tiene el sentido mostrado en la Fig. 6.20 (b).

EJEMPLO 6.9 Determinar los esfuerzos normal y cortante en el punto *A* sobre el eje descrito en el ejemplo 6.8 (Usense las ecs. 6.3 y 6.4)

SOLUCION Los esfuerzos en el punto *A* se muestran en la Fig. 12.7. En este caso,

$$\sigma_x = +4\,800 \text{ lb/plg}^2 \qquad \sigma_y = 0,$$

y

$$\tau = -3\,200 \text{ lb/plg}^2$$

pues los esfuerzos cortantes tienen el sentido opuesto al mostrado en la Fig. 6.20 (a). El ángulo θ es de 30°. Aplicando las ecs. (6.3) y (6.4), se tiene:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau \operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \frac{4\,800 + 0}{2} + \frac{4\,800 - 0}{2} \cos 60° - (-3\,200) \operatorname{sen} 60°$$

$$= +6\,360 \text{ lb/plg}^2$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau \cos \theta$$

$$= \frac{4\,800 - 0}{2} \operatorname{sen} 60° + (-3\,200) \cos 60°$$

$$= +490 \text{ lb/plg}^2$$

Estos son los mismos resultados obtenidos en el ejemplo 6.8. ■

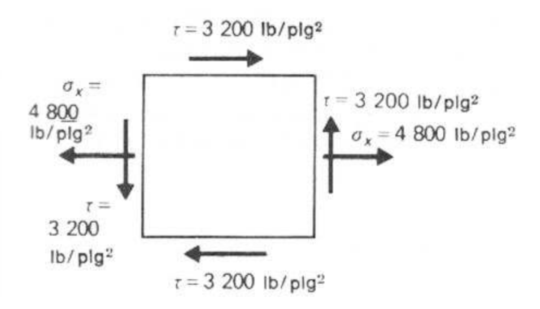


FIGURA 6.21

Problemas

Usando las ecuaciones (6.3) y (6.4), resolver los siguientes problemas

6.47 Problema 6.39
6.48 Problema 6.40
6.49 Problema 6.41
6.50 Problema 6.42
6.51 Problema 6.43
6.52 Problema 6.44
6.53 Problema 6.45
6.54 Problema 6.46

6.9 Esfuerzos principales

Los esfuerzos en un punto situado sobre un plano inclinado según un ángulo θ se pueden calcular a partir de las ecs. (6.3) y (6.4). Sin embargo, no se sabe si los esfuerzos calculados mediante estas ecuaciones para cualquier ángulo particular son los esfuerzos máximos o mínimos posibles. Los esfuerzos máximos y mínimos en un punto se llaman los esfuerzos *principales*, y es importante para el proyectista poder calcular estos esfuerzos principales.

Un método para obtener los esfuerzos principales para un problema dado, es representar gráficamente los valores del esfuerzo a partir de la ec. (6.3), con los valores correspondientes de θ. Si esto se hace, se obtendrá una gráfica semejante a la mostrada en la Fig. 6.22. Las coordenadas de los esfuerzos principales en A y B podrían entonces obtenerse gráficamente. Sin embargo, este método es muy laborioso y debe repetirse para cada combinación numérica de esfuerzos que surja. Por consiguiente, es más conveniente obtener fórmulas generales para los esfuerzos principales.

La pendiente de la gráfica de una ecuación en cualquier punto es la pendiente de la tangente a la curva en ese punto, que es la primera derivada de la ecuación de la curva. Para la ec. (6.3), la primera derivada es $d\sigma'/d\theta$. En la Fig. 6.22 se ve que la pendiente de la curva en el punto donde se presenta el esfuerzo principal es cero (horizontal). Por consiguiente, se obtiene una ecuación general para los esfuerzos principales resolviendo un problema de máximos y mínimos, tal como el descrito anteriormente. Esto es, se deriva la ec. (6.3) y se iguala la derivada a cero. Los

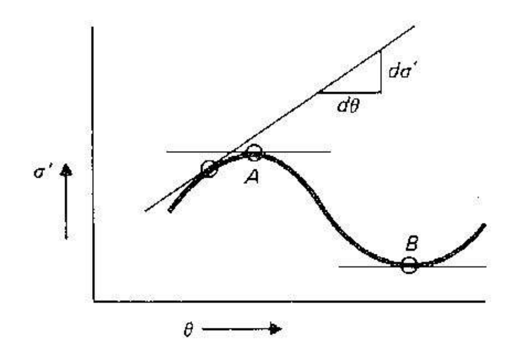


FIGURA 6.22

valores de θ para esa pendiente (cero) serán los valores de θ correspondientes a los esfuerzos principales.

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau \operatorname{sen} 2\theta, \tag{6.3}$$

$$\frac{d\sigma'}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\operatorname{sen} 2\theta - 2\tau\cos 2\theta = 0.$$

Resolviendo esta expresión, obtenemos

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{6.5}$$

La ec. (6.5) da dos valores de 2θ (con diferencia de 180°), correspondientes a los puntos A y B de la Fig. 6.22. Esto significa que las superficies oblicuas sobre las cuales ocurren los esfuerzos principales máximo y mínimo, se localizan con una diferencia en θ de 90°. Esto se discutirá en forma más completa en la sección 6.11.

Si se sustituyen los valores de 2θ de la ec. (6.5) en la ec. (6.3), se obtiene una fórmula para los esfuerzos normales principales. Los resultados finales (se omiten los pasos algebraicos intermedios) para los esfuerzos principales se dan mediante las ecs. (6.6) y (6.7):

$$\sigma_{\text{máx}} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau)^2}, \tag{6.6}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + (\tau)^2}. \tag{6.7}$$

EJEMPLO 6.10 Determinar los esfuerzos principales en el eje de acero mostrado en la fig. 6.23. El eje tiene un diámetro de 80 mm. Las poleas pesan 1 000 N cada una, y las tensiones en las bandas se muestran en la figura. Las chumaceras en los extremos permiten rotación suficiente de modo que los apoyos extremos pueden considerarse como articulados. Despréciese el peso del eje.

SOLUCION El eje está sujeto tanto a esfuerzos de flexión como de torsión. Los esfuerzos flexionantes $\sigma = Mc/I$ son máximos en las fibras de la parte superior e inferior del eje. Los esfuerzos de torsión $\tau = Tc/J$ son máximos en las fibras del anillo exterior extremo. Esto significa que los valores máximos de σ y τ ocurren simultáneamente en los puntos a y b de la sección transversal mostrada en la Fig. 6.23 (b). Los bloques de esfuerzos correspondientes a esos puntos se muestran en la Fig. 6.23 (c).

Los esfuerzos flexionantes en a y b se pueden calcular así:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(2\,100)(40 \times 10^{-3})}{(\pi/64)(80 \times 10^{-3})^4} = 41.78 \text{ MPa},$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(2\,400 \times 400 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-3})}{(\pi/32)(80 \times 10^{-3})^4} = 9.55 \text{ MPa}.$$

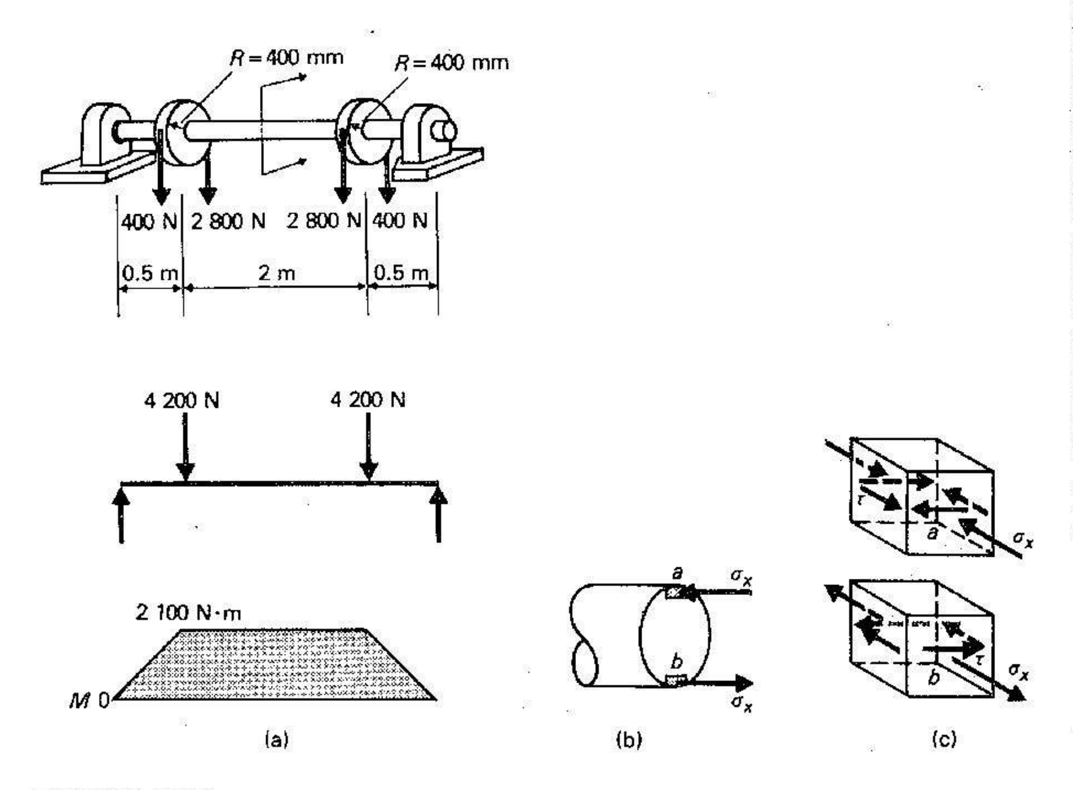


FIGURA 6.23

Las ecuaciones (6.6) y (6.7) pueden aplicarse tanto al bloque a como al b. Los resultados serán numéricamente iguales, pero de signos contrarios.

Consideremos los esfuerzos sobre el punto a:

$$\sigma_{\substack{\text{máx}\\ \text{mín}}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau)^2},$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{-41.78 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{-41.78 - 0}{2}\right)^2 + (9.55)^2},$$

$$\sigma_{\text{máx}} = -20.89 + 22.97 = +2.08 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\text{mín}} = -20.85 - 22.97 = 43.86 \text{ MPa}. \quad ■$$

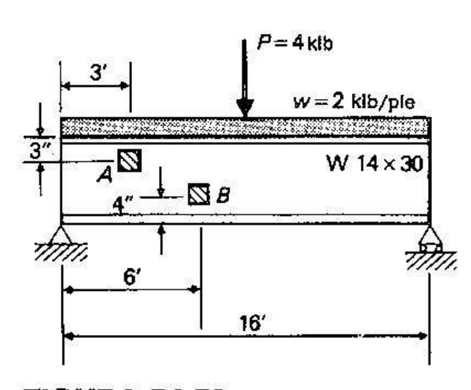


FIGURA P6.58

Problemas

6.55 Calcular los esfuerzos principales en el eje del ejemplo 6.8.
6.56 Calcular los esfuerzos principales en el eje del problema 6.46.
6.57 Calcular los esfuerzos principales en el eje del problema 6.45.
6.58 Determinar los esfuerzos principales en los puntos A y B de la viga W 14 × 30, indicada en la Fig. P6.58.

6.59 Determinar los esfuerzos principales en los puntos *A* y *B* de la vigueta W 21 × 62 indicada en la Fig. P6.59.

6.60 Determinar la posición y la magnitud de los esfuerzos principales en el eje macizo de acero de 60 mm indicado en la Fig. P6.60. El disco pesa 400 N.

6.61 Determinar la posición y la magnitud de los esfuerzos principales en el eje indicado en la Fig. P6.61. El eje tiene un diámetro exterior de 4 plg y un diámetro interior de 2 plg. Las poleas pesan 120 lb cada una.

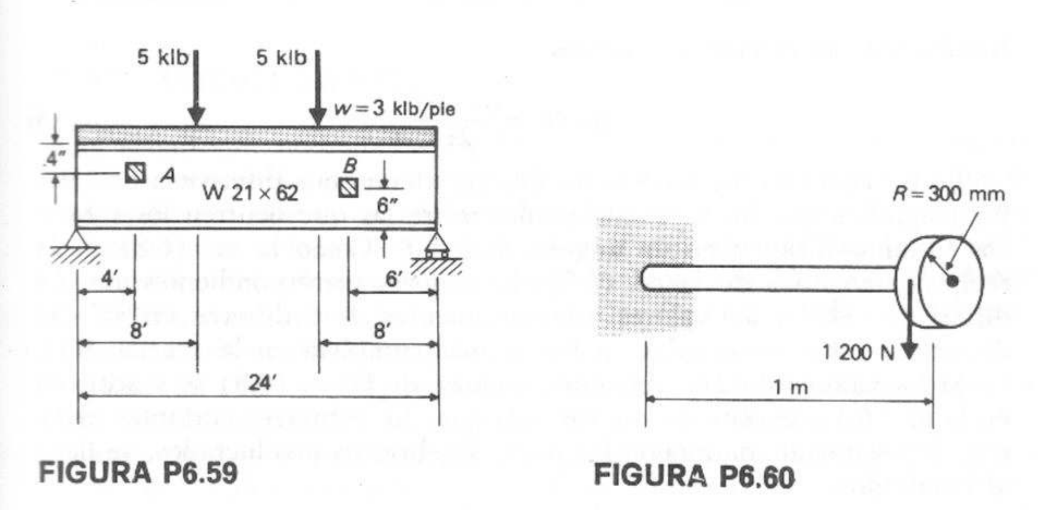


FIGURA P6.59

FIGURA P6.60

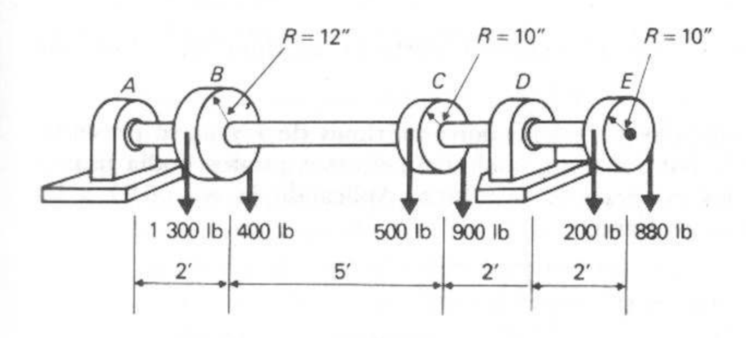


FIGURA P6.61

6.10 Esfuerzos cortantes máximos

En la sección 6.9 se dio un procedimiento para determinar el ángulo para el cual ocurren los esfuerzos normales máximos. El ángulo de inclinación para el cual ocurren los esfuerzos cortantes máximos se determina de la misma manera, es decir, se deriva la ecuación general para

el esfuerzo cortante en un punto (ec. 6.4), y la derivada se iguala a cero. La solución de la ecuación que resulta da los ángulos para los cuales ocurren los esfuerzos cortantes máximos y mínimo. Así:

$$\tau' = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\, 2\theta + \tau \cos 2\theta, \tag{6.4}$$

$$\frac{d\tau'}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau\, \text{sen}\, 2\theta = 0.$$

Resolviendo la ecuación, tenemos

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \tag{6.8}$$

La ec. (6.8) da dos valores de $2\theta_s$ que tienen una diferencia de 180°. Esto significa que las secciones planas sobre las que ocurren los esfuerzos cortantes difieren en un ángulo, $\theta = 90°$. Como la ec. (6.8) es la recíproca negativa de la ec. (8.5), los valores correspondientes de 2θ difieren en 90°, y los valores correspondientes de θ difieren en 45°. Se discutirán estos enunciados en forma más completa en la sección 6.11.

Si los valores de $2\theta_s$ obtenidos a partir de la ec. (6.8) se sustituyen en la ec. (6.4), se obtiene una fórmula para los esfuerzos cortantes máximos. Nuevamente, omitiendo los pasos algebraicos involucrados, se llega al resultado:

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau)^2}. \tag{6.9}$$

EJEMPLO 6.11 Determinar el esfuerzo cortante máximo en el eje del ejemplo 6.10.

SOLUCION En el ejemplo 6.10, los valores máximos de τ y σ_x se presentaron en los puntos a y b. Nuevamente, cualquiera de esos puntos podía usarse, pues la magnitud de los esfuerzos es la misma. Aplicando la ec. (6.9) a los esfuerzos en el punto a, se tiene:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{máx}} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-41.78 - 0}{2}\right)^2 + (9.55)^2} \\ &= 21.17\ \text{MPa.} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Problemas

6.62 Determinar los esfuerzos cortantes máximos que ocurren en el eje del ejemplo 6.8.
6.63 Determinar los esfuerzos cortantes máximos en el eje del problema 6.45.
6.64 Determinar los esfuerzos cortantes máximos en el eje del problema 6.46.
6.65 Determinar los esfuerzos cortantes máximos en los puntos A y B de la viga del problema 6.59.

6.66-6.69 Determinar los esfuerzos cortantes máximos que ocurrirían bajo las condiciones de esfuerzo indicadas en las Figs. P6.39, P6.40, P6.41, y P6.44.
6.70 Determinar los esfuerzos cortantes máximos en los puntos A y B de la del problema 6.58.
6.71 Determinar la posición y la magnitud de los esfuerzos cortantes máximos en el eje del problema 6.61.
6.72 Determinar la posición y la magnitud de los esfuerzos cortantes máximos en el eje del problema 6.60.

6.11 Círculo de Mohr

Las ecuaciones presentadas en las secciones 6.9 y 6.10 pueden usarse para determinar los esfuerzos principales normal y cortante, en un punto. Sin embargo, este no es el método más fácil o más conveniente para calcular estos valores. Un enfoque mejor consiste en usar la solución semigráfica (ideada por el profesor Otto Mohr, en Alemania alrededor de 1882), que representa gráficamente las fórmulas dadas en las secciones anteriores de este capítulo.

Las ecs. (6.3) y (6.4) representan la ecuación de un círculo en forma paramétrica. Cuando se traza un par de ejes coordenados y se sitúan los valores de σ' y τ' que corresponden a un valor de θ, las coordenadas corresponderán a un punto que queda situado sobre la circunferencia de un círculo. Esta propiedad de las ecuaciones hace mucho más fácil resolver problemas que combinen esfuerzos normales y cortantes. Para construir un círculo de Mohr que sirva en la solución de problemas, se usa el siguiente procedimiento. (Véase la Fig. 6.24):

1. Se traza un par de ejes coordenados tomando a σ como eje de las abscisas y a τ como eje de las ordenadas.
2. Se trazan los valores de τ y σ correspondientes a dos superficies mutuamente perpendiculares del cubo elemental, tales como las caras *cd* y *ac* de la Fig. 6.24 (a), obteniendo dos puntos en la periferia del círculo. De acuerdo con la convención de signos, los esfuerzos de tensión son positivos y los esfuerzos de compresión, negativos. Los esfuerzos cortantes que tienden a hacer girar al bloque en sentido de las manecillas del reloj, tales como los de las caras *ab* y *cd*, se consideran positivos, mientras que los esfuerzos cortantes que tienden a hacer girar el bloque en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, tales como los de las caras *ac* y *bd*, se consideran negativos.

   En el círculo de la Fig. 6.24 (b), el punto V con coordenadas $(+\sigma_X, +\tau)$, y el punto H con coordenadas $(+\sigma_Y - \tau)$ son los puntos que se trazan.
3. Se traza la línea recta HCV que une estos dos puntos. Esta recta es el diámetro del círculo cuyo centro es el punto C.
4. Se completa el círculo tomando como centro al punto C y como radio CV.

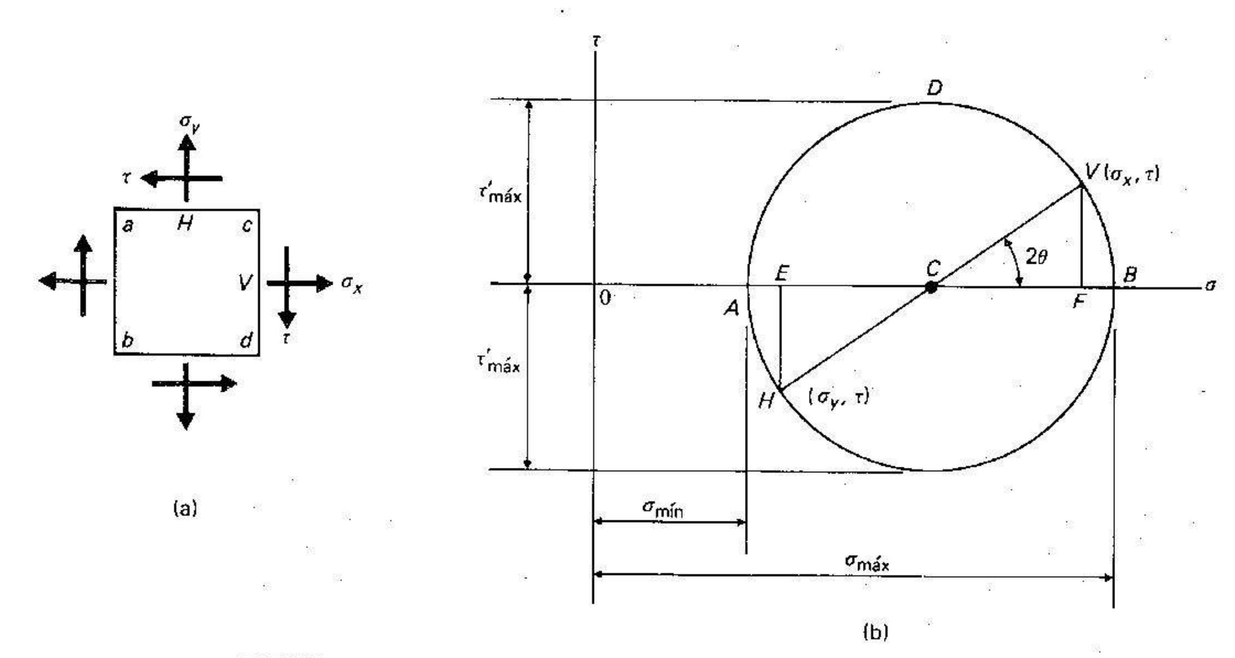


FIGURA 6.24

Las coordenadas de cualquier punto sobre la circunferencia de este círculo representan los esfuerzos normal y cortante correspondientes sobre un plano oblicuo inclinado según un ángulo igual a la mitad del mostrado sobre el círculo de Mohr. Se ve que los esfuerzos principales corresponden a los puntos A y B sobre el círculo, y el esfuerzo cortante máximo es la longitud del radio del círculo.

El uso del círculo de Mohr es un método rápido conveniente para calcular cantidades tales como esfuerzos principales, esfuerzos cortantes máximos y ángulos de inclinación de los planos sobre los que estos esfuerzos ocurren. El esquema puede hacerse a mano libre, pues estamos principalmente interesados en las coordenadas del punto C y el radio del círculo, que se determina mediante el uso del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo CFV de la Fig. 6.24 (b). Los ejemplos siguientes ilustran algunos de los usos de este diagrama.

EJEMPLO 6.12 Determinar los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo, y el ángulo de inclinación necesario para obtener estos esfuerzos, para el eje del ejemplo 6.8. El bloque de esfuerzos se ilustra en la Fig. 6.25.

SOLUCION Los puntos V y H se trazan como se indica, y el círculo se traza con centro en C. Las coordenadas del punto C son $C(2\,400, 0)$. La distancia OB da el esfuerzo principal máximo, que se obtiene como:

$$OB = OC + \text{radio del círculo} = OC + \sqrt{(CF)^2 + (FV)^2}$$

$$= 2\,400 + \sqrt{(2\,400)^2 + (-3\,200)^2} = 2\,400 + 4\,000$$

$$= +6\,400 \text{ lb/plg}^2$$

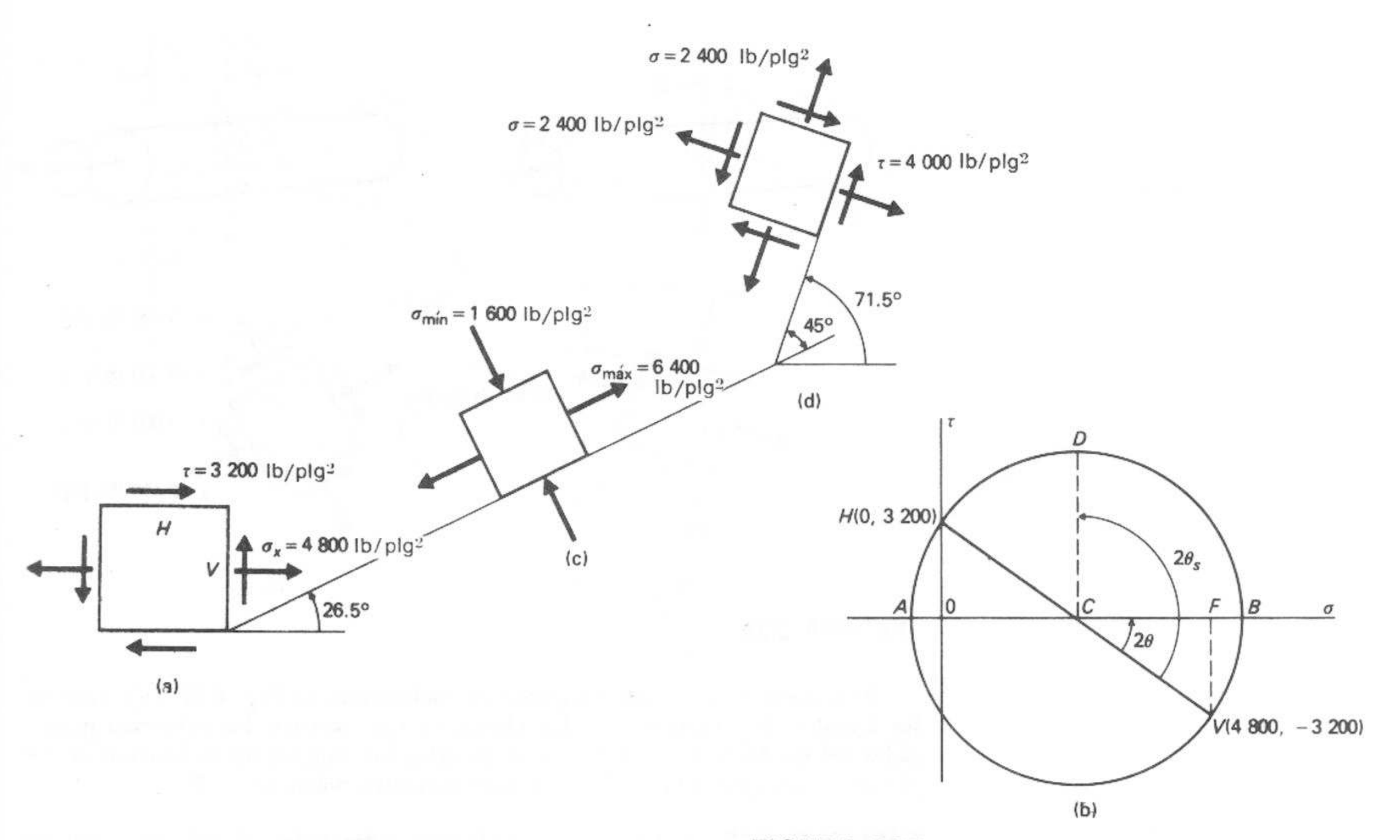


FIGURA 6.25

El esfuerzo principal mínimo es la distancia OA, que se determina así:

$$OA = OC - \text{radio del círculo} = OC - \sqrt{(OC)^2 + (OH)^2}$$
$$= 2\,400 - 4\,000$$
$$= -1\,600 \text{ lb/plg}^2$$

El ángulo de rotación del bloque, requerido para obtener estos esfuerzos es la mitad del valor de 2θ en el diagrama. Así:

$$\tan 2\theta = \frac{FV}{CF} = \frac{3\,200}{2\,400} = 1.33,$$
$$2\theta = 53°,$$
$$\theta = 26.5°.$$

La rotación se muestra en la Fig. 6.25 (c). Como el punto V se movió hasta B, puede pensarse que el esfuerzo principal máximo actúa sobre lo que era la cara vertical. El mismo razonamiento puede usarse al considerar el esfuerzo principal mínimo.

El esfuerzo cortante máximo corresponde a las coordenadas del punto D, que son (2 400, 4 000). El ángulo $2\theta_s$ es igual a $2\theta + 90°$. Por consiguiente,

$$\theta_s = \theta + 45° = 26.5° + 45° = 71.5°.$$

Los esfuerzos para esta orientación se muestran en la Fig. 6.25 (d).

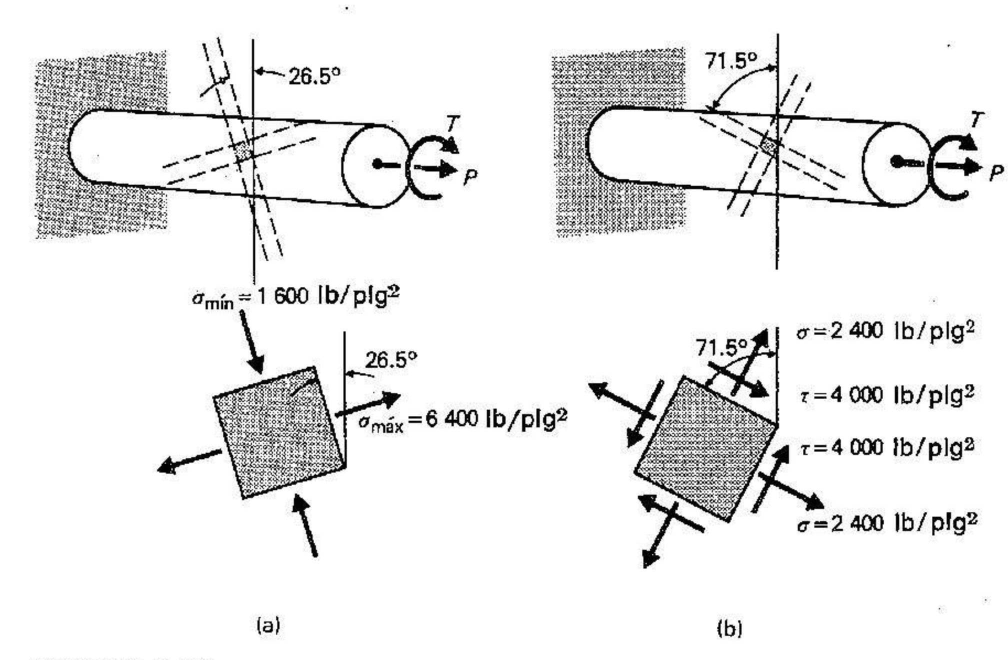


FIGURA 6.26

Para ilustrar mejor estos ángulos de inclinación, la Fig. 6.26 (a) muestra los ángulos de inclinación de los planos en que ocurren los esfuerzos principales del punto *A*. La Fig. 6.26 (b) muestra los ángulos de inclinación de los planos en los que ocurren los esfuerzos cortantes máximos. ■

EJEMPLO 6.13 Determinar los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo, y los planos en que actúan estos esfuerzos, para los esfuerzos mostrados en la Fig. 6.27 (a).

SOLUCION Se trazan los puntos *V* y *H*, como se indica en la Fig. 6.27 (b). Los esfuerzos principales son *OB* y *OA*. Estos valores se pueden determinar como sigue:

$$OB = -OC + \text{Radio del círculo} = -OC + \sqrt{(CF)^2 + (FV)^2}$$
$$= -10 + \sqrt{(50)^2 + (40)^2} = -10 + 64$$
$$= 54 \text{ MPa};$$
$$OA = -OC - \text{Radio del círculo} = -OC - \sqrt{(CE)^2 + (EH)^2}$$
$$= -10 - 64$$
$$= -74 \text{ MPa};$$
$$\tan 2\theta = \frac{FV}{CF} = \frac{40}{50} = 0.80, \qquad 2\theta = 38.7°, \qquad \theta = 19.3°.$$

La orientación de los planos de esfuerzos principales se indica en la Fig. 6.27 (c).

El esfuerzo cortante máximo es el radio del círculo; es decir, *CD* o *CG*, que es:

$$\tau_{máx} = 64 \text{ MPa};$$

FIGURA 6.27

entonces,

$$2\theta_s = 2\theta + 90° = 38.7° + 90° = 128.7°,$$

$$\theta_s = 64.3°.$$

La inclinación de los planos sobre los cuales ocurre el esfuerzo cortante máximo, y los esfuerzos sobre esos planos se indican en la Fig. 6.27 (d). ■

Problemas

6.73-6.81 En las Figs. P6.73 a P6.81 se muestran los esfuerzos en un punto. Determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Mostrar estos valores sobre las caras de bloques de esfuerzos adecuadamente orientados, como se hizo en el ejemplo 6.13.

6.82 Demostrar que las ecs. (6.5) a (6.9) pueden obtenerse a partir de un bosquejo general del círculo de Mohr, tal como el de la Fig. 6.24 (b).

6.83 Determinar el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos normales principales en el eje, o flecha, mostrado en la Fig. P6.83. La flecha tiene un diámetro exterior de 3 plg y un diámetro interior de 2 plg. El peso del disco es de 60 lb.

6.84 Determinar el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos normales principales en el eje de 50 mm mostrado en la Fig. P6.84. Las poleas pesan 100 N cada una.

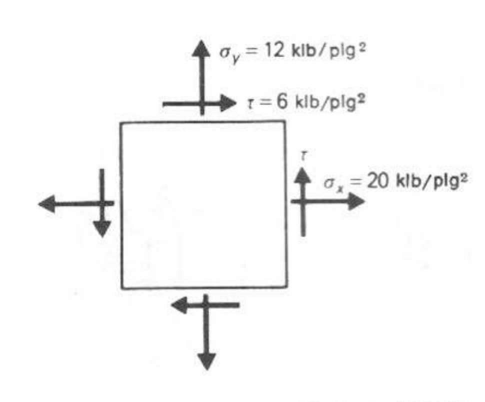


FIGURA P6.73

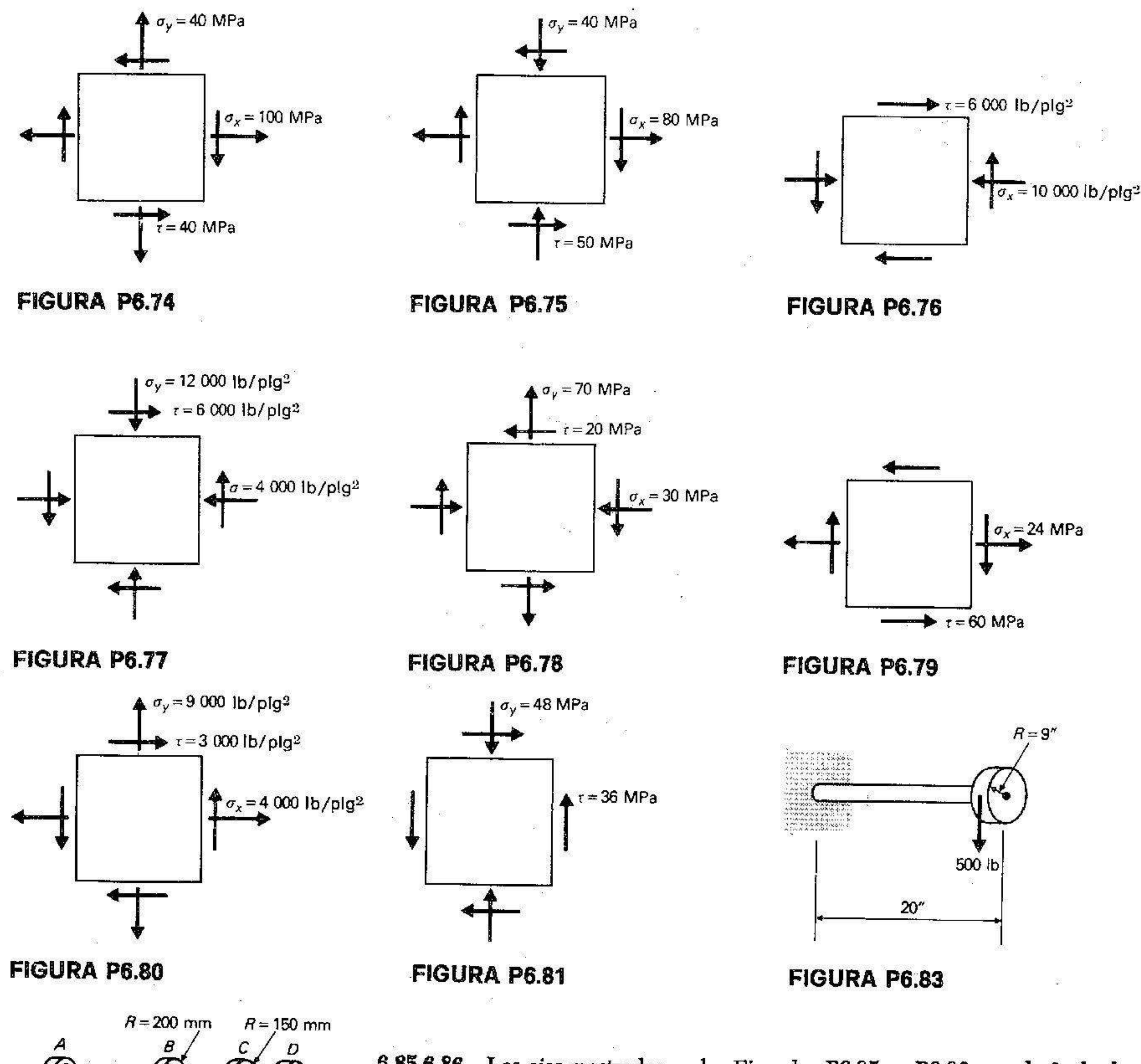


FIGURA P6.74

FIGURA P6.75

FIGURA P6.76

FIGURA P6.77

FIGURA P6.78

FIGURA P6.79

FIGURA P6.80

FIGURA P6.81

FIGURA P6.83

FIGURA P6.84

6.85-6.86 Los ejes mostrados en las Figs. de P6.85 y P6.86 son de 2 plg de diámetro. Supóngase que el peso de las poleas es despreciable. El esfuerzo cortante admisible es de 8 000 lb/plg² y el esfuerzo normal admisible es de 12 000 lb/plg². Determinar el valor admisible de la tensión P sobre la banda.

6.87 Un recipiente a presión en forma de un cilindro cerrado, de 36 plg de diámetro y de $\frac{3}{8}$ plg de espesor está sujeto a una presión interior de 250 lb/plg². Determinar el esfuerzo cortante máximo que ocurrirá en las paredes del cilindro (Fig. P12.46).

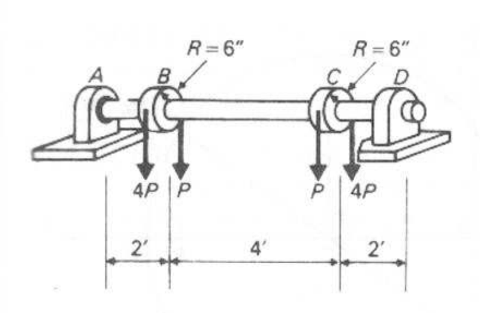


FIGURA P6.85

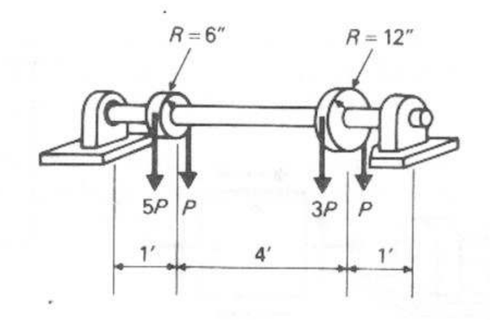


FIGURA P6.86

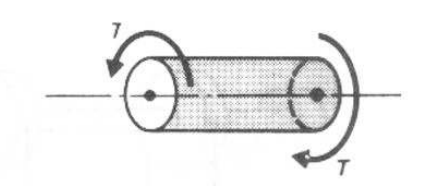


FIGURA P6.88

6.88 El eje de hierro colado de la Fig. P6.88 (de 1 plg. de diámetro) está sujeto a una carga de torsión. Si el esfuerzo último a tensión es de 20 000 lb/plg^2, ¿cuál es el valor del par T que causa la falla?

6.12 Diseño de ejes sujetos a esfuerzos de flexión y cortante combinados

Un eje sujeto a esfuerzos de torsión y cortante puede diseñarse usando un análisis con el círculo de Mohr. En tal caso, se conocen los esfuerzos cortante y normal admisibles, las cargas aplicadas y las longitudes, el problema consiste en determinar el diámetro necesario para el eje.

Se pueden deducir fórmulas para el diámetro necesario del eje usando el círculo de Mohr. Como se imponen dos condiciones de esfuerzos superpuestas, cada una debe considerarse independientemente. Se determinarán dos diámetros, y el mayor de ellos es el que se elije para el diseño.

Considere el eje mostrado en la Fig. 6.28 (a). El eje está sujeto a un momento flexionante máximo M y a un par máximo T; la magnitud de ambos se conoce. Además, el punto de mayor esfuerzo será el punto donde los esfuerzos máximos causados por M y T ocurran simultáneamente. El bloque de esfuerzos de la Fig. 6.28 (b) representa estos esfuerzos, y el círculo de la Fig. 6.28 (c) representa todas las combinaciones de este esfuerzo.

Consideremos primero que el esfuerzo cortante gobierna el diseño. Procedamos como sigue:

$$\tau_{\text{máx}} = \text{radio del círculo} = \sqrt{(CF)^2 + (FV)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} \qquad \text{(a)}$$

Sustituyendo $J = I_x + I_y = 2I$ en la Ec. (a), tenemos

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{J}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} = \left(\frac{c}{J}\right)\sqrt{M^2 + T^2}. \qquad \text{(b)}$$

(a) (b) (c)

FIGURA 6.28

Como $J = \pi D^4/32$ y $c = D/2$, estos valores pueden sustituirse en la ec. (b) y resolverse esta ecuación para D, como sigue:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{D/2}{\pi D^4/32}\sqrt{M^2 + T^2},$$

$$D^3 = \frac{16\sqrt{M^2 + T^2}}{\pi \tau_{\text{máx}}},$$

$$D = \left(\frac{5.1}{\tau_{\text{máx}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3} \tag{6.10}$$

Considerando que el esfuerzo normal gobierna el diseño, se ve que el esfuerzo crítico está representado por la distancia OB de la Fig. 6.28 (c). Se obtiene la ecuación:

$$\sigma_{\text{máx}} = OC + \text{radio del círculo} = OC + \sqrt{(CF)^2 + (FV)^2}$$

$$= \frac{Mc}{2I} + \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} = \frac{Mc}{2I} + \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{2I}\right)^2}$$

$$= \frac{Mc}{2I} + \frac{c}{2I}\sqrt{M^2 + T^2} \tag{c}$$

Sustituyendo $I = \pi D^4/64$ y $c = D/2$ en la ec. (c), se calcula el diámetro necesario como sigue:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{MD/2}{2[(\pi/64)D^4]} + \frac{D/2}{2[(\pi/64)D^4]}\sqrt{M^2 + T^2},$$

$$D^3 = \frac{16}{\pi \sigma_{\text{máx}}}(M + \sqrt{M^2 + T^2}),$$

$$D = \left[\frac{5.1}{\sigma_{\text{máx}}}(M + \sqrt{M^2 + T^2})\right]^{1/3} \tag{6.11}$$

EJEMPLO 6.14 Un eje está sujeto a un momento flexionante de 6 000 lb-pie y un par de 4 000 lb-pie. El esfuerzo normal permisible es de 12 000 lb/plg^2 y el esfuerzo cortante permisible es de 8 000 lb/plg^2. Diseñar el eje.

SOLUCION Cada una de las condiciones se investigarán separadamente. Primero se considera el esfuerzo cortante permisible. Sustituyendo valores en la ec. (6.10), se encuentra que:

$$\begin{aligned} D &= \left[\frac{5.1}{\tau_{\text{máx}}}\sqrt{M^2+T^2}\right]^{1/3} \\ &= \left[\frac{5.1}{8\,000}\sqrt{(72\,000)^2+(48\,000)^2}\right]^{1/3} \\ &= 3.8 \text{ plg.} \end{aligned}$$

Suponiendo ahora que el esfuerzo normal permisible gobierna el diseño, usamos la ec. (6.11) y se obtiene:

$$\begin{aligned} d &= \left[\frac{5.1}{\sigma_{\text{máx}}}\left(M+\sqrt{M^2+T^2}\right)\right]^{1/3} \\ &= \left[\frac{5.1}{12\,000}\left(72\,000+\sqrt{(72\,000)^2+(48\,000)^2}\right)\right]^{1/3} \\ &= 4.1 \text{ plg} \end{aligned}$$

El diámetro del eje debería ser por lo menos de 4.1 plg. ■

Problemas

6.89 Para el eje mostrado en la Fig. P6.89 el esfuerzo normal admisible es de 12 000 lb/plg^2 y el esfuerzo cortante admisible es de 8 000 lb/plg^2. Las poleas *A* y *B* pesan 100 lb cada una y la polea *C* pesa 200 lb. Diseñar el eje.

6.90 El eje mostrado en la Fig. P6.90 tiene un esfuerzo normal admisible de 12 000 lb/plg^2 y un esfuerzo cortante admisible de 8 000 lb/plg^2. Las poleas *A* y *C* pesan 100 lb cada una y la polea *B* pesa 160 lb. Diseñar el eje.

6.91 Un eje está sujeto a un momento flexionante máximo de 5 400 N · m y a un momento de torsión máximo de 4 000 N · m. El esfuerzo normal admisible es de 70 MPa, y el esfuerzo cortante admisible es de 42 MPa. Determinar el diámetro requerido para el eje.

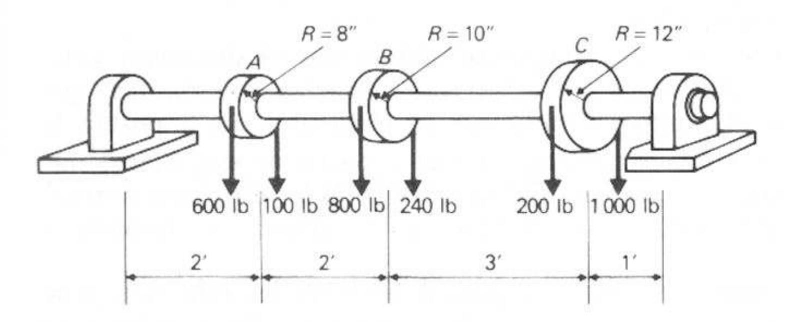


FIGURA P6.89

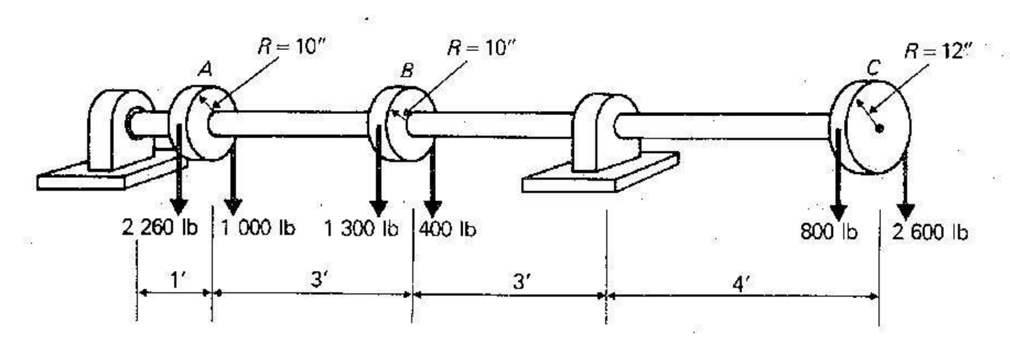


FIGURA P6.90

6.92 Resolver el problema 6.91 si el momento flexionante máximo es de 10 kN · m y el momento de torsión máximo es de 6 kN · m.

6.13 Círculo de Mohr para esfuerzos tridimensionales

La sección 6.11 describe un método para determinar los esfuerzos máximos, normal y cortante para situaciones biaxiales (bidimensionales). Surgen dos aspectos con relación a si la solución es completa. El primero es la pregunta ¿hay algún otro plano con alguna otra posición en un sistema de referencia tridimensional que pueda identificar esfuerzos mayores que los dados por el análisis bidimensional estándar? Segundo, ¿cómo se modifica el análisis si se presentan esfuerzos sobre una tercera cara mutuamente perpendicular? Cada una de estas preguntas se contesta fácilmente extendiendo la teoría a una tercera dimensión.

Consideremos el elemento sujeto a los esfuerzos normales σ_1, σ_2, y σ_3, como se indica en la Fig. 6.29. Debido a que no se presentan esfuerzos cortantes en estas caras, estos esfuerzos son los esfuerzos principales. Supongamos que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Podemos trazar un círculo de Mohr para dos caras mutuamente perpendiculares cualesquiera.

La Fig. 6.29 (b) indica la ubicación de σ_1 y σ_2 en el plano *X-Y*; la Fig. 6.29 (c), la de σ_2 y σ_3 en el plano *Y-Z*, y la Fig. 6.29 (d), la de σ_1 y σ_3 en el plano X-Z. Cada uno de estos diagramas describe el estado de esfuerzos sobre dos planos mutuamente perpendiculares girados alrededor de un eje del tercer plano.

Si superponemos estos tres diagramas obtenemos el diagrama compuesto de la Fig. 6.30. Todos los esfuerzos, normales y cortantes, que pueden ocurrir en el punto definido por el elemento, sin importar la orientación de la sección, se pueden obtener a partir de este diagrama. Cualquier punto dentro de la porción sombreada da los esfuerzos normal y cortante en un punto donde la orientación está girada con respecto a dos ejes.

Generalmente usamos el diagrama para determinar los esfuerzos principales normales y los esfuerzos cortantes máximos. Estos valores se

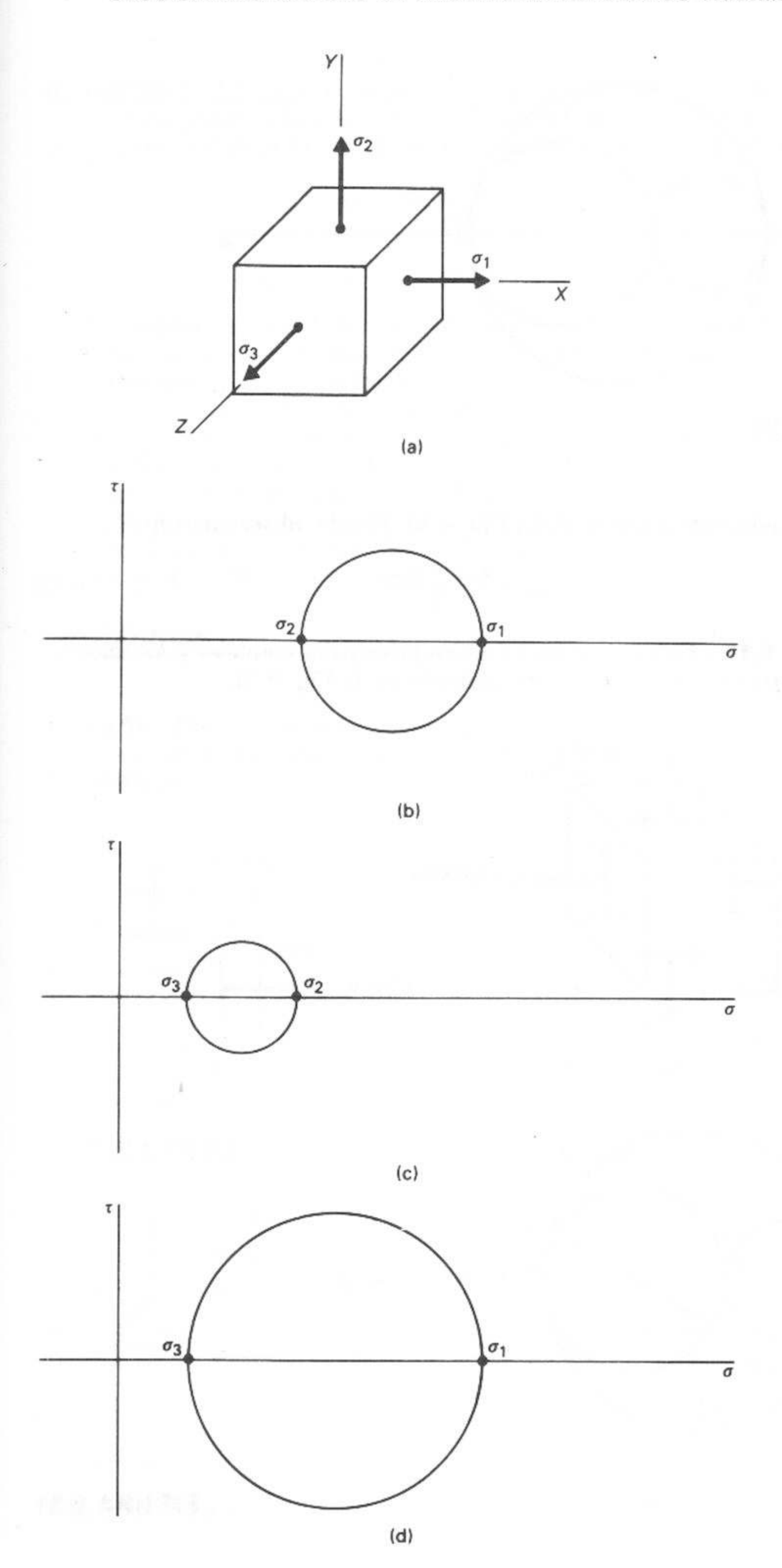

Y
σ_2
σ_1
X
σ_3
Z
(a)
τ
σ_2
σ_1
σ
(b)
τ
σ_3
σ_2
σ
(c)
τ
σ_3
σ_1
σ
(d)

FIGURA 6.29

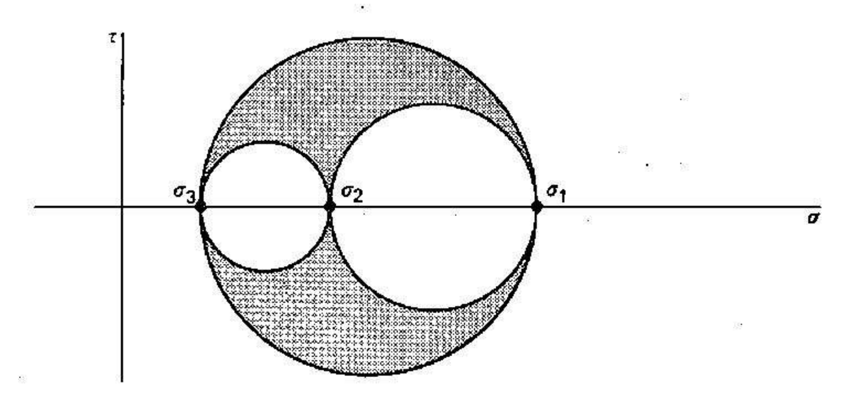
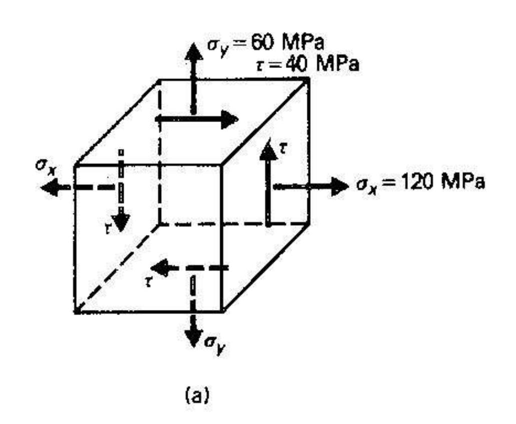


FIGURA 6.30

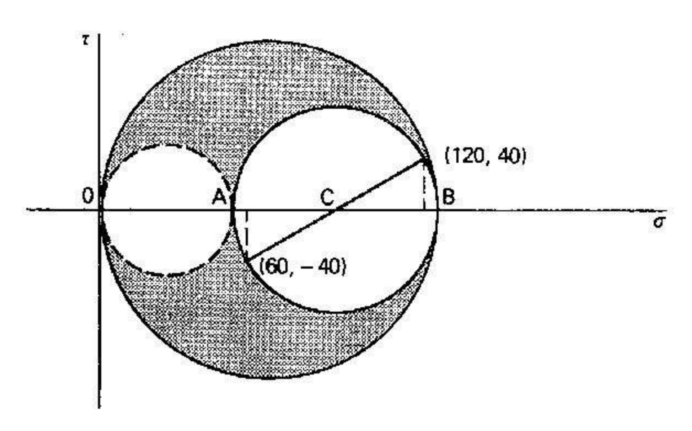
obtienen fácilmente a partir de la Fig. 6.30. Puede observarse que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}. \tag{6.12}$$

EJEMPLO 6.15 Determinar los esfuerzos principales normales y los máximos esfuerzos cortantes para el elemento indicado en la Fig. 6.31.



(a)



(b)

FIGURA 6.31

SOLUCION El análisis considera primero los esfuerzos sobre los planos X y Y. Esta parte de la solución es idéntica a la de la sección 6.11. El círculo de diámetro AB de la Fig. 6.31 (b) describe los esfuerzos en el plano X-Y como:

$$\sigma_{\text{máx}} = 0C + \text{ Radio} = 90 + \sqrt{(30)^2 + (40)^2},$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 90 + 50 = 140 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\text{mín}} = 90 - 50 = 40 \text{ MPa}.$$

Los esfuerzos sobre la tercera cara son cero. Por consiguiente, $\sigma_z = 0$. Considerando σ_z y $\sigma_{\text{mín}}$, se obtiene el círculo definido mediante el diámetro $0A$. Considerando σ_z y $\sigma_{\text{máx}}$ se traza el círculo de diámetro $0B$.

Los esfuerzos principales normales son $\sigma_{\text{máx}} = 140$ MPa, y $\sigma_{\text{mín}} = 0$. El esfuerzo cortante máximo es $\sigma_{\text{máx}} = (140 + 0)/2 = 70$ MPa.

La mayoría de los problemas pueden analizarse como un estado biaxial de esfuerzos. Cuando existe un estado triaxial de esfuerzos, como se indica en la Fig. 6.32, pueden hacerse dos análisis separados para cada dos orientaciones. El círculo de Mohr se describirá eventualmente en forma semejante a la de la Fig. 6.30. ■

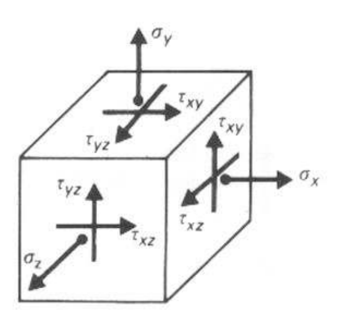


FIGURA 6.32

Problemas

6.93-6.98 Determinar los valores de los esfuerzos máximos, normales y cortantes, para el estado de esfuerzos indicado sobre los elementos de las Figs. P6.93-P6.98.

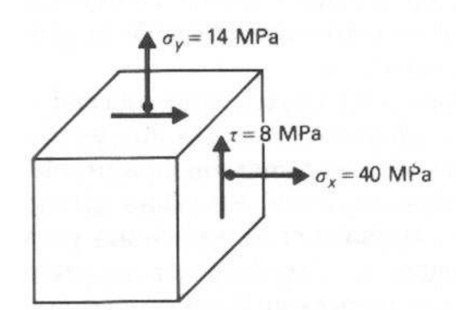


FIGURA P6.93

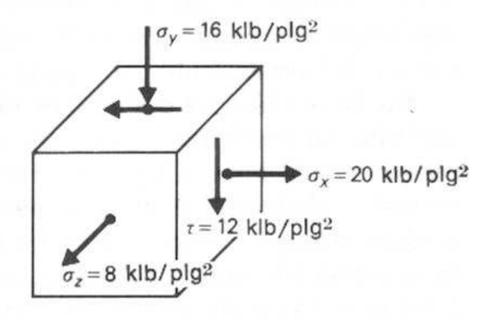


FIGURA P6.94

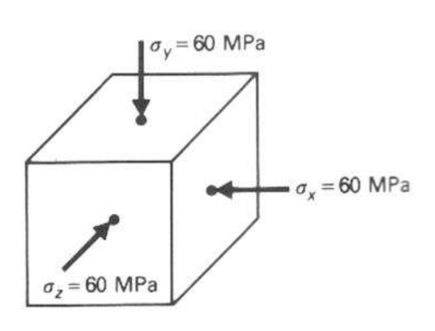


FIGURA P6.95

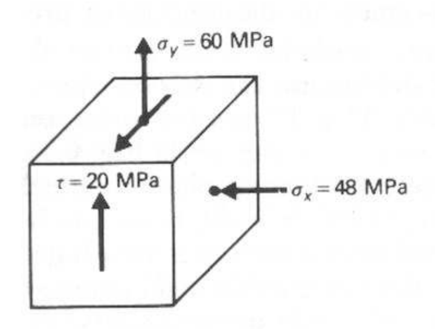


FIGURA P6.96

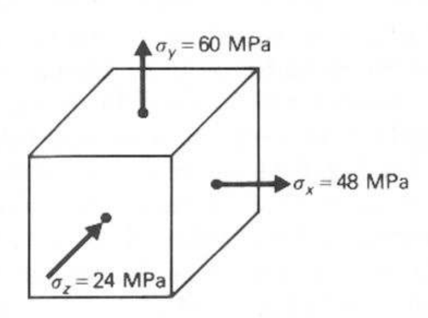


FIGURA P6.97

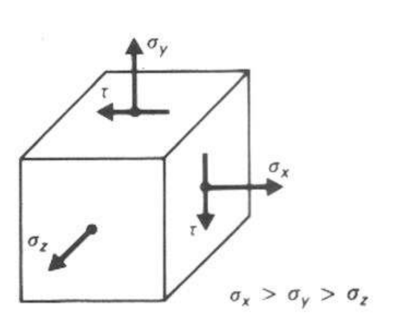


FIGURA P6.98

6.99 El esfuerzo cortante máximo que puede tolerarse para el estado de esfuerzos indicado en la Fig. P6.99 es de 30 MPa. Determinar σ_y.
6.100 Determinar el valor de σ_x en la Fig. P6.100 que hará que el esfuerzo cortante máximo en el elemento sea de 12 klb/plg².
6.101 Determinar los valores de σ_x y σ_y para el estado de esfuerzos indicado en la Fig. P6.101 que hará que el esfuerzo cortante máximo sea de 36 MPa.

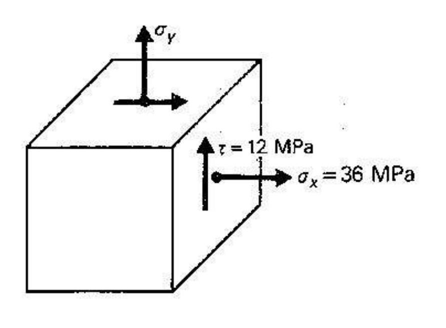


FIGURA P6.99

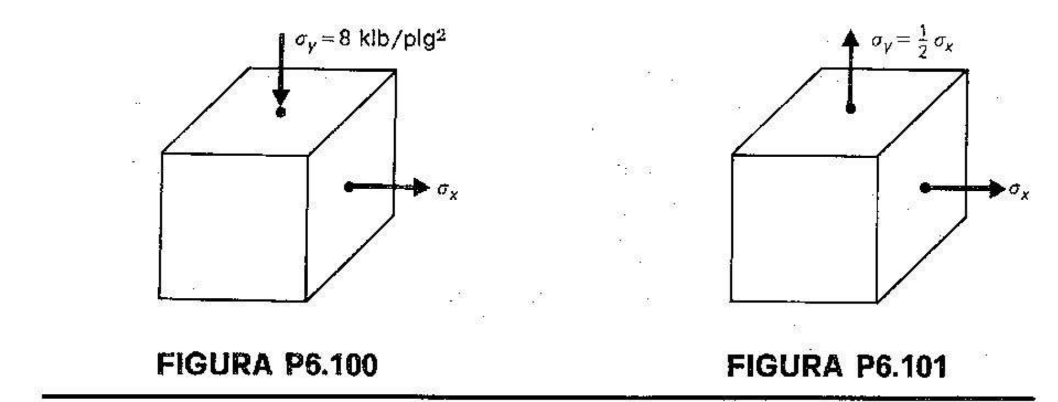


FIGURA P6.100

FIGURA P6.101

6.14 Ecuaciones generales para la deformación

Siempre que existan esfuerzos en un cuerpo, ocurrirán deformaciones. Las deformaciones en cualquier dirección, en un miembro sujeto a esfuerzos combinados, normal y cortante pueden determinarse considerando la geometría del movimiento producida por los esfuerzos.

En la sección 6.8 deducimos expresiones para los esfuerzos normal y cortante en cualquier dirección para un elemento sujeto a un estado plano de esfuerzos. El procedimiento consistió en tomar un bloque elemental y deducir ecuaciones para los esfuerzos sobre un plano girado cualquier ángulo θ con respecto a los ejes originales. Las ecuaciones para la deformación sobre un plano girado, según un ángulo θ con respecto a los ejes originales puede obtenerse de una manera análoga observando la geometría del movimiento.

Consideremos un pequeño bloque elemental sujeto a esfuerzos planos, normal y cortante. Supongamos que conocemos las deformaciones producidas por los esfuerzos normal y cortante, asociadas a un sistema de ejes coordenados X y Y. Ahora queremos determinar las deformaciones asociadas a un sistema de ejes coordenados X' y Y' girados según un ángulo θ con respecto a los ejes originales, como se indica en la Fig. 6.33.

La Fig. 6.34 (a) indica un elemento sujeto a esfuerzos planos, normal y cortante. El elemento tiene lados de longitudes dx y dy, tales que la diagonal OB está sobre el eje X'. Después del movimiento que tiene lugar debido a los esfuerzos, la esquina original B se ha movido a B', como se indica en la Fig. 6.34 (b). El movimiento BB' puede descomponerse en una componente BB'', paralela al eje X', y una componente $B''B'$, per-

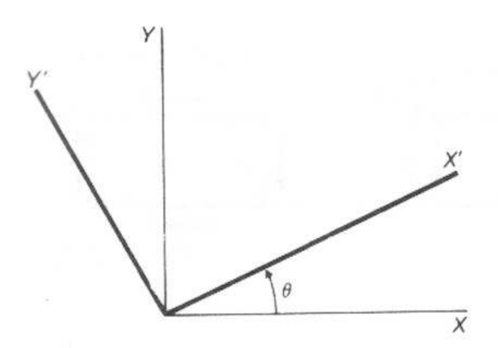


FIGURA 6.33

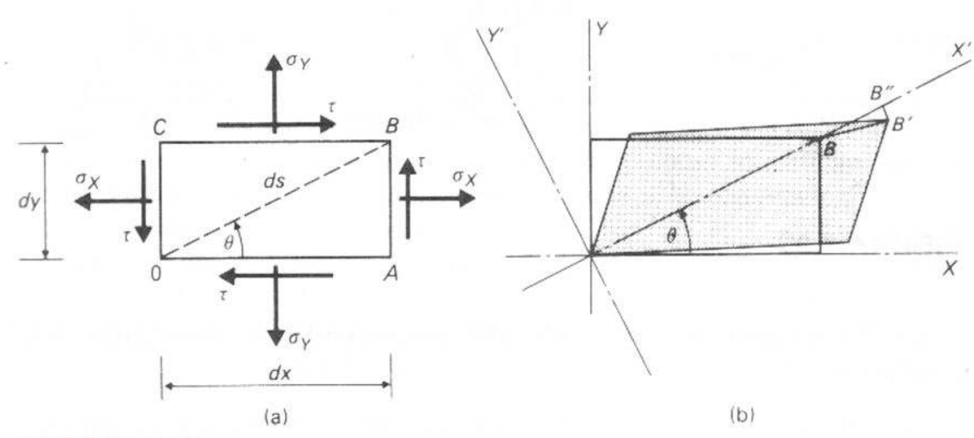


FIGURA 6.34

pendicular al eje X'. El alargamiento BB'' es la deformación total a lo largo del eje X'.

Queremos describir la deformación unitaria ϵ' a lo largo del eje X' en función de las deformaciones producidas por los esfuerzos de la Fig. 6.34 (a). La Fig. 6.35 (a), (c) y (e) indica los cambios en longitud producidos por cada una de las tres componentes del esfuerzo. Según la ecuación (2.2), la deformación total es $\delta = \epsilon L$. Por consiguiente, la deformación producida por σ_X es $\epsilon_X\, dx$ y la producida por σ_Y es $\epsilon_y\, dy$. El esfuerzo cortante produce un movimiento $\gamma\, dy$, donde γ es la deformación unitaria por cortante.

Cada uno de estos movimientos puede descomponerse en componentes paralela y perpendicular al eje X'. La Fig. 6.35 (b), (d) y (f) indica estas componentes.

El movimiento total BB'' de la Fig. 6.34 (b) es la sumatoria de todas las componentes del movimiento a lo largo del eje X'. Esto puede escribirse como

$$\epsilon'(0B) = \epsilon'\, ds = \epsilon_X\, dx \cos\theta + \epsilon_Y\, dy \operatorname{sen}\theta + \gamma\, dy \cos\theta \qquad \text{(a)}$$

Reconociendo que según la Fig. 6.34 (a) $dx/ds = \cos\theta$, y $dy/dx = \operatorname{sen}\theta$, la ecuación (a) puede reescribirse como:

$$\epsilon' = \epsilon_X \cos^2\theta + \epsilon_Y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma \operatorname{sen}\theta\cos\theta. \qquad \text{(b)}$$

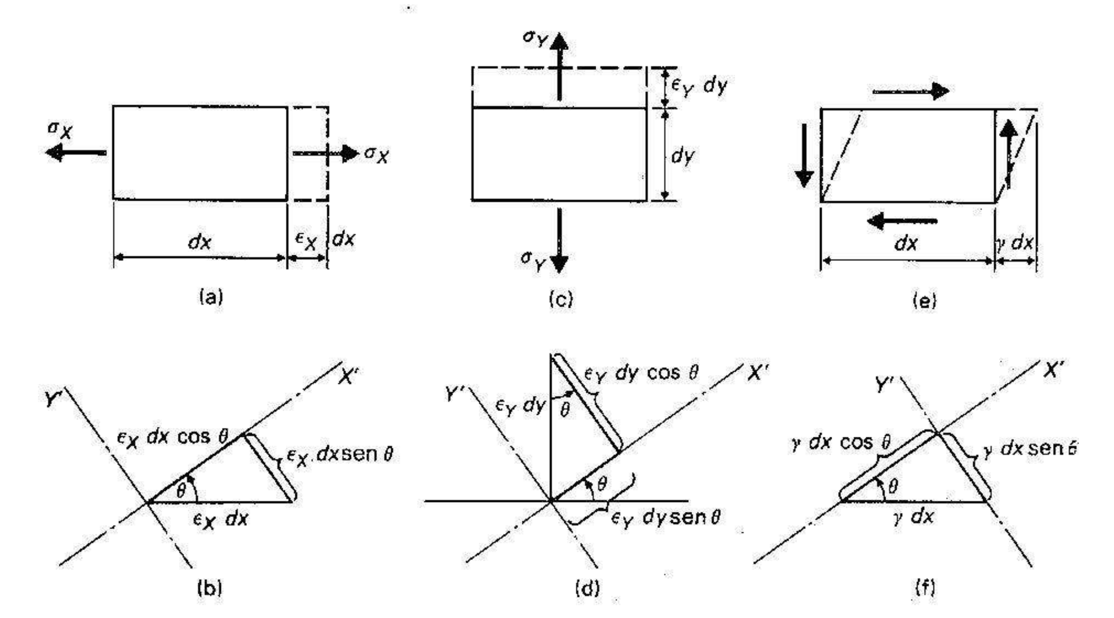


FIGURA 6.35

Se obtiene una expresión más útil sustituyendo las identidades trigonométricas

$$\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta), \qquad \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta,$$

en la ecuación (b). Haciendo estas sustituciones y simplificando la expresión resultante, llegamos a:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon_X + \epsilon_Y}{2} + \frac{\epsilon_X - \epsilon_Y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma}{2}\operatorname{sen} 2\theta. \qquad (6.13)$$

La deformación por cortante para el elemento de la Fig. 6.34 es el cambio angular con respecto a la posición original. Esta es la combinación de la rotación de los ejes X' y Y'.

Llamando α al ángulo de rotación del eje X',

$$\alpha = \tan\alpha = \frac{B''B'}{ds}. \qquad (c)$$

La distancia B'' B' es la suma de los movimientos perpendiculares al eje X', indicados en la Fig. 6.35 (b), (d) y (f). Es decir:

$$B''B' = \epsilon_X\, dx \operatorname{sen}\theta - \epsilon_Y\, dy\cos\theta + \gamma\, dy \operatorname{sen}\theta. \qquad (d)$$

Otra vez, reconociendo que $dx/ds = \cos\theta$ y $dy/ds = \operatorname{sen}\theta$, el ángulo α se obtiene dividiendo la ecuación (d) entre ds. Es decir:

$$\alpha = \frac{BB'}{ds} = \epsilon_X \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \epsilon_Y \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma\operatorname{sen}^2\theta. \qquad (e)$$

El ángulo β es la rotación equivalente del eje Y'. Pueden construirse movimientos geométricos análogos a los indicados para el eje X'. La ex-

presión resultante para el ángulo β llega a ser

$$\beta = -\epsilon_X \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \epsilon_Y \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma\cos^2\theta. \tag{f}$$

El cambio en el ángulo $X'0Y'$ debido a estos movimientos angulares es la deformación por cortante, γ'. Combinando las ecuaciones (e) y (f), esto se convierte en

$$\gamma' = \beta - \alpha;$$

$$\gamma' = -2\epsilon_X \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\epsilon_Y \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta). \tag{g}$$

Sustituyendo las identidades trigonométricas descritas anteriormente, la ecuación (g) puede reescribirse como

$$\gamma' = -(\epsilon_X - \epsilon_Y)\operatorname{sen}2\theta + \gamma\cos 2\theta. \tag{6.14}$$

Las expresiones ϵ' y γ' de las ecuaciones (6.13) y (6.14) tienen la misma forma general que las de los esfuerzos, como lo indican las ecuaciones (6.3) y (6.4). El signo menos se debe a la convención de signos usada para los esfuerzos cortantes.

Podemos determinar la dirección de los ejes principales de deformación mediante una solución de máximos y mínimos semejante a la hecha en la sección 6.9. Derivando la ecuación (6.13) con respecto a $d\theta$, haciendo $d\epsilon/d\theta = 0$, y resolviendo para tan θ, se llega a la ecuación

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma}{\epsilon_X - \epsilon_Y} \tag{6.15}$$

donde

θ = ángulo correspondiente a las deformaciones unitarias principales,
γ = deformación unitaria por cortante,
ϵ_X, ϵ_Y = deformaciones unitarias axiales.

Sustituyendo en la ecuación (6.13) los valores de 2θ dados por la ecuación (6.15), obtenemos

$$\epsilon_{\substack{\text{máx}\\ \text{mín}}} = \frac{\epsilon_X + \epsilon_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_X - \epsilon_Y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \tag{6.16}$$

El esfuerzo cortante máximo puede obtenerse derivando la ecuación (6.14), haciendo $d\gamma'/d\theta = 0$, y resolviendo. Los resultados indican que las deformaciones máximas por cortante ocurren según un ángulo de 45° con respecto a los planos principales de deformación. El valor de la deformación máxima por cortante es

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_X - \epsilon_Y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \tag{6.17}$$

Debería reconocerse la íntima correlación entre las ecuaciones para la deformación deducidas en esta sección, con las correspondientes al esfuerzo, de las secciones 6.8-6.10.

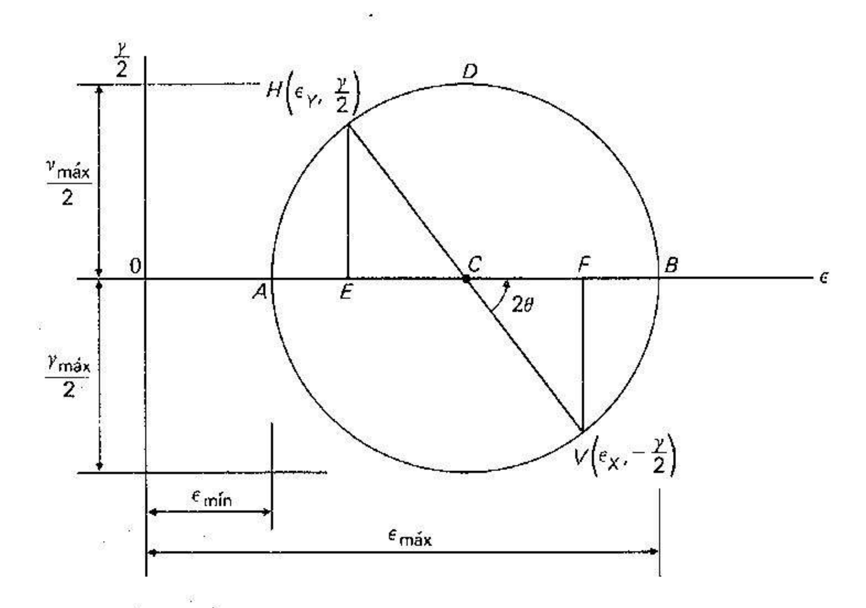


FIGURA 6.36

6.15 Círculo de Mohr para deformaciones

La semejanza entre las ecuaciones (6.13), (6.14), y las ecuaciones (6.3) y (6.4) nos conduce a reconocer que el círculo de Mohr puede usarse para calcular valores de la deformación unitaria. El procedimiento es semejante al descrito en la sección 6.11.

La Fig. 6.36 ilustra los parámetros para esta construcción. Las deformaciones unitarias normales, ϵ, se trazan en el eje de las abscisas. Los alargamientos son positivos; los acortamientos son negativos. Las deformaciones unitarias por cortante, divididas entre dos se trazan sobre el eje de las ordenadas. Una deformación unitaria por cortante positiva ocurrirá cuando la arista paralela al eje X gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y la arista paralela al eje Y gira en el sentido de las manecillas del reloj. La Fig. 6.34 (b) ilustra esta situación. Al identificar la coordenada consideramos positiva una rotación en el sentido de las manecillas, del reloj, de una arista paralela a un eje positivo, y una rotación negativa en el sentido contrario al de las manecillas. Esto proporciona consistencia entre la definición de la deformación positiva por cortante y las ecuaciones (6.13) y (6.14).

Se trazan las dos coordenadas, $V[\epsilon_X, -(\gamma/2)]$, y $H[\epsilon_Y, +(\gamma/2)]$, como en la Fig. 6.36. Estas coordenadas corresponden a las deformaciones unitarias representadas por la Fig. 6.34. La línea HCV es el diámetro del círculo. Con el punto C como centro, se traza el círculo completo. Las deformaciones unitarias máximas, normal y por cortante, junto con su ángulo de rotación, pueden determinarse mediante las mismas técnicas descritas en la sección 6.11.

EJEMPLO 6.16 Calcular las deformaciones unitarias principales y sus direcciones para un elemento, cuando $\epsilon_X = +1\,000 \times 10^{-6}$, $\epsilon_Y = +200 \times 10^{-6}$, y $\gamma = +600 \times 10^{-6}$.

SOLUCION En la Fig. 6.37 (a) y (b) se indican las direcciones de los esfuerzos y el aspecto deformado para las condiciones del problema. La coordenada V se traza con $\epsilon_X = 1\,000 \times 10^{-6}$ y $\gamma/2 = -300 \times 10^{-6}$. Surge el signo negativo debido a que el lado paralelo al eje X gira en el sentido de las manecillas del reloj. Análogamente, se traza H con $\epsilon_Y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma/2 = +300 \times 10^{-6}$.

El centro del círculo se localiza en $\epsilon = 600 \times 10^{-6}$, y el radio CV se calcula como

$$\text{Radio} = \sqrt{(400 \times 10^{-6})^2 + (300 \times 10^{-6})^2} = 500 \times 10^{-6}.$$

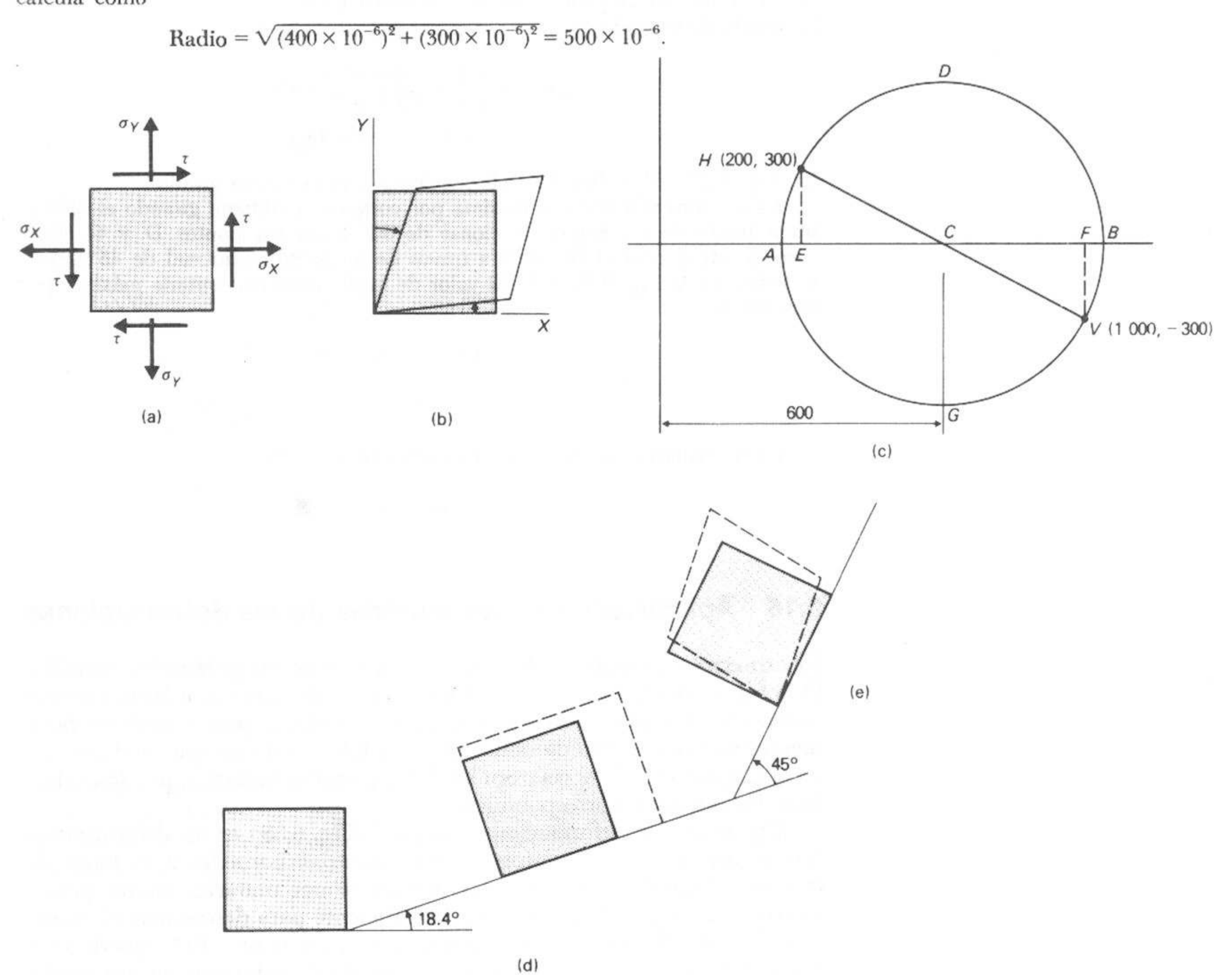


FIGURA 6.37

La deformación unitaria máxima se calcula como

$$\epsilon_{máx} = \overline{0C} + \overline{CB} = \overline{0C} + \text{Radio} = 600 \times 10^{-6} + 500 \times 10^{-6}$$
$$\epsilon_{máx} = 1\,100 \times 10^{-6}.$$

La deformación unitaria mínima se calcula como

$$\epsilon_{mín} = \overline{0C} - \overline{AC} = \overline{0C} - \text{Radio} = 600 \times 10^{-6} - 500 \times 10^{-6}$$
$$\epsilon_{mín} = 100 \times 10^{-6}.$$

La coordenada V gira en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, según un ángulo 2θ para alcanzar el máximo en B.
El ángulo de rotación es

$$\tan 2\theta = \frac{FV}{CV} = \frac{300 \times 10^{-6}}{400 \times 10^{-6}} = 0.75;$$
$$2\theta = 36.9°, \qquad \theta = 18.4°.$$

La Fig. 6.37 (d) indica las deformaciones y el elemento girado.

La deformación unitaria máxima por cortante se obtiene girando el diámetro a través de un ángulo adicional de 90° hasta los puntos D y G. Esto corresponde a girar el elemento a través de un ángulo adicional de 45°, como se indica en la Fig. 6.37 (e). El valor de la deformación unitaria máxima por cortante es

$$\frac{\gamma_{máx}}{2} = \text{Radio} = 500 \times 10^{-6};$$
$$\gamma_{máx} = 1\,000 \times 10^{-6}.$$

La deformación unitaria normal correspondiente es

$$\epsilon' = 0C = 600 \times 10^{-6}. \quad ■$$

6.16 Aplicaciones de las medidas de las deformaciones

El esfuerzo no puede medirse debido a que es un parámetro definido. Si la fuerza interna pudiera medirse, podría calcularse su esfuerzo correspondiente. Por otro lado, la deformación unitaria puede medirse fácilmente mediante el uso de deformímetros tales como los que se describen en el Capítulo 15. Si se conocen las deformaciones unitarias, pueden calcularse los esfuerzos correspondientes.

Una roseta de deformaciones (véase la Fig. 6.38) es un deformímetro que se usa para medir deformaciones unitarias normales a lo largo de tres ejes. Cuando se conocen las deformaciones unitarias en un punto, en tres direcciones, la información es suficiente para determinar el estado completo de deformaciones unitarias en dicho punto. Esto puede conducir después a la determinación del estado de esfuerzos en ese punto.

La ecuación (b) de la sección 6.14 relaciona la deformación unitaria

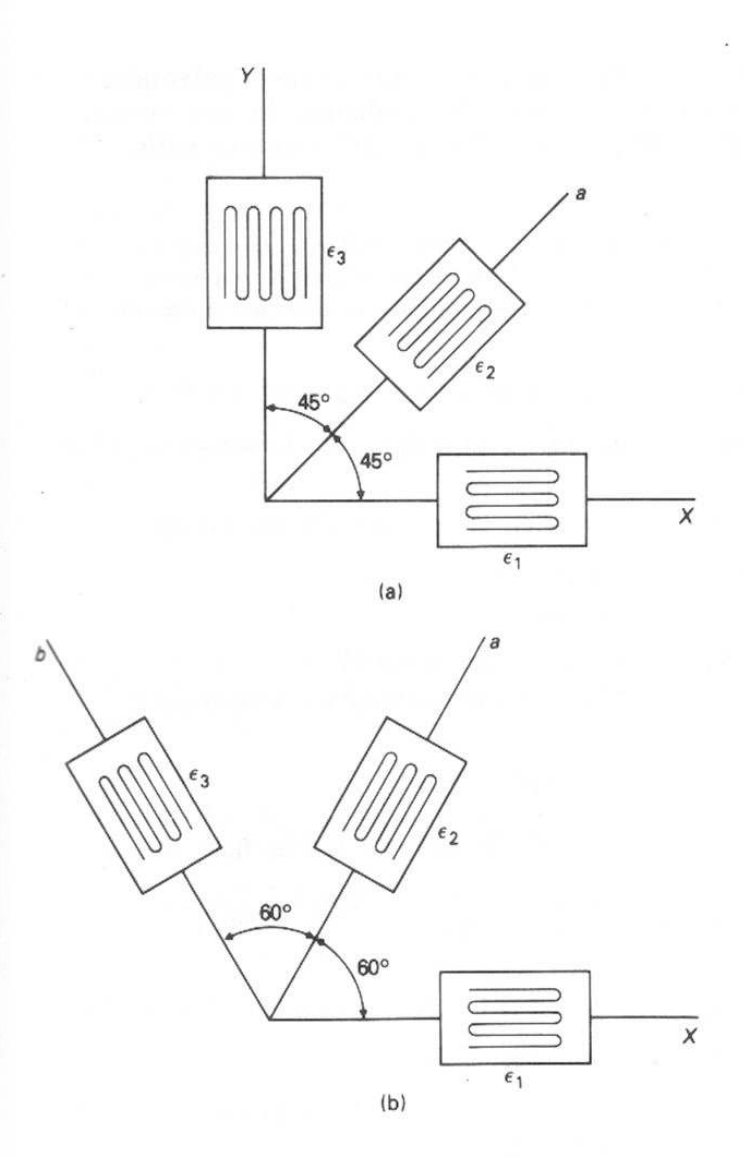


FIGURA 6.38

a lo largo de cualquier eje n con el ángulo de rotación y el plano de deformaciones, como:

$$\epsilon' = \epsilon_X \cos^2 \theta + \epsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta + \gamma \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \tag{b}$$

Usando una roseta de deformaciones, obtenemos las deformaciones unitarias y sus direcciones con respecto a un eje de referencia. La ecuación (b) anterior puede escribirse para obtener tres ecuaciones simultáneas que, cuando se resuelven, proporcionan los valores de ϵ_X, ϵ_Y, y γ. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_X \cos^2 \theta_1 + \epsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \gamma \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_X \cos^2 \theta_2 + \epsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \gamma \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_3 &= \epsilon_X \cos^2 \theta_3 + \epsilon_Y \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \gamma \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 . \end{aligned} \tag{6.18}$$

La ecuación (6.18) es válida para tres direcciones cualesquiera de una roseta de deformaciones unitarias. Sin embargo, lo más común es usar ángulos de 0°, 45° y 90°, o de 0°, 60° y 120°, como se indica en la Fig. 6.38 (a) y (b).

EJEMPLO 6.17 Una roseta de deformaciones unitarias con deformímetros que forman ángulos 0°, 45° y 90° con el eje X se aplican a una parte de una máquina. Cuando se carga la máquina se miden las deformaciones unitarias siguientes:

$$\epsilon_{0°} = \epsilon_X = 120 \times 10^{-6}, \qquad \epsilon_{45°} = 480 \times 10^{-6} \qquad \epsilon_{90°} = 360 \times 10^{-6}.$$

Determinar las deformaciones unitarias principales y la deformación unitaria máxima por cortante.

SOLUCION Sustituyendo los datos en la ecuación (6.18), encontramos.

$$\epsilon_X = \epsilon_{0°} = 120 \times 10^{-6} \text{ (medida)};$$

$$\epsilon_Y = \epsilon_{90°} = 360 \times 10^{-6} \text{ (medida)};$$

$$\epsilon_{45°} = \epsilon_X \cos^2 45° + \epsilon_Y \operatorname{sen}^2 45° + \gamma \operatorname{sen} 45° \cos 45°,$$

$$480 \times 10^{-6} = (120 \times 10^{-6})(0.707)^2 + (360 \times 10^{-6})(0.707)^2 + \gamma(0.707)(0.707),$$

de lo cual

$$\gamma = 480 \times 10^{-6}.$$

Incorporando estos valores en el círculo de Mohr de la Fig. 6.39, da

$$\epsilon_{máx} = 0C + \text{Radio} = \frac{360 + 120}{2} + \sqrt{\left(\frac{360 - 120}{2}\right)^2 + (240)^2};$$

$$\epsilon_{máx} = 240 + 268;$$

$$\epsilon_{máx} = 508 \times 10^{-6};$$

$$\epsilon_{mín} = 0C - \text{Radio} = 240 - 268;$$

$$\epsilon_{mín} = -28 \times 10^{-6};$$

$$\gamma_{máx} = \text{Radio} = 268 \times 10^{-6}. \quad ■$$

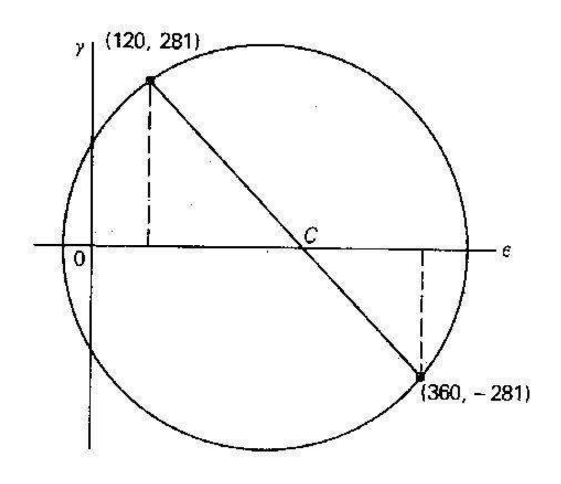


FIGURA 6.39

Problemas

6.102 Una roseta de deformaciones unitarias con deformímetros que forman ángulos de 0°, 60° y 120° con el eje X se aplica a un miembro estructural. Cuando se carga el miembro se miden las deformaciones unitarias siguientes:

$$\epsilon_{0°} = 600 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{60°} = -360 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{120°} = 540 \times 10^{-6}.$$

Determinar las deformaciones unitarias principales y la deformación unitaria máxima por cortante.

6.103 Una roseta de deformaciones unitarias con deformímetros que forman ángulos de 0°, 45° y 90° con el eje X se aplica a la superficie de una parte de una máquina. Cuando se carga el miembro, se miden las deformaciones unitarias siguientes:

$$\epsilon_{0°} = -300 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{45°} = -500 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{90°} = +200 \times 10^{-6}.$$

Determinar las deformaciones unitarias principales y la deformación unitaria máxima por cortante.

6.104 Una roseta de deformaciones unitarias con deformímetros que forman ángulos de 30°, 75° y 120° con el eje X se aplica a la superficie de un miembro. Se miden las siguientes deformaciones unitarias:

$$\epsilon_{30°} = 450 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{75°} = 100 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{120°} = -200 \times 10^{-6}.$$

Determinar las deformaciones unitarias principales y la deformación unitaria máxima por cortante.

6.105 Resolver el problema 6.103 si las deformaciones unitarias medidas son

$$\epsilon_{0°} = -200 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{60°} = -400 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{120°} = -800 \times 10^{-6}.$$

6.106 Resolver el problema 6.103 si las deformaciones unitarias medidas son

$$\epsilon_{0°} = 600 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{45°} = 800 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{90°} = +100 \times 10^{-6}.$$

6.107 Resolver el problema 6.104 si las deformaciones unitarias medidas son

$$\epsilon_{30°} = -300 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{75°} = -100 \times 10^{-6}; \quad \epsilon_{120°} = +400 \times 10^{-6}.$$

6.108 Si las deformaciones unitarias del problema 6.104 se hubieran medido con una roseta de deformaciones unitarias formando ángulos de 0° — 45° — 90°, ¿cuáles serían las lecturas de las deformaciones?

6.109 Si las deformaciones unitarias del problema 6.105 se hubieran medido con una roseta de deformaciones unitarias formando ángulos de 0° — 45° — 90°, ¿cuáles serían las lecturas de las deformaciones?

7

Deflexión de vigas

7.1 Introducción

En el diseño de partes de máquina, o de estructuras de edificios, frecuentemente se requiere la determinación de la deflexión, ya sea la deflexión máxima, ya la deflexión en un punto particular. Hay dos razones importantes por las cuales puede ser necesario un conocimiento de la deflexión de una viga. La primera es simplemente para poder predecir, la deflexión de una viga bajo carga. En edificios y partes de máquina, las especificaciones y otros requisitos limitan, a menudo, la deflexión que puede tolerarse. Por ejemplo, si los componentes de una máquina experimentan deflexiones excesivas o diferenciales, los engranajes pueden volverse inoperantes o pueden desalinearse los componentes. Si se pueden predecir las deflexiones para las partes sometidas a flexión, pueden especificarse tolerancias adecuadas en el diseño de las componentes de la máquina.

Una segunda, y posiblemente aún más significativa razón para calcular las deflexiones, es que para la solución de vigas estáticamente indeterminadas se necesita la deflexión de la viga y sus características giratorias. El capítulo 8 explica el uso de las deflexiones en la solución de vigas estáticamente indeterminadas.

Hay muchos métodos diferentes para calcular las deflexiones en las vigas. Este capítulo presenta cuatro de los más comunes. La sección A describe el método clásico de la doble integración para hallar la ecuación de la curva elástica de la viga. El método del área de momentos que es tradicional en cursos de mecánica de materiales, se presenta en la sección B. Otro método, que se explica en la sección C, es la técnica de superposición usando las fórmulas estándar para vigas. Este método es fácil de usar, aunque algunas veces, de aplicación laboriosa. Sin embargo, se recuerda con facilidad y por consiguiente es de interés especial si las deflexiones no se calculan muy frecuentemente. Además, la sección D presenta un cuarto método para el cálculo de deflexiones, el método de los pesos elásticos. Este, en combinación con el método del área de momentos proporciona un método eficaz para resolver muchos de los problemas de rotación y deflexiones de vigas.

Las cuatro secciones de este capítulo se han escrito para ser "autosuficientes"; por este motivo se puede variar su secuencia u omitirse una o más sin afectar las otras.

7.2 Relación entre curvatura y momento

Antes de presentar los procedimientos para calcular deflexiones, es necesario definir los términos que se usarán y encontrar las relaciones fundamentales entre la curvatura de una viga y los esfuerzos internos y momentos.

La *elástica* de una viga es la forma que toma el eje neutro cuando se carga la viga. Una línea que muestre la forma flexionada de una viga sometida a carga es la elástica de la viga. La *pendiente* de una viga se define como la pendiente de la tangente a la elástica en un punto cualquiera. La Fig. 7.1 muestra la elástica de una viga deformada por cargas (no indicadas) respecto a su posición recta original. Las tangentes a la elástica se muestran en A y B, con los símbolos θ_A y θ_B indicando la pendiente de la curva en esos puntos.

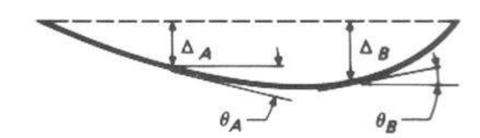


FIGURA 7.1

La deflexión de una viga es el movimiento (desviación) de un punto situado sobre la elástica, con respecto a su posición original sin carga. Se usan los símbolos Δ_A y Δ_B en la Fig. 7.1 para indicar la deflexión de los puntos A y B de esta viga, con respecto a la posición sin carga.

Como las deflexiones de la viga son pequeñas con respecto a su longitud, cada segmento de la elástica puede considerarse aproximadamente como un arco de círculo. El radio del arco se llama ***radio de curvatura,*** y se le asigna el símbolo ρ. La Fig. 7.2 muestra la curva elástica de una viga flexionada mediante cargas (no mostradas). Cualquier segmento pequeño, tal como el AB, es un arco de círculo de radio ρ_1.

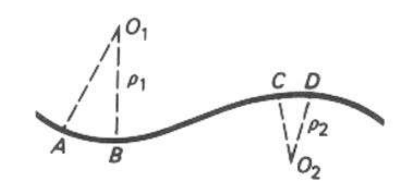
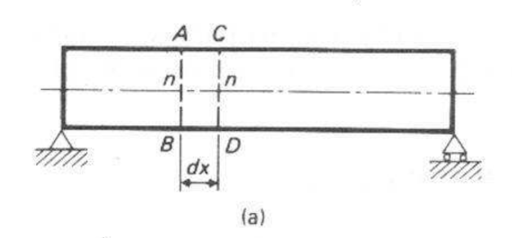


FIGURA 7.2

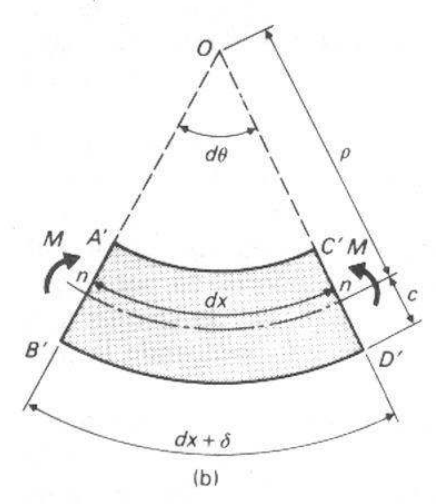
Cada segmento diferente de la curva tiene un diferente radio de curvatura, como se demostrará posteriormente en esta sección. Por consiguiente, el segmento CD de la Fig. 7.2 tiene un radio de curvatura ρ_2, que es diferente de ρ_1. El centro de curvatura es la intersección de los radios, tal como los puntos O_1 y O_2.

Existe una relación definida entre el radio de curvatura de la viga, el esfuerzo en las fibras extremas, y el momento flexionante que produce ese esfuerzo. Podemos encontrar esa relación considerando la Fig. 7.3. La Fig. 7.3 (a) muestra una pequeña sección de una viga sin carga, de longitud dx; la Fig. 7.3 (b) muestra la misma sección después de que la viga se ha deformado por la acción de las cargas aplicadas.

Puesto que las secciones planas antes de la deformación se conservan planas después de ella, y esta pequeña sección de la elástica es un arco de círculo, $A'B'$ y $C'D'$ se cortarán en el centro de curvatura 0, formando un sector circular. El eje neutro (elástica) no está sujeto a ningún esfuerzo y conserva la longitud original dx. Sin embargo, las otras fibras cambian de longitud, como se discutió en el capítulo 5. Supóngase que las fibras inferiores, situadas a una distancia c a partir del eje neutro, aumentan su longitud en una cantidad δ.



(a)



(b)

FIGURA 7.3

Considerando la geometría de los sectores semejantes *Onn* y *OB′D′*, podemos escribir:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{dx + \delta}{\rho + c}. \tag{a}$$

Resolviendo, obtenemos $dx(\rho + c) = (dx + \delta)\rho$; $c\,dx = \delta\rho$; y

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\delta}{dx}. \tag{b}$$

A partir de las definiciones básicas del capítulo 2,

$$\epsilon = \frac{\text{variación en longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{\delta}{dx}$$

y también $\epsilon = \sigma/E$. Eliminando ϵ de estas ecuaciones, tenemos

$$\frac{\delta}{dx} = \frac{\sigma}{E}. \tag{c}$$

Sustituyendo esto en la ecuación (b) nos da

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\sigma}{E}. \tag{7.1}$$

donde:

σ = esfuerzo en las fibras extremas, en lb/plg^2 o Pa,
E = módulo de elasticidad, en lb/plg^2 o Pa,
c = distancia entre el eje neutro y las fibras extremas, plg o m,
ρ = radio de curvatura, plg, o m.

Puede obtenerse otra expresión útil, sustituyendo la relación $\sigma = Mc/I$ en la ec. 7.1. Así:

$$\frac{c}{\rho} = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc/I}{E},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \tag{7.2}$$

que es la relación entre la curvatura de una viga y el momento flexionante.

Podemos obtener una expresión adicional, que se usará en secciones posteriores de este capítulo, eliminando ρ de las ecs. (a) y (7.2):

$$d\theta = \frac{dx}{\rho}; \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}, \tag{a}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \tag{7.2}$$

y llegamos a:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI},$$

$$d\theta = \frac{M\,dx}{EI}. \tag{7.3}$$

La ec. (7.3) indica que la *variación* en la pendiente entre dos secciones transversales de una viga es igual al área bajo el diagrama de momentos ($M\,dx$) comprendido entre esas secciones, dividida entre EI. Esta expresión se discutirá posteriormente más ampliamente en este capítulo.

Problemas

7.1 Una varilla redonda de acero, de 4 mm de diámetro se flexiona hasta darle la forma de un anillo circular, de un diámetro de: (a) 1 m, (b) 1.5 m, (c) 2 m. Calcule el esfuerzo en la varilla. Suponga que el acero es lo suficientemente resistente para conservarse elástico dentro del intervalo de esfuerzos que se calcula.

7.2 Suponiendo que el acero del problema 7.1 tiene una curva esfuerzo-deformación semejante a la de la Fig. 2.8, con un esfuerzo en el punto de fluencia de 36 000 lb/plg^2 y un esfuerzo último de 68 000 lb/plg^2, describa las acciones físicas de la varilla en relación a los esfuerzos desarrollados en la varilla. Use el diagrama esfuerzo-deformación de la Fig. 2.8 como base de la discusión.

7.3 Determine el momento requerido para flexionar una varilla de ¼ plg × 2 plg hasta darle la forma de un arco circular de 10 pies de radio. La varilla se flexiona con respecto a su eje de mínima resistencia (la dimensión de ¼ plg). ¿Cuál es el esfuerzo en la varilla en la posición flexionada?

7.4 Determine el radio de curvatura y el esfuerzo máximo en la sección BC de la viga W 10 × 21 mostrada en la Fig. P7.4.

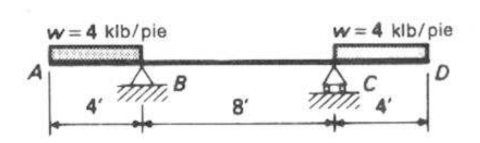


FIGURA P7.4

7.5 Determine el radio de curvatura en el punto medio de cada segmento de 0.4 m tomado a lo largo de la viga de aluminio de 90 mm × 60 mm indicada en la Fig. P7.5. La viga se flexiona con respecto a su eje de mínima resistencia (la dimensión de 60 mm), y $E = 70$ GPa.

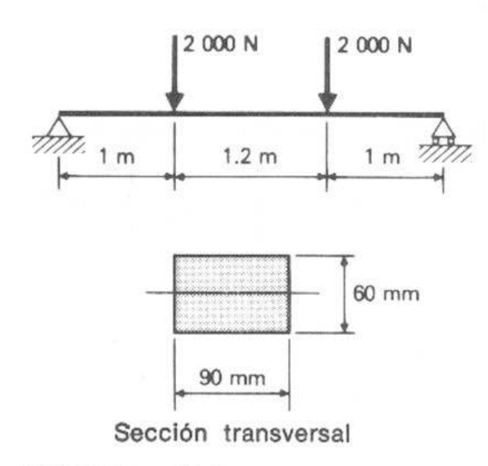


FIGURA P7.5

SECCION A Deflexiones en vigas por integración

7.3 Base del método

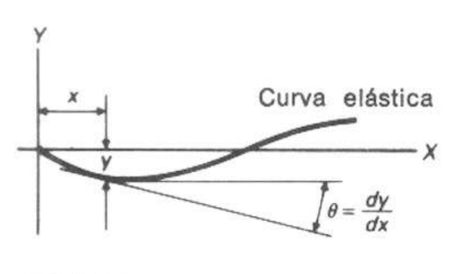


FIGURA 7.4

La Fig. 7.4 muestra la elástica de una viga deformada por cargas (que no se indican). El objeto del procedimiento de integración es expresar la ecuación para la elástica de la viga en términos de las cargas y de las coordenadas x y y.

En la sección 7.2, se estableció que puesto que las deflexiones de la viga son pequeñas en comparación con la longitud de la viga, cada pequeño segmento de la elástica puede considerarse aproximadamente como el arco de un círculo que tiene un radio de curvatura ρ. En los libros de texto de cálculo elemental, la curvatura de una línea se define como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

donde

ρ = radio de curvatura,
x, y = coordenadas de un punto sobre la curva.

En las vigas, la pendiente dy/dx es muy pequeña. Cuando el término dy/dx se eleva al cuadrado, se hace tan pequeño, que en comparación con los otros términos, puede despreciarse. Con esta aproximación, la ecuación de la elástica de una viga puede escribirse como:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{7.4}$$

La curvatura de un viga está relacionada con el momento flexionante. La ec. (7.2) indica esta relación como:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}. \tag{7.2}$$

Por consiguiente, la ec. (7.4) puede escribirse como:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}. \tag{7.4}$$

La solución de la ec. (7.4) son ecuaciones que permiten calcular la pendiente y la deflexión de la elástica de la viga.

7.4 Relaciones útiles

Para una condición de carga dada, una viga adoptará una posición deformada particular. Cada punto situado sobre la elástica tendrá una deflexión y, y una pendiente dy/dx. Según el material presentado en el capítulo 4, la viga tendrá también valores de la carga, fuerza cortante y momento, en cada punto. Estas cinco cantidades están relacionadas y es útil darse cuenta que lo están en una forma definida. Su relación deberá comprenderse tanto en términos físicos como matemáticos.

Suponga que una viga tiene una carga aplicada especifica. La elástica de esta viga adopta una forma particular. La ecuación de esta curva se discutirá en la sección 7.5. Suponga por ahora que conoce la ecuación de la elástica y puede escribirla en términos de las coordenadas x y y, tal como $y = f(x)$.

La deflexión y en cualquier punto puede calcularse sustituyendo el valor numérico para la distancia x, en la ecuación. La pendiente de la curva dy/dx, es la primera derivada de la ecuación de la curva. Pueden tomarse derivadas sucesivas, y las expresiones resultantes serán ecuaciones para el momento, fuerza cortante y carga aplicada. Expresado matemáticamente:

$$\text{deflexión} = y,$$

$$\text{pendiente}=\frac{dy}{dx},$$

$$\text{momento}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}, \tag{7.4}$$

$$\text{cortante}=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{EI}\right)=\frac{dM}{dx}\frac{1}{EI}=\frac{V}{EI},$$

$$dM = V\,dx, \tag{4.1}$$

$$\text{carga}=\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{V}{EI}\right)=\frac{dV}{dx}\frac{1}{EI}=\frac{w}{EI}.$$

$$dV = w\,dx.$$

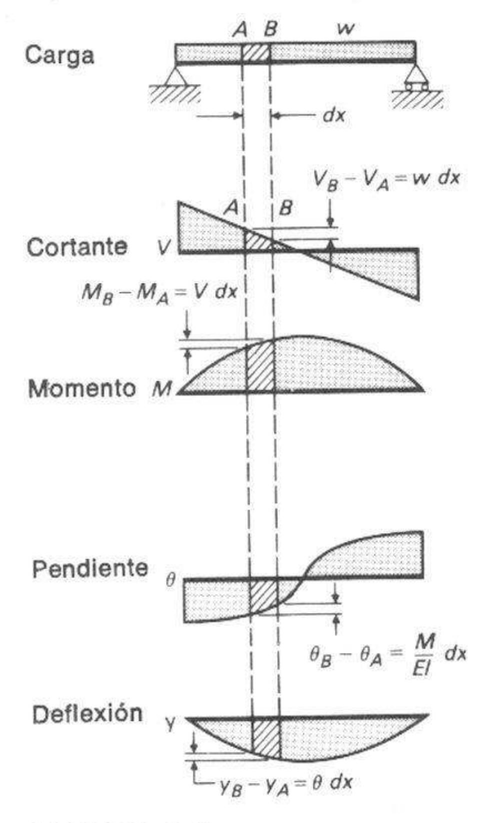


FIGURA 7.5

Lo anterior significa que si se conoce la ecuación para la elástica, las ecuaciones para la pendiente, momento, fuerza cortante y carga aplicada se pueden determinar por diferenciaciones sucesivas. Si se conoce la ecuación para el momento flexionante, puede integrarse sucesivamente (primero para obtener la pendiente y en seguida para obtener la deflexión de la elástica) y también puede derivarse sucesivamente para obtener las ecuaciones del cortante y de la carga.

La Fig. 7.5 muestra las relaciones gráficas entre estas cantidades.

EJEMPLO 7.1 La ecuación de la elástica para todo el claro de una viga simplemente apoyada, de longitud L es:

$$y = \frac{1.7x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3).$$

Determinar la condición de carga de la viga.

SOLUCION

Deflexión:

$$y = \frac{1.7x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$
$$= \frac{1.7L^3x - 3.4Lx^3 + 1.7x^4}{24EI}.$$

Pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1.7L^3 - 10.2Lx^2 + 6.8x^3}{24EI}$$

M/EI:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-20.4Lx + 20.4x^2}{24EI}.$$

Momento:

$$M = \frac{-20.4Lx + 20.4x^2}{24}.$$

Fuerza cortante:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{-20.4L + 40.8x}{24}.$$

Carga:

$$w = \frac{dV}{dx} = \frac{+40.8}{24} = 1.7.$$

Esta viga está simplemente apoyada, y tiene una carga uniformemente distribuida de $w = 1.7$ klb/pie. Las ecuaciones definen las curvas mostradas en la Fig. 7.5, y también las del caso 5 del Apéndice D. ■

Problemas

7.6 La ecuación de la elástica para todo el claro de una viga simplemente apoyada de longitud L es:

$$y = \frac{2.3x}{360LEI}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4).$$

Determinar la condición de carga de la viga.

La ecuación de la elástica de una viga, para un intervalo de la luz se muestra en los siguientes problemas. Escribir las ecuaciones para la pendiente, momento, fuerza cortante y carga.

7.7 $y = \frac{1}{4EI}\left(L^2x^2 - \frac{3Lx^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right).$

7.8 $y = \frac{7bx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2)$, donde b = const.

7.9 $y = \frac{5a}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2)$, donde a = const.

7.5 Procedimiento de la doble integración

Si se conoce la ecuación de la elástica, las otras cantidades físicas de esa viga se determinan por derivaciones sucesivas. Sin embargo, este tipo de problema generalmente no se presenta. En la mayoría de los casos se conocen la forma de apoyo de la viga y las condiciones de carga. El cortante y el momento pueden determinarse mediante los procedimientos discutidos en el capítulo 4, y el problema remanente consiste en encontrar la elástica de la viga.

La ecuación de la elástica se determina mediante la aplicación de la ec. (7.4), $d^2y/dx^2 = M/EI$. La ecuación para el momento flexionante de la viga se expresa en términos de x y de las condiciones de carga. Esta expresión se sustituye para M en la ec. (7.4); la expresión resultante se integra una vez para obtener la ecuación de la pendiente dy/dx, y se integra una segunda vez para determinar la ecuación de la deflexión y.

Para capacitar al estudiante a entender más fácilmente los pasos necesarios del método de la doble integración, éstos se describen más adelante. Los ejemplos 7.2, 7.3 y 7.4 ilustran la aplicación de este procedimiento a problemas específicos.

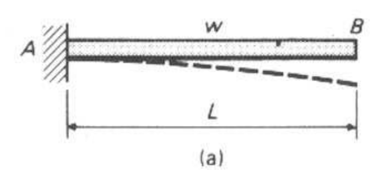
Procedimiento

1. Se traza un diagrama de cuerpo libre de la viga y las cargas, y se bosqueja su eje deformado, notando en particular los puntos que tienen deflexión cero o pendiente cero.

2. Se determinan los ejes coordenados. Generalmente es mejor elegir el origen en un extremo de la viga.
3. Se toma una sección cualquiera de la viga a una distancia general x a partir del origen de coordenadas, y se traza el diagrama de cuerpo libre resultante. Es buena práctica indicar los ejes coordenados en esta figura.
4. A partir del cuerpo libre del paso 3, se escribe una ecuación para el momento flexionante en la viga, en términos de x y de las cargas.
5. Se sustituye esta expresión para M en la ec. (7.4), $d^2y/dx^2 = M/EI$.
6. Se integra la ecuación del paso 5 para obtener la ecuación de la pendiente dy/dx de la viga.
7. Se calcula la constante de integración aplicando las condiciones a la frontera, o de límite.
8. Se integra la ecuación de la pendiente para obtener la ecuación de la deflexión y de la viga.
9. Se calcula la constante de integración aplicando las condiciones a la frontera.

Unos cuantos comentarios generales en este punto pueden ser útiles al aplicar estos pasos a la solución de problemas. Al usar la ec. (7.4) debe obtenerse una expresión algebraica para el momento flexionante. Cada vez que cambia la ecuación para el momento flexionante (lo que sucede cada vez que cambian las condiciones de carga), debe usarse una nueva expresión con la ec. (7.4). El intervalo de validez de la ecuación del momento flexionante es, por consiguiente, el intervalo de validez de cualquiera de las ecuaciones obtenidas usando esa expresión.

Siempre que se resuelva una integral indefinida, resultará una constante de integración. Esta constante de integración debe calcularse siempre, pues no necesariamente es cero. Para calcular esta constante de integración, deben conocerse ciertas relaciones entre las variables de la ecuación. Estas relaciones se llaman condiciones a la frontera. El reconocimiento de las condiciones a la frontera en un problema y el cálculo correspondiente de la constante de integración son necesarios para la solución completa del mismo.



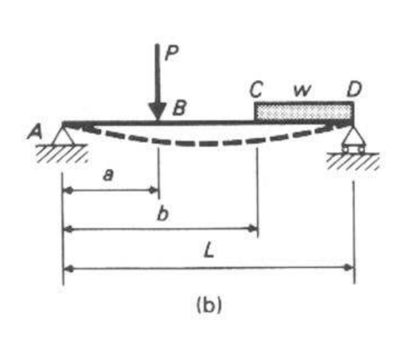


FIGURA 7.6

La Fig. 7.6 es útil para ilustrar algunos de los comentarios discutidos anteriormente. En la Fig. 7.6 (a), solamente hay un tipo de carga en todo el claro y una aplicación de los pasos del 1 al 9 determinará la ecuación para la elástica. En este caso, la ecuación se aplicará a todo el claro de la viga. Para calcular las constantes de integración, debe notarse que la pendiente y la deflexión en el extremo empotrado son cero. Estas dos condiciones físicas, que son las condiciones a la frontera, son necesarias para calcular las dos constantes de integración.

La viga de la Fig. 7.6 (b) es más complicada debido a que hay tres secciones diferentes, teniendo cada una su propia ecuación para el momento flexionante. Esto significa que los pasos del procedimiento descrito antes deben aplicarse tres veces diferentes, una para cada ecuación de

momento. Por consiguiente, habrá tres diferentes ecuaciones para la curva elástica, teniendo cada una de ellas sus propios límites.

Siempre que se integra una ecuación, resultará una constante de integración. En la Fig. 7.6 (b), resultará un total de seis constantes de integración para las tres secciones que forman el claro total. Por consiguiente, se requieren seis condiciones a la frontera para calcular estas constantes de integración. Dos de las seis pueden obtenerse observando que

$$y = 0 \text{ en } x = 0, \qquad y = 0 \text{ en } x = L.$$

Las otras cuatro constantes no son tan fáciles de determinar. Para calcularse, deben determinarse las condiciones de continuidad que ocurren en los puntos donde se cortan las diferentes curvas elásticas. Como la viga es continua en los puntos donde se cortan dos elásticas, tales como B y C de la Fig. 7.6 (b) se observa que

$$y_{\text{claro } AB} = y_{\text{claro } BC} \quad \text{en} \quad x = a,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{claro } AB} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{claro } BC} \quad \text{en} \quad x = a,$$

$$y_{\text{claro } BC} = y_{\text{claro } CD} \quad \text{en} \quad x = b,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{claro } BC} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{claro } CD} \quad \text{en} \quad x = b.$$

Estas cuatro condiciones nos capacitan para calcular las cuatro constantes de integración restantes. En este caso se necesita resolver ecuaciones simultáneas. El ejemplo 7.4 ilustra el uso de condiciones de continuidad en una solución.

EJEMPLO 7.2 Determinar las ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga mostrada en la Fig. 7.7. Tómese como origen del sistema coordenado el extremo empotrado en el punto A.

SOLUCION El procedimiento usado para llegar a la Fig. 7.5 es como sigue:

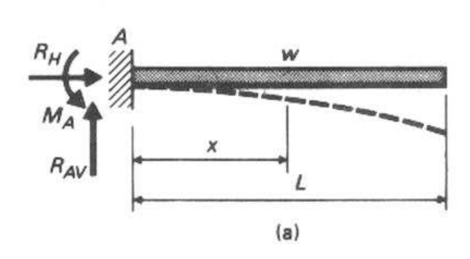
Pasos 1 y 2: La Fig. 7.7 (a) y (b) indican el diagrama de cuerpo libre y los ejes coordenados.

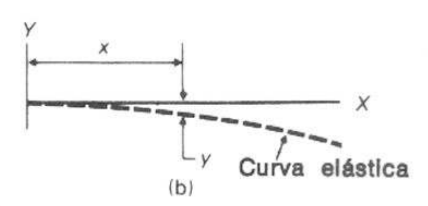
Pasos 3 y 4: Escribimos las ecuaciones para el momento flexionante en x, a partir de la Fig. 7.7 (c), como:

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = wLx - \frac{wL^2}{2} - wx\left(\frac{x}{2}\right). \tag{a}$$

Pasos 5 y 6: Sustituimos la ecuación (a) en la (7.4) e integramos para obtener:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI};$$





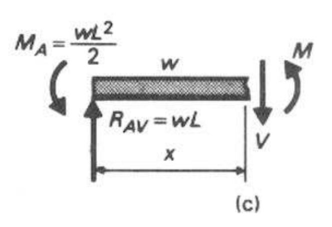


FIGURA 7.7

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = wLx - \frac{wL^2}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \int wLx\,dx - \int \frac{wL^2}{2}dx - \int \frac{wx^2}{2}dx$$

$$= \frac{wLx^2}{2} - \frac{wL^2x}{2} - \frac{wx^3}{6} + C_1. \qquad \text{(b)}$$

Paso 7: Calculamos C_1. La condición de frontera es $dy/dx = 0$ en $x = 0$. Sustituyendo esto en la ec. (b), tenemos:

$$0 = 0 - 0 - 0 + C_1, \qquad C_1 = 0.$$

Por consiguiente:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wLx^2}{2} - \frac{wL^2x}{2} - \frac{wx^3}{6}. \qquad \text{(c)}$$

Paso 8: Integramos la ec. (c) para obtener la ecuación para y como:

$$EIy = \int \frac{wLx^2}{2}dx - \int \frac{wL^2x}{2}dx - \int \frac{wx^3}{6}dx$$

$$= \frac{wLx^3}{6} - \frac{wL^2x^2}{4} - \frac{wx^4}{24} + C_2. \qquad \text{(d)}$$

Paso 9: Calculamos C_2. La condición de frontera es $y = 0$ en $x = 0$. Sustituyendo esto en la ec. (d), tenemos:

$$0 = 0 - 0 - 0 + C_2, \qquad C_2 = 0$$

y así:

$$EIy = \frac{wLx^3}{6} - \frac{wL^2x^2}{4} - \frac{wx^4}{24}. \qquad \text{(e)}$$

La ecuación de la curva elástica se escribe entonces como:

$$y = \frac{wLx^3}{6EI} - \frac{wL^2x^2}{4EI} - \frac{wx^4}{24EI}.$$

En $x = L$, y es máxima:

$$y_{máx} = \frac{wL^4}{6EI} - \frac{wL^4}{4EI} - \frac{wL^4}{24EI},$$

$$y_{máx} = -\frac{wL^4}{8EI}. \quad ■$$

EJEMPLO 7.3 Resolver el ejemplo 7.2 tomando como origen del sistema coordenado al extremo libre de la viga.

SOLUCION

Pasos 1 y 2: La Fig. 7.8 (a) y (b) indica el diagrama de cuerpo libre y los ejes coordenados.

Pasos 3 y 4: La ecuación para el momento flexionante en x se obtiene a partir de la Fig. 7.8 (c) como

$$\sum M_{corte} = 0: \qquad M = -wx\left(\frac{x}{2}\right). \tag{a}$$

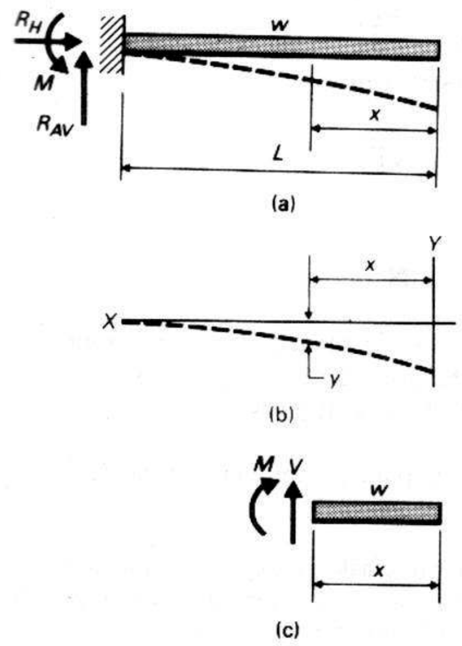


FIGURA 7.8

Pasos 5, 6, y 7: Sustituimos la ecuación (a) en la ecuación (7.4) e integramos para hallar

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}; \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \int -\frac{wx^2}{2}dx = -\frac{wx^3}{6} + C_1. \tag{b}$$

Calculamos C_1. La condición a la frontera es $dy/dx = 0$ en $x = L$. Sustituyendo esto en la ecuación (b), tenemos:

$$0 = -\frac{wL^3}{6} + C_1, \qquad C_1 = \frac{wL^3}{6};$$

por consiguiente:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{wL^3}{6}. \tag{c}$$

Pasos 8 y 9: Determinamos la ecuación de la curva elástica como:

$$EIy = \int -\frac{wx^3}{6}dx + \int \frac{wL^3}{6}dx = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wL^3x}{6} + C_2. \tag{d}$$

Calculamos C_2. La condición a la frontera es $y = 0$ en $x = L$. Sustituyendo en la ecuación (d), tenemos:

$$0 = -\frac{wL^4}{24} + \frac{wL^4}{6} + C_2, \qquad C_2 = -\frac{wL^4}{8};$$

y, por consiguiente

$$EIy = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wL^3x}{6} - \frac{wL^4}{8}.$$

La ecuación de la elástica se escribe entonces como:

$$y = -\frac{wx^4}{24EI} + \frac{wL^3x}{6EI} - \frac{wL^4}{8EI}.$$

En $x = 0$, y es máxima y

$$y_{máx} = -\frac{wL^4}{8EI}. \quad ■$$

La elástica para los ejemplos 7.2 y 7.3 es la misma. Las ecuaciones de los dos ejemplos son diferentes debido solamente a que los origenes de los sistemas coordenados están en diferentes lugares.

EJEMPLO 7.4 Determinar las ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga mostrada en la Fig. 7.9.

SOLUCION En este caso habrá dos curvas elásticas debido a que hay dos condiciones de carga. Primero determinamos las ecuaciones para la pendiente y la deflexión y después calculamos las constantes de integración.

CLARO AB:

Pasos 1 y 2: (Fig. 7.9 b-c):
Pasos 3 y 4: (Fig. 7.9 d):

$$\sum M_{corte} = 0: \qquad M = \frac{3wL}{8}x - wx\left(\frac{x}{2}\right). \tag{a}$$

Pasos 5, 6, y 8

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}; \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3wLx}{8} - \frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \int \frac{3wLx}{8}dx - \int \frac{wx^2}{2}dx$$

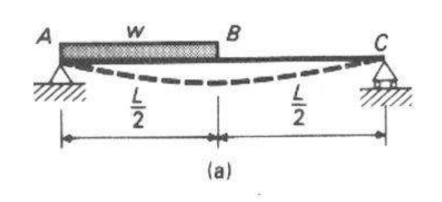
$$= \frac{3wLx^2}{16} - \frac{wx^3}{6} + C_1 \tag{b}$$

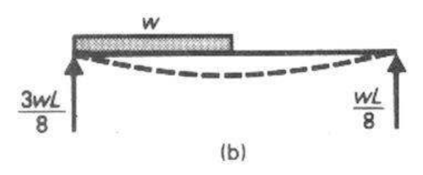
$$EIy = \int \frac{3wLx^2}{16}dx - \int \frac{wx^3}{6}dx + \int C_1\,dx$$

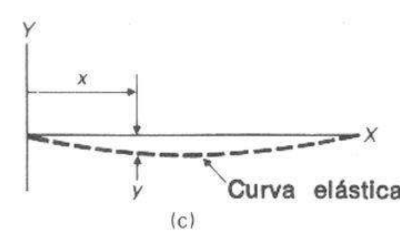
$$= \frac{3wLx^3}{48} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2. \tag{c}$$

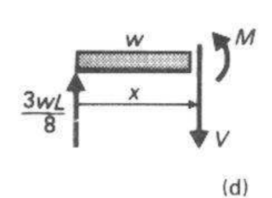
CLARO BC:

Pasos 3 y 4: (ver Fig. 7.9 (e):









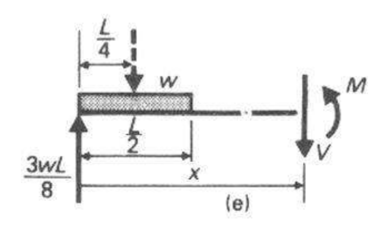


FIGURA 7.9

calculamos

$$\sum M_{corte} = 0: \qquad M = \frac{3wL}{8}x - \frac{wL}{2}\left(x - \frac{L}{4}\right)$$
$$= \frac{3wLx}{8} - \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{8}$$
$$= \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{8}. \qquad \text{(d)}$$

Pasos 5, 6 y 8

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}; \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{8}$$
$$EI\frac{dy}{dx} = \int \frac{wL^2}{8}dx - \int \frac{wLx}{8}dx = \frac{wL^2x}{8} - \frac{wLx^2}{16} + C_3 \qquad \text{(e)}$$
$$EIy = \int \frac{wL^2x}{8}dx - \int \frac{wLx^2}{16}dx + \int C_3\,dx$$
$$= \frac{wL^2x^2}{16} - \frac{wLx^3}{48} + C_3x + C_4. \qquad \text{(f)}$$

Calculamos las constantes de integración. Las condiciones de la frontera son:

$$y = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \qquad (1)$$
$$y = 0 \quad \text{en} \quad x = L \qquad (2)$$
$$y_{\text{claro } AB} = y_{\text{claro } BC} \quad \text{en} \quad x = \frac{L}{2} \qquad (3)$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{claro } AB} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{claro } BC} \quad \text{en} \quad x = \frac{L}{2}. \qquad (4)$$

Usando la condición (1) y la ec. (c), se tiene:

$$0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$
$$C_2 = 0.$$

La condición (2) y la Ec. (f) conducen a:

$$0 = \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{48} + C_3L + C_4$$

$$C_3L + C_4 = -\frac{wL^4}{24}. \qquad \text{(g)}$$

Usando las ecs. (c) y (f), y las condiciones de la frontera: $EIy_{AB} = EIy_{BC}$ en $x = L/2$, obtenemos:

$$\frac{3wL(L/2)^3}{48} - \frac{w(L/2)^4}{24} + C_1\left(\frac{L}{2}\right)$$
$$= \frac{wL^2(L/2)^2}{16} - \frac{wL(L/2)^3}{48} + C_3\left(\frac{L}{2}\right) + C_4.$$

Simplificando ésto llegamos a:

$$\frac{C_1L}{2} - \frac{C_3L}{2} - C_4 = \frac{wL^4}{128}. \qquad \text{(h)}$$

A partir de las ecs. (b) y (e) y de las condiciones de la frontera (4), puede obtenerse otra ecuación con estas constantes de integración:

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{AB} = EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{BC} \quad \text{en} \quad x = \frac{L}{2}.$$

Simplificando esto obtenemos

$$\frac{3wL(L/2)^2}{16} - \frac{w(L/2)^3}{6} + C_1 = \frac{wL^2(L/2)}{8} - \frac{wL(L/2)^2}{16} + C_3,$$

y

$$C_3 - C_1 = \frac{wL^3}{96}. \tag{i}$$

Resolviendo las ecs. (g), (h) e (i), simultáneamente se llega a:

$$C_1 = \frac{11wL^3}{96}, \qquad C_3 = \frac{9wL^3}{192}, \qquad C_4 = -\frac{17wL^4}{192}.$$

Sustituyendo estas constantes en las ecs. (b), (c), (e) y (f) para obtener las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de la viga:

CLARO AB:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3wLx^2}{16EI} - \frac{wx^3}{6EI} - \frac{11wL^3}{96EI} \qquad 0 < x < \frac{L}{2},$$

$$y = \frac{3wLx^3}{48EI} - \frac{wx^4}{24EI} - \frac{11wL^3x}{96EI} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}.$$

CLARO BC:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wL^2x}{8EI} - \frac{wLx^2}{16EI} + \frac{9wL^3}{192EI} \qquad \frac{L}{2} < x < L.$$

$$y = \frac{wL^2x^2}{16EI} - \frac{wLx^3}{48EI} + \frac{9wL^3x}{192EI} - \frac{17wL^4}{192EI} \qquad \frac{L}{2} < x < L. \quad ■$$

Problemas

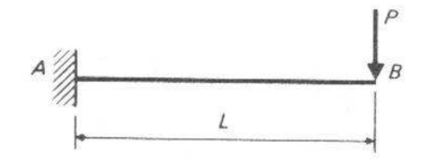


FIGURA P7.10

7.10-7.13 Escribir las ecuaciones para la elástica de las vigas indicadas en las Figs. P7.10 a P7.13. El origen de coordenadas está en

a) el extremo empotrado b) el extremo libre

7.14-7.23 Escribir las ecuaciones para la elástica de las vigas indicadas en las Figs. P7.14 a P7.23.

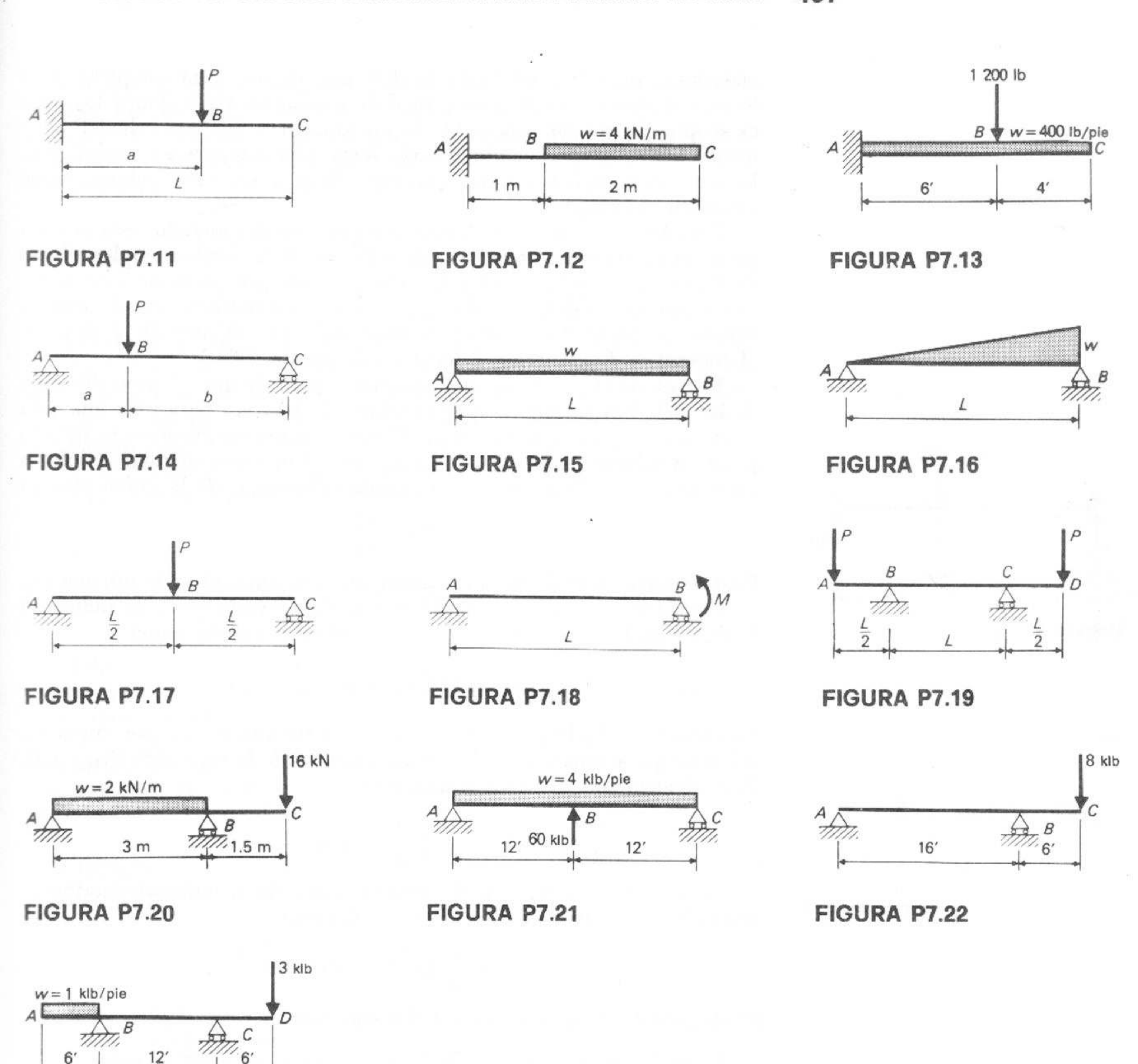


FIGURA P7.11

FIGURA P7.12

FIGURA P7.13

FIGURA P7.14

FIGURA P7.15

FIGURA P7.16

FIGURA P7.17

FIGURA P7.18

FIGURA P7.19

FIGURA P7.20

FIGURA P7.21

FIGURA P7.22

FIGURA P7.23

7.6 Funciones singulares para deflexiones de vigas

El procedimiento de la doble integración para deflexiones de vigas discutido en la sección anterior tiene la ventaja de capacitarnos para escribir

ecuaciones para la pendiente y la deflexión de una viga completa. Esta técnica clásica es relativamente fácil de aplicar en vigas donde la carga es simple, ya que las constantes de integración se pueden calcular fácilmente. Sin embargo, cuando la carga llega a ser asimétrica o complicada, la solución completa de las ecuaciones llega a ser muy tediosa, como vimos en el ejemplo 7.4.

Para hacer mínima esta limitación práctica del método, esta sección presenta un método alternativo de solución. Esta técnica emplea el uso de funciones singulares. (Un tratamiento más completo de este tema, junto con una extensa bibliografía, puede encontrarse en el artículo "Clebsch's Method for Beam Deflections", por Walter D. Pilkey, en el *Journal of Enginnering Education*, Enero de 1964.)

El método de las funciones singulares permite que el procedimiento de la doble integración se aplique solamente una vez para toda una vida sujeta a cualquier tipo de carga. Como el momento flexionante interno puede escribirse para todo el claro usando funciones singulares, sólo es necesaria una aplicación de la ecuación diferencial de la curva elástica

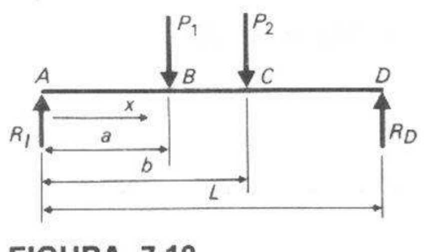


FIGURA 7.10

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI},$$

Esto requiere la evaluación de solamente dos constantes de integración.

Consideremos una viga de EI constante, cargada como se indica en la Fig. 7.10. La ecuación de la curva elástica se escribe como

$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = M.$$

La expresión algebraica para el momento flexionante es, por supuesto, diferente para cada uno de los tres segmentos de la viga, AB, BC, y CD. Para el segmento AB, esta ecuación es

$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = R_I x. \tag{a}$$

Conservando el extremo A como el origen de x, podemos escribir la ecuación de la curva elástica entre B y C como

$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = R_I x - P_1\langle x - a\rangle. \tag{b}$$

El símbolo $\langle\ \rangle$ tiene las propiedades siguientes:

1. Si la cantidad dentro de $\langle\ \rangle$ es negativa, su valor es cero.
2. Si la cantidad dentro de $\langle\ \rangle$ es positiva, sustituimos el símbolo por un paréntesis común

Por consiguiente, la ecuación (b) es válida para todo el tramo comprendido entre A y C. Extendiendo esto a toda la viga, escribimos entonces la ecuación como

$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = R_I x - P_1\langle x - a\rangle - P_2\langle x - b\rangle. \tag{c}$$

Por consiguiente, la ecuación (c) describe la curva elástica para toda la viga. Los términos dentro de $\langle\,\rangle$ pueden integrarse directamente sin importar las cantidades algebraicas que encierran. Para ilustrar la ecuación resultante para la pendiente y la deflexión, integramos la ecuación (c) dos veces, para obtener las ecuaciones (d) y (e).

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{R_I x^2}{2} - \frac{P_1\langle x-a\rangle^2}{2} - \frac{P_2\langle x-b\rangle^2}{2} + C_1, \qquad \text{(d)}$$

$$EIy = \frac{R_I x^3}{6} - \frac{P_1\langle x-a\rangle^3}{6} - \frac{P_2\langle x-b\rangle^3}{6} + C_1 x + C_2. \qquad \text{(e)}$$

Las dos constantes de integración C_1 y C_2 se calculan reconociendo que la deflexión es cero en los dos extremos de la viga. Usando la condición $y = 0$ en $x = 0$ y la ecuación (e), hallamos que $C_2 = 0$. Nótese que las cantidades dentro de $\langle\,\rangle$ fueron negativas, y por consiguiente, se evalúan como cero.

La constante C_1 se calcula usando la condición de que $y = 0$ en $x = L$, en la ecuación (e). Resolviendo esto, tenemos

$$0 = \frac{R_I L^3}{6} - \frac{P_1\langle L-a\rangle^3}{6} - \frac{P_2\langle L-b\rangle^3}{6} + C_1 L,$$

$$C_1 = \frac{P_1\langle L-a\rangle^3}{6L} + \frac{P_2\langle L-b\rangle^3}{6L} - \frac{R_I L^2}{6}.$$

Habiendo calculado las constantes de integración, se conoce la ecuación completa, y la deflexión y la pendiente se pueden calcular fácilmente en cualquier punto.

EJEMPLO 7.5 Escribir la ecuación general de la curva elástica para la viga indicada en la Fig. 7.11; y a partir de esta ecuación general, determinar las deflexiones cada cuarto de la luz.

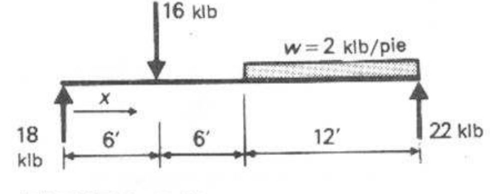


FIGURA 7.11

SOLUCION Escribimos la ecuación diferencial de la curva elástica para todo el claro de la viga como

$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 18x - 16\langle x-6\rangle - \frac{2\langle x-12\rangle^2}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Integrando la ecuación (a) para obtener las ecuaciones de la pendiente y la deflexión, obtenemos

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{18x^2}{2} - \frac{16\langle x-6\rangle^2}{2} - \frac{2\langle x-12\rangle^3}{6} + C_1 \qquad \text{(b)}$$

$$EIy = \frac{18x^3}{6} - \frac{16\langle x-6\rangle^3}{6} - \frac{2\langle x-12\rangle^4}{24} + C_1 x + C_2. \qquad \text{(c)}$$

La constante de integración C_2 se determina usando la condición de frontera $y = 0$ en $x = 0$, en la ecuación (c). Así encontramos que $C_2 = 0$, notando otra vez que todas las cantidades dentro de $\langle\,\rangle$ que son negativas valen cero.

Calculamos la constante de integración C_1 usando la condición de que $y = 0$ en $x = L$, y la ecuación (c), como sigue:

$$0 = \frac{18(24)^3}{6} - \frac{16(24-6)^3}{6} - \frac{2(24-12)^4}{24} + C_1(24).$$

A partir de esto obtenemos

$$C_1 = -1\,008.$$

Por consiguiente, la ecuación para la deflexión de la viga se convierte en

$$EIy = 3x^3 - \frac{8\langle x-6\rangle^3}{3} - \frac{\langle x-12\rangle^4}{24} - 1\,008x.$$

Las deflexiones en los puntos cuartos del claro se calculan como sigue:

$$x = 6': \quad EIy = 3(6)^3 - 0 - 0 - 1\,008(6),$$

$$EIy = -5\,400 \text{ (hacia abajo)};$$

$$x = 12': \quad EIy = 3(12)^3 - \frac{8(12-6)^3}{3} - 0 - 1\,008(12)$$

$$EIy = -7\,560 \text{ (hacia abajo)};$$

$$x = 18': \quad EIy = 3(18)^3 - \frac{8(18-6)^3}{3} - \frac{(18-12)^4}{24} - 1\,008(18)$$

$$EIy = -4\,310 \text{ (hacia abajo)}.$$ ■

Problemas

7.24-7.29 Escribir la ecuación general de la curva elástica con funciones singulares para las vigas indicadas en las Figs. P7.24 a P7.29. Calcular las magnitudes de las deflexiones de los puntos A y B situados sobre las vigas.

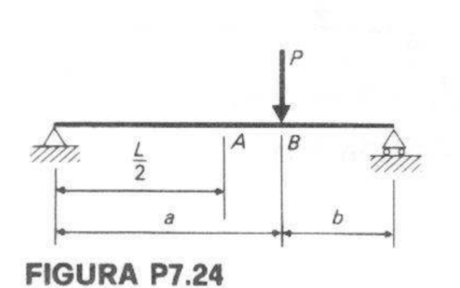


FIGURA P7.24

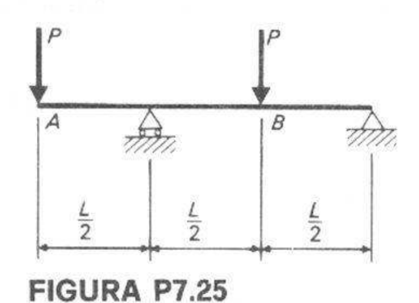


FIGURA P7.25

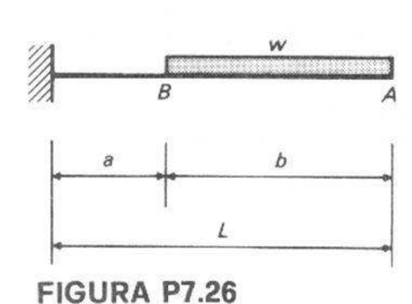


FIGURA P7.26

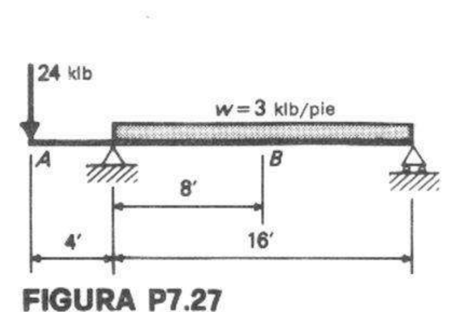
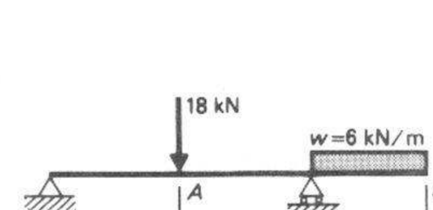


FIGURA P7.27



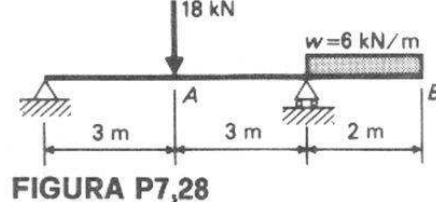


FIGURA P7,28

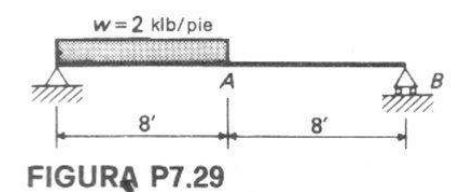


FIGURA P7.29

Método del área de momentos SECCION B

Existe un buen número de métodos diferentes para determinar las pendientes y las deflexiones de las vigas. El método del área de momentos que se presenta en esta sección es uno de los que se usan más ampliamente. Usa las propiedades geométricas de la curva elástica y la relación con la variación del M/EI a lo largo de la viga.

El método de integración descrito en la sección *A* tiene la ventaja de proporcionar una función contínua que permite que la pediente o la deflexión de una viga se puedan calcular en cualquier punto. Sin embargo, como ya hemos notado, cuando las cargas sobre la viga son complicadas, el método puede resultar muy laborioso de aplicar.

Por otro lado, el método del área de momentos, es mucho más fácil de usar cuando las cargas son complejas. Sin embargo, cada conjunto de cálculos produce un valor numérico para la pendiente o para la deflexión en un solo lugar, en vez de una ecuación para la pendiente o la deflexión de un segmento contínuo de viga. Afortunadamente, en las aplicaciones prácticas solamente se necesita la pendiente o la deflexión en uno o en varios lugares. La facilidad de los cálculos y lo práctico de su uso son las razones principales de la popularidad del método del área de momentos para calcular deflexiones en vigas.

7.7 El primer teorema del área de momentos

Para ilustrar el principio del primer teorema del área de momentos consideremos una viga recta. Rompemos la viga en los puntos *B*, *C*, y *D*, y soldamos los segmentos rígidamente, como se indica en la Fig. 7.12. Los tramos de la viga entre los puntos donde se hicieron las rupturas son rectos, pero se han introducido pequeños ángulos en las juntas.

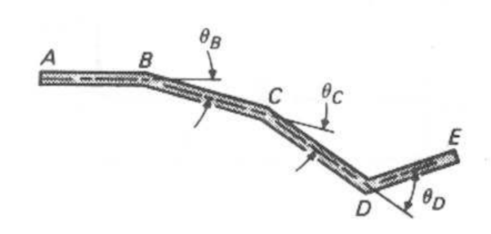


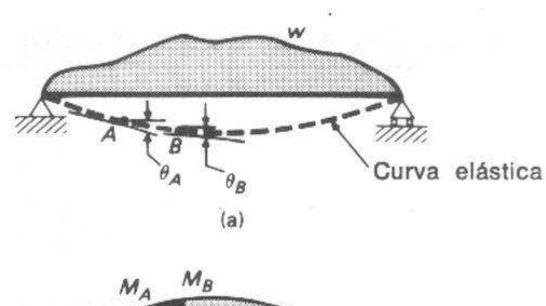
FIGURA 7.12

A partir de la figura vemos que el *cambio* en la pendiente entre dos puntos cualesquiera es la suma de los cambios angulares entre estos puntos. Por ejemplo, el cambio en la pendiente entre el segmento *DE* y el segmento *AB* es igual a $\theta_B + \theta_C - \theta_D$.

Una viga cargada es semejante a la Fig. 7.12, excepto que su curva elástica cambia continuamente. El cambio en pendiente entre dos puntos cualesquiera de una viga cargada es también la suma de los cambios angulares entre las dos secciones. Estos cambios angulares pueden calcularse usando $d\theta = M\,dx/EI$ (ecuación 7.3). Por ejemplo, en la Fig. 7.13 se indica la curva elástica de una viga. El cambio en pendiente entre dos lugares cualesquiera, tales como los puntos *A* y *B* puede obtenerse calculando $d\theta = M\,dx/EI$ entre estos dos puntos. Esto se convierte en

$$\int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\theta_B - \theta_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M\,dx}{EI}. \tag{a}$$



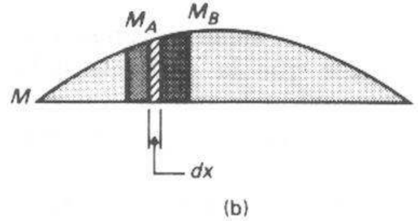


FIGURA 7.13

El cambio en pendiente entre dos puntos de una viga, $\theta_B - \theta_A$ de la ecuación (a), es igual al valor de la integral. La integral representa el área bajo el diagrama de momentos entre los puntos A y B dividida entre EI. El primer teorema del área de momentos se enuncia como sigue:

El cambio en pendiente de la curva elástica de una viga entre dos secciones cualesquiera es igual al área bajo el diagrama M/EI entre dichas secciones.

El término EI aparecerá frecuentemente tanto en esta como en otras secciones posteriores. Significa que cada ordenada del diagrama de momentos se divide entre el EI de la viga. Para vigas de sección transversal constante, el diagrama M/EI tiene la misma forma que el diagrama de momentos.

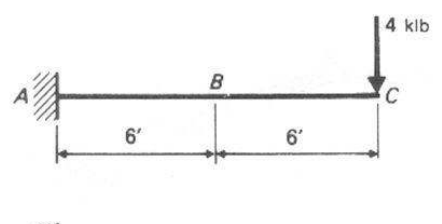
EJEMPLO 7.6 Determinar el cambio en pendiente entre los puntos B y C de la viga en voladizo indicada en la Fig. 7.14. Dar la respuesta en función de EI.

SOLUCION A partir del primer teorema del área de momentos, la diferencia de pendientes entre B y C es igual al área bajo el diagrama M/EI, comprendida entre esos puntos. Así:

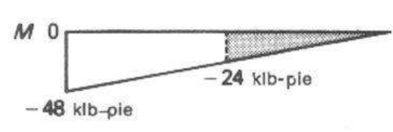
$$\theta_C - \theta_B = \frac{1}{2}\left(-\frac{24}{EI}\right)(6),$$

$$\theta_C - \theta_B = -\frac{72}{EI}\text{ rad.}$$

El signo menos significa que la rotación es en el sentido negativo (es decir, en el sentido de las manecillas del reloj). Si se dieran los valores de E e I, se podría obtener el valor numérico, en radianes. ■







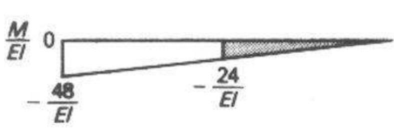


FIGURA 7.14

EJEMPLO 7.7 Determine la pendiente real del extremo libre de la viga en voladizo mostrada en la Fig. 7.14. Dar la respuesta en términos de EI.

SOLUCION La pendiente en el extremo fijo A se sabe que es cero. Por consiguiente, el cambio de pendientes entre A y C es la pendiente real de C, ya que $\theta_A = 0$.

Aplicando el primer teorema del área de momentos, tenemos:

$$\theta_C - \theta_A = \frac{1}{2}\left(-\frac{48}{EI}\right)(12)$$

$$\theta_C - 0 = \frac{-288}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{-288}{EI} \text{ rad.} \quad ■$$

7.8 Segundo teorema del área de momentos

Considérese la viga discutida en la sección anterior, pero con la nomenclatura adicional mostrada en la Fig. 7.15.

Por geometría, suponiendo que los ángulos son muy pequeños, podemos determinar la desviación del punto P con respecto a la tangente trazada por B (distancia PP_2) así:

$$PP_2 = PP_1 + P_1P_2$$

$$PP_2 = \theta_B x_1 + \theta_C x_2.$$

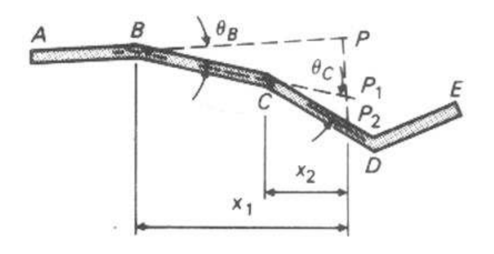


FIGURA 7.15

Esta expresión matemática dice que la desviación de cualquier punto P con respecto a la tangente trazada por otro cualquiera B, es igual al momento estático de cada una de las variaciones angulares comprendidas entre esos puntos, con respecto al punto P. Este es el principio del segundo teorema del área de momentos, que se establecerá a continuación en forma más útil.

Una viga cargada es semejante a la de la Fig. 7.15, excepto que su curva elástica cambia continuamente. La variación angular entre dos secciones cualesquiera es $d\theta = M\,dx/EI$ (ec. 6.3). La desviación de cualquier punto situado sobre una viga cargada, con respecto a la tangente trazada por cualquier otro punto, se puede expresar, entonces, como:

$$t_{P/B} = \int d\theta\, x = \int \frac{M\,dx}{EI}x,$$

donde:

$t_{P/B}$ = desviación de cualquier punto P medida a partir de la tangente trazada en B,

$\int \frac{M\,dx}{EI}x$ = momento estático del área bajo el diagrama M/EI comprendida entre P y B, con respecto a P.

Así, un enunciado más útil del segundo teorema del área de momentos es:

La desviación tangencial de cualquier punto P *situado sobre la elástica de una viga con respecto a la tangente trazada por cualquier otro*

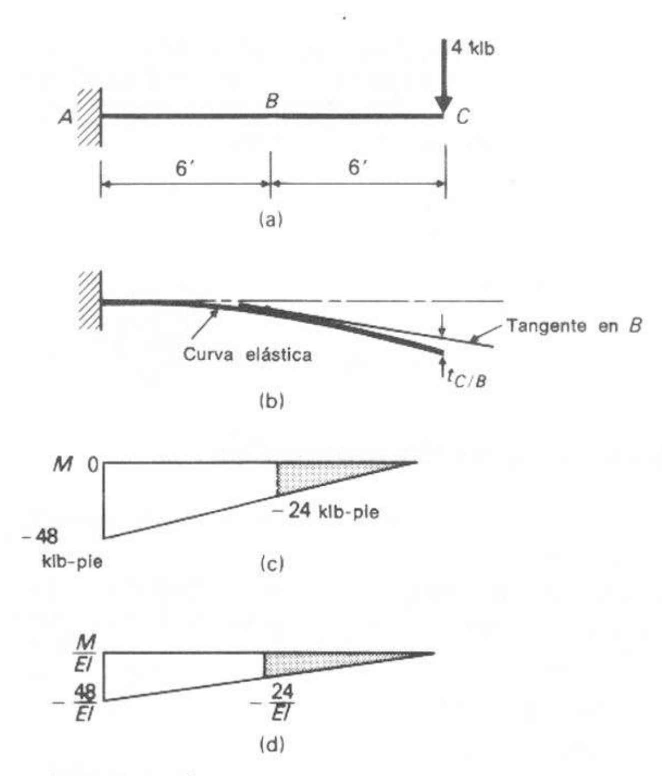


FIGURA 7.16

punto de la elástica, es igual al momento estático, con respecto a P, *del área bajo el diagrama* M/EI *comprendida entre esos puntos.*

EJEMPLO 7.8 Determinar la desviación del extremo C con respecto a la tangente trazada en el punto B, de la viga indicada en la Fig. 7.16. Dar la respuesta en función de EI.

SOLUCION A partir del segundo teorea del área de momentos,

$t_{C/B}$ = momento del área bajo el diagrama M/EI entre C y B con respecto a B.

$$t_{C/B} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{24}{EI}\right)(6)}_{\text{Area}} \times \underbrace{\frac{2}{3}(6)}_{\text{Brazo de palanca}}$$

$$t_{C/B} = -\frac{288}{EI}.$$

El signo menos significa que el punto C está en la dirección negativa (es decir, hacia abajo) de la tangente trazada por B. ■

7.9 Teoremas del área de momentos: notas generales

Los dos teoremas del área de momentos de las secciones 7.7 y 7.8 forman las bases para calcular pendientes y deflexiones de vigas. Fueron deter-

minados aplicando un análisis puramente geométrico a una viga y relacionando después las relaciones geométricas a una viga cargada que tiene cambios angulares en forma contínua.

Estos teoremas se repiten a continuación, para facilidad de referencia. Se añaden notas adicionales sobre algunos puntos que frecuentemente causan dificultad en el uso de los teoremas. Se incluye un procedimiento paso a paso, con el fin de capacitar al estudiante principiante para iniciar un problema en forma lógica y adelantarlo ordenadamente.

Primer Teorema del área de momentos. *El cambio de pendientes entre dos secciones cualesquiera sobre la elástica de una viga es igual al área bajo el diagrama M/EI comprendida entre esas secciones.*

Nota: Este teorema da la variación de la pendiente, en lugar de la pendiente real. Para obtener la pendiente real, frecuentemente debemos establecer relaciones geométricas, como se ilustrará más adelante.

Segundo Teorema del área de momentos. *La desviación tangencial de cualquier punto P sobre la elástica de una viga con respecto a la tangente trazada por cualquier otro punto de la elástica, es igual al momento estático, con respecto a P, del área bajo el diagrama M/EI comprendido entre esos puntos.*

Notas:

1. Los puntos a los que se refiere este teorema están sobre la elástica, y no necesariamente sobre la posición original no deformada de la viga.
2. Todas las medidas se toman a partir de la tangente trazada por un punto situado sobre la elástica hacia otro punto P sobre la elástica.
3. Este teorema indica el desplazamiento relativo. Algunas veces el desplazamiento relativo es la deflexión real de la viga, pero esto no es cierto, en general.

A continuación se presenta un procedimiento para calcular pendientes y deflexiones. Su propósito es que sirva como una guía para facilitar la aplicación del método, aunque en algunos casos, pueden omitirse pasos a medida que se tenga mejor conocimiento del método.

1. Dibújese la viga en su posición original y bosquéjese la forma flexionada de la elástica.
2. Dibújese el diagrama de momentos.
3. Dibújese el diagrama M/EI. Cuando el EI de la viga sea constante a lo largo de la viga, los pasos 2 y 3 pueden combinarse. Para vigas de EI variable (que se discutirán en la sección 7.14), es más conveniente trazar diagramas separados.

4. Elíjase un punto sobre la elástica, a partir del cual se traza una tangente. Si se conoce la pendiente en algún punto (por ejemplo, una pendiente cero en un apoyo empotrado), o puede localizarse por inspección (por ejemplo, el centro de una viga simétricamente cargada), úsese dicho lugar. Si no es obvio ningún punto como los mencionados, generalmente es más conveniente trazar la tangente en un apoyo.
5. Aplíquese el segundo teorema del área de momentos para calcular las desviaciones tangenciales.
6. Usando las condiciones geométricas, determine la deflexión a partir de la posición descargada de la viga.

Con la práctica se logra un uso adecuado de los teoremas del área de momentos y un método eficiente de solución. Para ilustrar la solución de problemas, en las secciones siguientes hay varios ejemplos numéricos acompañados de notas explicativas. Sugerimos que los ejemplos se estudien con cuidado, pues están diseñados para ayudar al estudiante a entender el significado de los teoremas del área de momentos y a comprender un método eficiente de solución. En muchos problemas hay varios métodos de solución, todos igualmente válidos. En otras palabras, no queremos dar a entender que estos ejemplos dan la única solución correcta. Puede haber varias soluciones igualmente satisfactorias para cualquier problema.

7.10 Teoremas del área de momentos aplicados a vigas en voladizo

Los teoremas del área de momentos son particularmente útiles para calcular pendientes y deflexiones de vigas en voladizo. Los ejemplos siguientes se escogieron para ilustrar el uso del teorema y para indicar algunos de los aspectos que causan frecuentemente alguna dificultad.

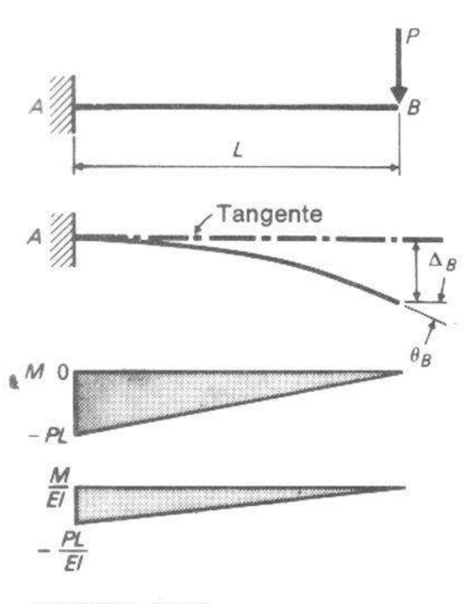


FIGURA 7.17

EJEMPLO 7.9 Calcular la deflexión en el extremo libre de la viga mostrada en la Fig. 7.17. Dar la respuesta en términos del EI de la viga.

SOLUCION La viga y su forma flexionada se muestran aquí en dos diagramas separados, aunque generalmente es más conveniente usar una sola figura. También, como ilustración, se trazaron los diagramas de momentos y de M/EI en dos figuras separadas, aunque solamente es necesario un diagrama en casos de EI constante.

La tangente a la elástica está trazada en A. El punto A se eligió debido a que se sabe que la tangente trazada en ese punto es horizontal (pendiente cero). En este caso, la desviación tangencial es la deflexión real, debido a que la tangente en A y el eje de la viga no flexionada coinciden.

Aplicando el segundo teorema del área de momentos,

$$\Delta_B = \text{momento del área bajo el diagrama } M/EI \text{, con respecto a } B$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)L}_{\text{Area}}\underbrace{\left(\frac{2}{3L}\right)}_{\text{Brazo de palanca}},$$

$$\Delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}.$$

Nota: El signo menos indica que la desviación está debajo de la tangente de referencia. ■

EJEMPLO 7.10 Determinar la pendiente, en radianes, y la deflexión, en pulgadas, del extremo libre de la viga mostrada en la Fig. 7.18. La viga es una W. 10 × 25 con E = 30 000, klb/plg².

SOLUCION Se traza otra vez la tangente en el apoyo empotrado, pues se sabe que la pendiente ahí es nula.

En términos generales es más fácil conservar el término EI hasta los cálculos finales, que usar los valores numéricos desde las primeras etapas. El cálculo numérico es menos difícil si se hace esto.

Aplicando el segundo teorema del área de momentos,

Δ_C = momento del área bajo el diagrama M/EI entre A y C, con respecto a C.

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{48}{EI}\right)(6)}_{\text{Area}}\underbrace{\left(3+\frac{2}{3}\times 6\right)}_{\text{Brazo de palanca}},$$

$$\Delta_C = -\frac{1\,008}{EI}.$$

Para hallar la deflexión en pulgadas, debemos efectuar un análisis dimensional para determinar los factores de conversión adecuados. Calculamos que

$$\Delta_C = \frac{\frac{1}{2}(-48\text{ klb-pie})(6\text{ pies})(7\text{ pies})}{(30\,000\text{ klb/plg}^2)(133.2\text{ plg}^4)} = 0.000252\text{ pies}^3/\text{plg}^2$$

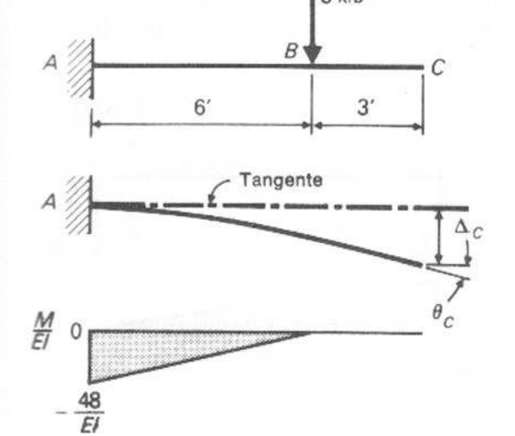


FIGURA 7.18

Multiplicando este valor por el factor de conversión 1 728 $\text{plg}^3/\text{pie}^3$ se obtiene:

$$\Delta_C = 0.000252\ \text{pies}^3/\text{plg}^2 \times 1\,728\ \text{plg}^3/\text{pie}^3, \qquad \Delta_C = 0.435\ \text{plg.}$$

Si E se expresa en klb/plg^2 y M en klb-pie (o E en lb/plg^2 y M en lb-pies), debemos usar el factor de conversión 1 728 $\text{plg}^3/\text{pie}^3$ para obtener la respuesta en pulgadas.

Para determinar la pendiente, debe usarse el primer teorema del área de momento. Como la pendiente en A es $\theta_A = 0$, la variación de pendiente entre A y C da la pendiente real en C, θ_C:

$$\theta_C - \theta_A = \text{área bajo el diagrama } M/EI \text{ comprendida entre } A \text{ y } C.$$

Combinando los cálculos y el análisis dimensional nos da:

$$\theta_C - 0 = \frac{\frac{1}{2}(-48\ \text{klb-pie})(6\ \text{pies})}{(30\,000\ \text{klb}/\text{plg}^2)(133.2\ \text{plg}^4)} = -0.0000360\ \text{pies}^2/\text{plg}^2$$

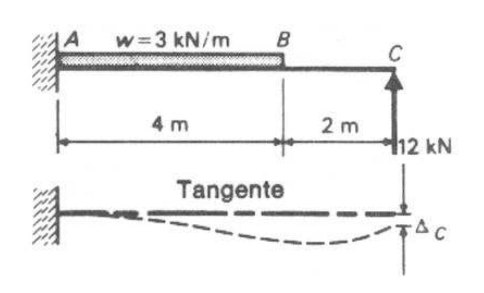
Como se quiere expresar el resultado en radianes, que es una cantidad sin dimensiones, usamos el factor de conversión 144 $\text{plg}^2/\text{pie}^2$ y obtenemos:

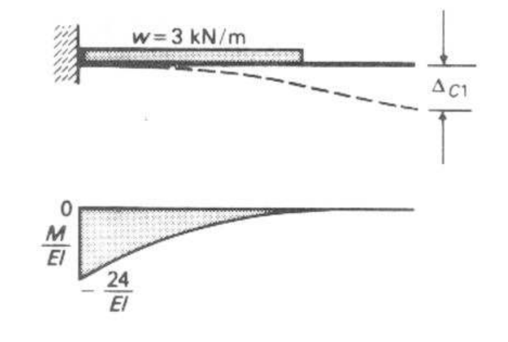
$$\theta_C = 0.0000360\ \text{pies}^2/\text{plg}^2 \times 144\ \text{plg}^2/\text{pie}^2, \qquad \theta_C = 0.00518\ \text{rad.}$$

El signo menos que aparece en los primeros cálculos y que se ha eliminado por conveniencia en la respuesta final, simplemente indica que la variación de pendiente es en el sentido negativo (es decir, en el sentido de las manecillas del reloj). Como las pendientes de una viga pueden visualizarse fácilmente, esta convención de signos adicional es generalmente innecesaria. ■

EJEMPLO 7.11 Calcule la pendiente, en radianes, y la deflexión, en mm, del extremo libre de la viga mostrada en la Fig. 7.19. Aquí $E = 200$ GPa. e $I = 359 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$.

SOLUCION En este caso, como en muchos casos de carga combinada, es más conveniente calcular las deflexiones y pendientes para cada carga en forma independiente, y después combinar (superponer) los resultados. Esto significa que en lugar de trazar el diagrama compuesto del capítulo 4 se trazan independientemente los diagramas M/EI para cada carga. En el Apéndice D





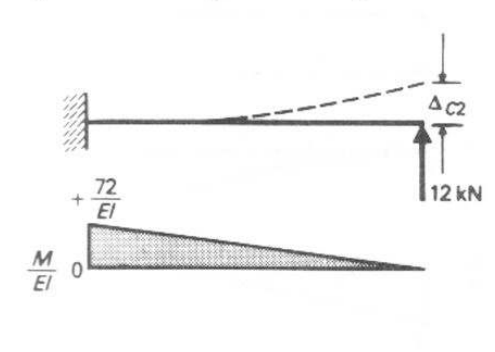


FIGURA 7.19

pueden encontrarse áreas y centroides de diagramas M/EI parabólicos, tales como los que resultan de cargas uniformemente distribuidas.

En este problema la incógnita es la posición final del extremo libre y no se sabe si éste quedará arriba o abajo de la posición no flexionada de la viga. Sin embargo, suponemos que queda debajo de la posición inicial en el bosquejo de la curva elástica. El signo algebraico de los resultados nos dirá si esta suposición es correcta.

Se usa el segundo teorema del área de momentos para calcular las deflexiones. Así:

$$\Delta_C = \frac{1}{3}\left(-\frac{24\,000}{EI}\right)(4)\left(2+\frac{3}{4}\times 4\right)+\frac{1}{2}\left(+\frac{72\,000}{EI}\right)(6)\left(\frac{2}{3}\times 6\right)$$

$$= -\frac{160\,000}{EI}+\frac{864\,000}{EI}=\frac{704\,000}{EI}.$$



FIGURA 7.20

El signo + indica que el punto C queda arriba de la tangente, que en este caso, coincide con la viga sin flexionar. Una representación más correcta de la curva elástica sería entonces la indicada en la Fig. 7.20. La deflexión en mm es

$$\Delta_C = \frac{(704\,000\text{ N}\cdot\text{m})}{(200\times 10^9\text{ N/m})(359\times 10^{-6}\text{ m}^4)} = 0.00981\text{ m}$$

$$\Delta_C = 9.8\text{ mm}.$$

La pendiente se obtiene aplicando el primer teorema del área de momentos a las áreas bajo el diagrama M/EI comprendidas entre A y C, ya que $\theta_A = 0$. Encontramos que

$$\theta_C = \frac{1}{3}\left(-\frac{24\,000}{EI}\right)(4)+\frac{1}{2}\left(+\frac{72\,000}{EI}\right)(6)$$

$$= -\frac{32\,000}{EI}+\frac{216\,000}{EI}=+\frac{184\,000}{EI}$$

La pendiente real del extremo libre, en radianes, es

$$\theta_C = \frac{184\,000\text{ N}\cdot\text{m}}{(200\times 10^9\text{ N/m}^2)(359\times 10^{-6}\text{ m}^4)} = 0.00256\text{ rad.} \quad ■$$

Problemas

7.30-7.33 Determinar la pendiente y la deflexión en el extremo libre de las vigas indicadas en las Figs. P7.30-P7.33. Resolver en función de EI.
7.34-7.37 Calcular la deflexión, en plg o metros, y la pendiente, en radianes, en los extremos libres de las vigas indicadas en las Figs. P7.34 a P7.37.

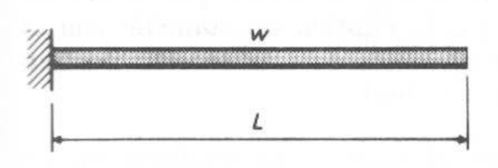


FIGURA P7.30

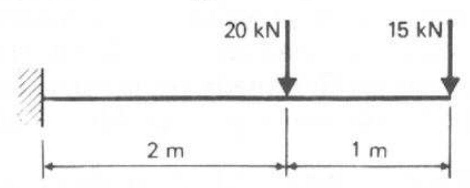


FIGURA P7.31

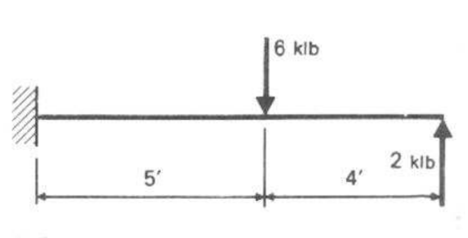
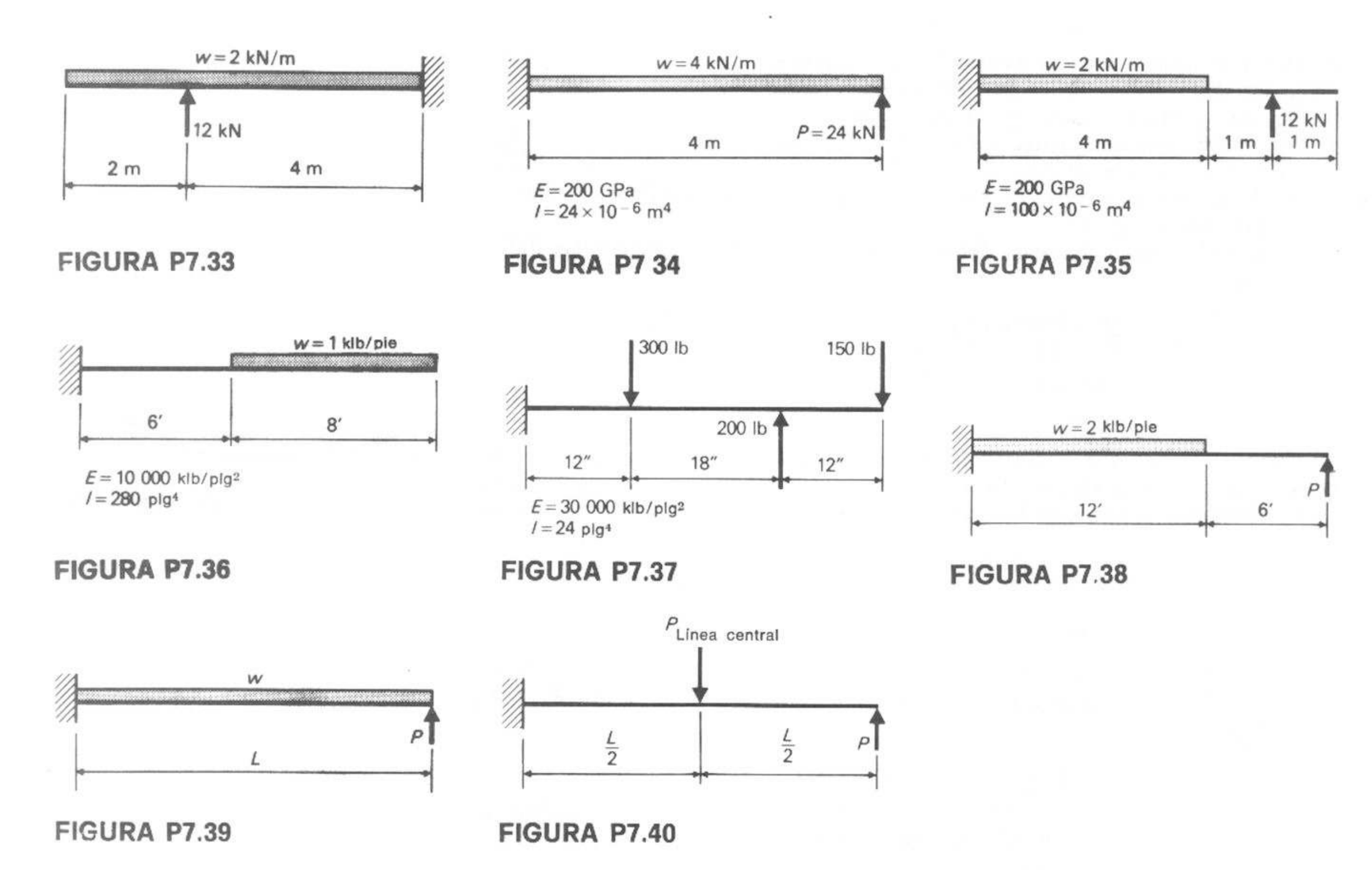


FIGURA P7.32



7.38-7.40 Para las vigas en voladizo indicadas en las Figs. P7.38 a P7.40, determinar la magnitud de la fuerza P que colocada en el extremo libre haría que la deflexión en ese punto sea cero.

7.11 Método del área de momentos aplicado a vigas simplemente apoyadas

El método del área de momentos también puede aplicarse al cálculo de deflexiones y pendientes de vigas simplemente apoyadas. Sin embargo, en este caso se necesitan más consideraciones geométricas que en el caso de vigas en voladizo, pues la tangente a la elástica no coincide con la posición no flexionada de la viga. Los ejemplos de esta sección ilustran algunas soluciones para problemas de este tipo.

EJEMPLO 7.12 Calcule la deflexión en el centro y la pendiente en los extremos de la viga de la Fig. 7.21. Dé la respuesta en términos de EI.

SOLUCION Por simetría, se sabe que la tangente en B es horizontal. Por consiguiente, se escoge B como el punto situado sobre la curva elástica por el cual se traza la tangente.

Podemos obtener la desviación de A a partir de la tangente a la elástica trazada en $B(t_{A/B})$ aplicando el segundo teorema del área de momentos. Considerando la geometría de la viga flexionada, la deflexión pedida Δ_B es igual a $t_{A/B}$. Así:

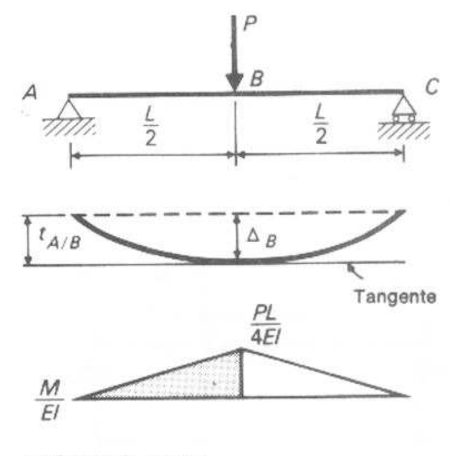


FIGURA 7.21

$t_{A/B}$ = desviación de A con respecto a la tangente trazada en B,

$t_{A/B}$ = momento del área bajo el diagrama M/EI comprendida entre A y B, con respecto a A (área sombreada);

$$t_{A/B} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \times \frac{L}{2}\right)$$

$$t_{A/B} = \frac{PL^3}{48EI}.$$

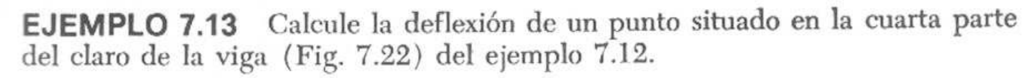
La respuesta es positiva ya que el punto A queda por encima de la tangente trazada en B.

La deflexión en el centro del claro es, entonces, $\Delta_B = PL^3/48EI$.

Se determina la pendiente en A aplicando el primer teorema del área de momentos entre A y B, teniendo en cuenta que $\theta_B = 0$:

$$\theta_A - \theta_B = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI}. \quad \blacksquare$$



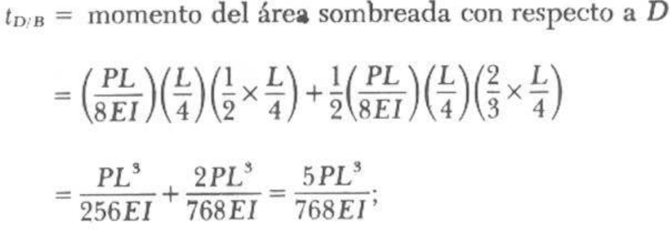
EJEMPLO 7.13 Calcule la deflexión de un punto situado en la cuarta parte del claro de la viga (Fig. 7.22) del ejemplo 7.12.

SOLUCION En este caso, no podemos determinar directamente la deflexión deseada Δ_D, y por tanto debemos establecer una relación geométrica de la deflexión deseada Δ_D, con valores conocidos o fácilmente calculables. A partir de la curva elástica, Fig. 7.22 (b), vemos que esta relación es

$$\Delta_D = \Delta_B - t_{D/B}.$$

FIGURA 7.22

El valor de θ_B se encontró en el ejemplo 7.12, y podemos calcular $t_{D/B}$ usando el segundo teorema del área de momentos entre B y D. Por conveniencia, el área sombreada se descompone en el rectángulo y en el triángulo mostrados en la Fig. 7.22 (c). Procedamos como sigue



$t_{D/B}$ = momento del área sombreada con respecto a D

$$= \left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{1}{2} \times \frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{2}{3} \times \frac{L}{4}\right)$$

$$= \frac{PL^3}{256EI} + \frac{2PL^3}{768EI} = \frac{5PL^3}{768EI};$$

y

$$\begin{aligned}\Delta_D &= \Delta_B - t_{D/B}\\ &= \frac{PL^3}{48EI} - \frac{5PL^3}{768EI} = \frac{16PL^3}{768EI} - \frac{5PL^3}{768EI}\\ &= \frac{11PL^3}{768EI}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

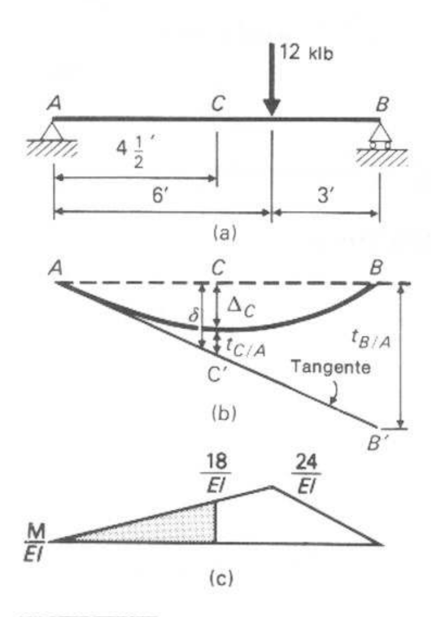


FIGURA 7.23

EJEMPLO 7.14 Calcule la deflexión en el centro del claro de la viga mostrada en la Fig. 7.23.

SOLUCION Se desconoce la posición del lugar donde la pendiente es cero, de modo que la deflexión en el centro del claro, Δ_C, debe determinarse indirectamente. La relación geométrica que se usará en este caso y que se muestra en la Fig. 7.23 (b), se expresa matemáticamente como $\Delta_C = \delta - t_{C/A}$. Deben calcularse tanto δ como $t_{C/A}$. La cantidad δ puede determinarse de la manera siguiente.

Trácese la tangente en A y hállese $t_{B/A}$ aplicando el segundo teorema del área de momentos entre B y A. A partir de los triángulos semejantes ABB' y ACC', puede hallarse δ por proporción simple como se indica en los cálculos siguientes:

$$\begin{aligned}t_{B/A} &= \text{momento de todo el diagrama } M/EI\text{, con respecto a } B\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{24}{EI}\right)(6)\left(3 + \frac{1}{3}\times 6\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{24}{EI}\right)(3)\left(\frac{2}{3}\times 3\right)\\ &= \frac{360}{EI} + \frac{72}{EI} = \frac{432}{EI}.\end{aligned}$$

Por los triángulos semejantes ACC' y ABB',

$$\delta = \tfrac{1}{2}t_{B/A}, \qquad \delta = \frac{216}{EI}.$$

Determínese $t_{B/A}$ aplicando el segundo teorema del área de momentos entre C y A:

$$\begin{aligned}t_{C/A} &= \text{momento del área sombreada, con respecto a } C\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(4.5)\left(\frac{1}{3}\times 4.5\right)\\ &= \frac{60.75}{EI}.\end{aligned}$$

La deflexión requerida Δ_C es, entonces:

$$\Delta_C = \delta - t_{C/A} = \frac{216}{EI} - \frac{60.75}{EI}$$

$$\Delta_C = \frac{155.25}{EI}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7.15 Determine la localización del punto de pendiente cero para la viga (Fig. 7.24) del ejemplo 7.14.

SOLUCION Al localizar el punto de pendiente cero, también estamos localizando el punto de deflexión máxima. Esto se consigue aplicando el primer teorema del área de momentos entre A y el lugar desconocido D, ya que θ_A puede obtenerse a partir de los datos del ejemplo 7.14.

El área sombreada bajo el diagrama M/EI da la variación de pendiente entre A y D. Sabiendo que $\theta_A = 48/EI$ y $\theta_D = 0$, hallemos la distancia desconocida, como sigue:

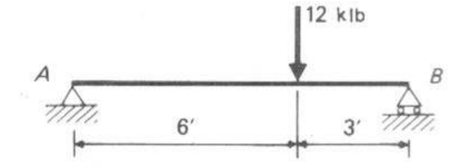
$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{432/EI}{9}, \qquad \theta_A = \frac{48}{EI}$$

$$\theta_A - \theta_D = \tfrac{1}{2}(x)\left(\frac{4x}{EI}\right)$$

$$\frac{48}{EI} - 0 = \frac{2x^2}{EI}$$

$$x^2 = 24$$

$$x = 4.9 \text{ pies} \blacksquare$$



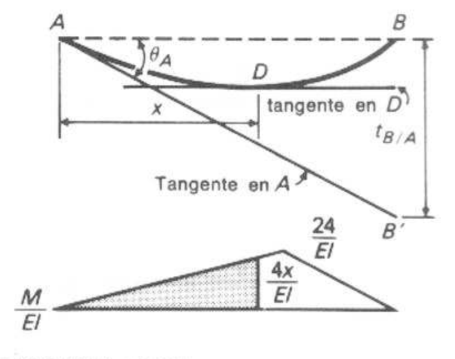


FIGURA 7.24

Problemas

7.41-7.49 Determinar la deflexión y la pendiente en el centro del claro, y la pendiente en cada extremo de las vigas indicadas en las Figs. P7.41 a P7.49. Dar las respuestas en función de EI.

7.50 Calcular la deflexión máxima en la viga de la Fig. P7.44.

7.51 Calcular la deflexión máxima en la viga de la Fig. P7.43.

7.52 Calcular la deflexión máxima en la viga de la Fig. P7.49.

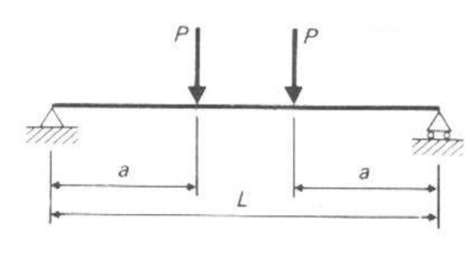


FIGURA P7.41

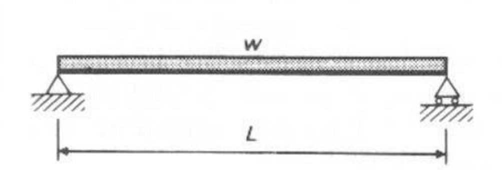


FIGURA P7.42

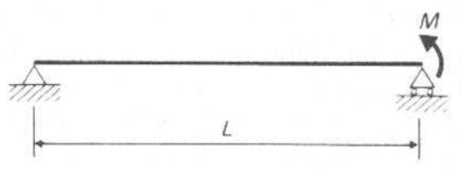


FIGURA P7.43

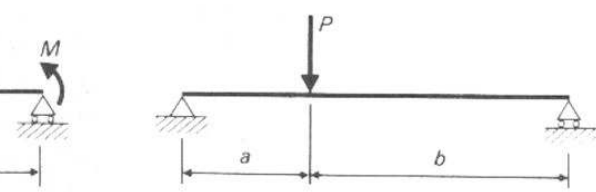


FIGURA P7.44

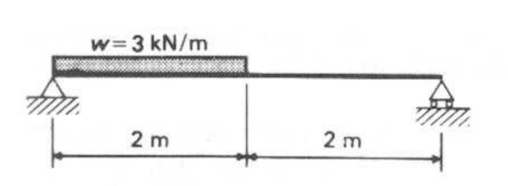


FIGURA P7.45

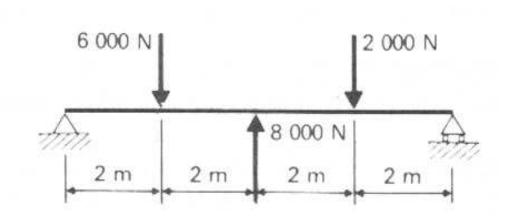


FIGURA P7.46

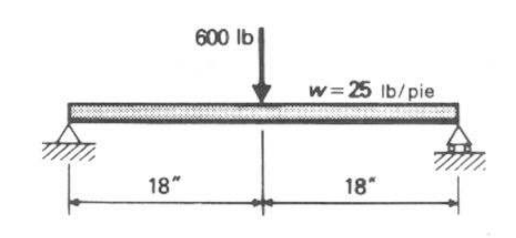


FIGURA P7.47

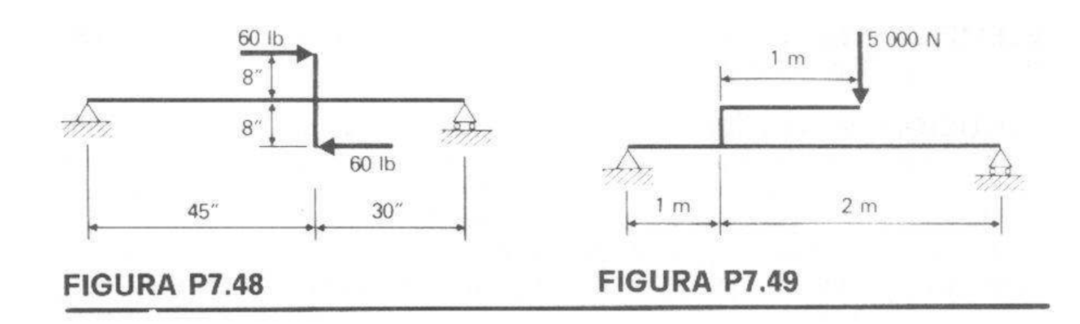


FIGURA P7.48 FIGURA P7.49

7.12 Diagramas de momentos por partes

Los diagramas de momentos para los problemas de las secciones anteriores se trazaron en la forma convencional presentada en el capítulo 4. Este método resultó satisfactorio al calcular pendientes y deflexiones cuando las vigas y las cargas eran relativamente sencillas, como en las secciones 7.9 y 7.10. Sin embargo, cuando se aplican a una viga cargas más complicadas, se involucran cálculos de áreas trapezoidales y parcialmente parabólicas, que en general, son engorrosos. Un método más simple en cuanto al cálculo de áreas y centroides, consiste en trazar un diagrama de momentos separado para cada carga que actúa sobre la viga. Esta técnica se llama *diagramas de momentos "por partes"* o *diagramas de momentos "por partes en voladizo"*, ya que la viga se considera fija en algún punto, con las partes restantes actuando como vigas en voladizo.

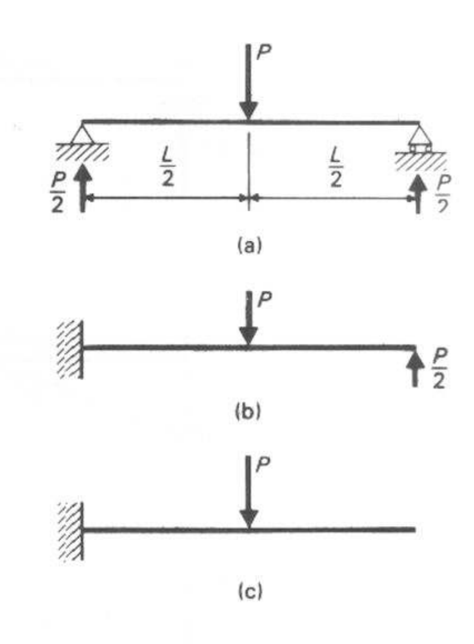
Es relativamente fácil trazar el diagrama de momentos para una viga en voladizo que soporta una sola carga. En la mayoría de los casos podemos hacer esto por inspección, sin tener que trazar un diagrama preliminar de fuerzas cortantes. Al construir un diagrama de momentos por partes, usamos el mismo procedimiento; es decir, consideramos un punto conveniente de la viga como "empotrado", y trazamos diagramas de momentos para cada carga individual como si fuera la única carga ejercida sobre una viga en voladizo fija en el punto escogido. Cuando se trazan los diagramas para todas las cargas que actúan sobre la viga, la suma algebraica de todas las ordenadas en cualquier lugar tendrá el mismo valor que la ordenada correspondiente del diagrama compuesto, trazado mediante los procedimientos del capítulo 4.

El ejemplo 7.16 ilustra este procedimiento y demuestra que la superposición de todos los diagramas es equivalente al diagrama simple que resulta al superponer las cargas aisladas.

EJEMPLO 7.16 Trazar el diagrama de momentos por partes, partiendo del apoyo izquierdo, para la viga mostrada en la Fig. 7.25.

SOLUCION Como se va a trazar el diagrama de momentos por partes, partiendo del apoyo izquierdo, consideramos ese extremo como "empotrado" y aplicamos dos cargas concentradas, como se indica en la Fig. 7.25 (b). Los diagramas de momentos de esas dos cargas se indican individualmente, y des-

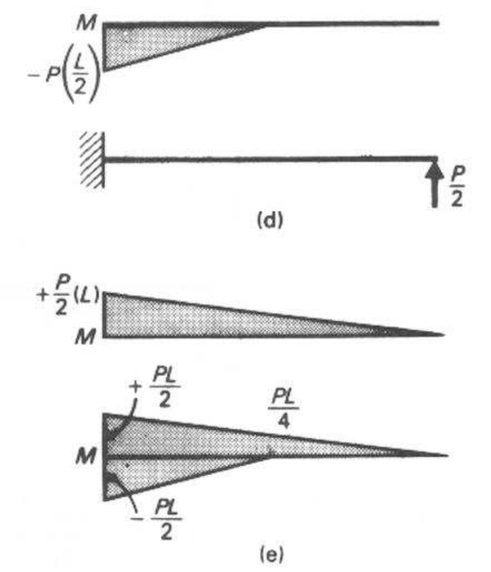
pués en forma combinada en la Fig. 7.25 (e). Las ordenadas del diagrama compuesto de la Fig. 7.25 (f) son exactamente iguales a la suma de las ordenadas indicadas en la Fig. 7.25 (e). ■



Una vez que se ha comprendido y dominado el concepto de considerar un punto "empotrado" y trazar los diagramas de momentos para cada carga individual, el procedimiento para trazar diagramas de momentos por partes se vuelve relativamente fácil. Por supuesto, el efecto neto es igual al del diagrama compuesto, pero esta técnica nos capacita para usar el método del área de momentos mucho más eficientemente al resolver problemas laboriosos.

Unas cuantas observaciones útiles, que se dan a continuación, facilitarán la construcción de estos diagramas.

1. Generalmente resulta útil escoger como el punto "empotrado" un punto en un apoyo de la viga o en un extremo de una carga uniformemente distribuida.
2. El diagrama para cada carga (incluyendo las reacciones) se traza individualmente.
3. Las cargas hacia abajo producen áreas negativas, mientras que las cargas hacia arriba producen áreas positivas.
4. Un área triangular comienza en cada carga concentrada.
5. Un área parabólica comienza al principio de cada carga uniformemente distribuida.
6. Las reacciones, por ser conocidas, se tratan como cualquier otra carga que actúe sobre la viga.
7. Para el caso de dos o tres cargas, puede ser conveniente mostrar todos los diagramas en un solo esquema, como en la Fig. 7.25 (e). Para más de tres cargas es aconsejable trazar un diagrama individual para cada carga.



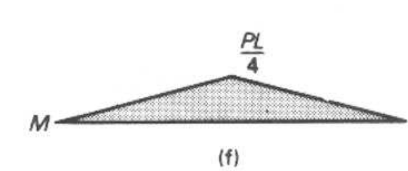


FIGURA 7.25

Con objeto de ilustrar mejor este procedimiento se incluyen los ejemplos 7.17 y 7.18. La posición del extremo "empotrado" llamada la *sección de referencia o punto de referencia* se muestra en los esquemas respectivos. Como una simplificación posterior, se muestran los diagramas de momentos en la misma figura, junto con la carga. El diagrama compuesto corresponde a la figura final. Se sugiere al lector comprobar por sí mismo que en todos estos casos, la suma algebraica de las ordenadas de los diagramas de momentos por partes es igual a la ordenada de los diagramas compuestos.

EJEMPLO 7.17 Trazar el diagrama de momentos, por partes, para la viga indicada en la Fig. 7.26. Escoger como sección de referencia,

a) La reacción izquierda, R_A.
b) La reacción derecha, R_C.
c) El comienzo de la carga uniformemente distribuida.

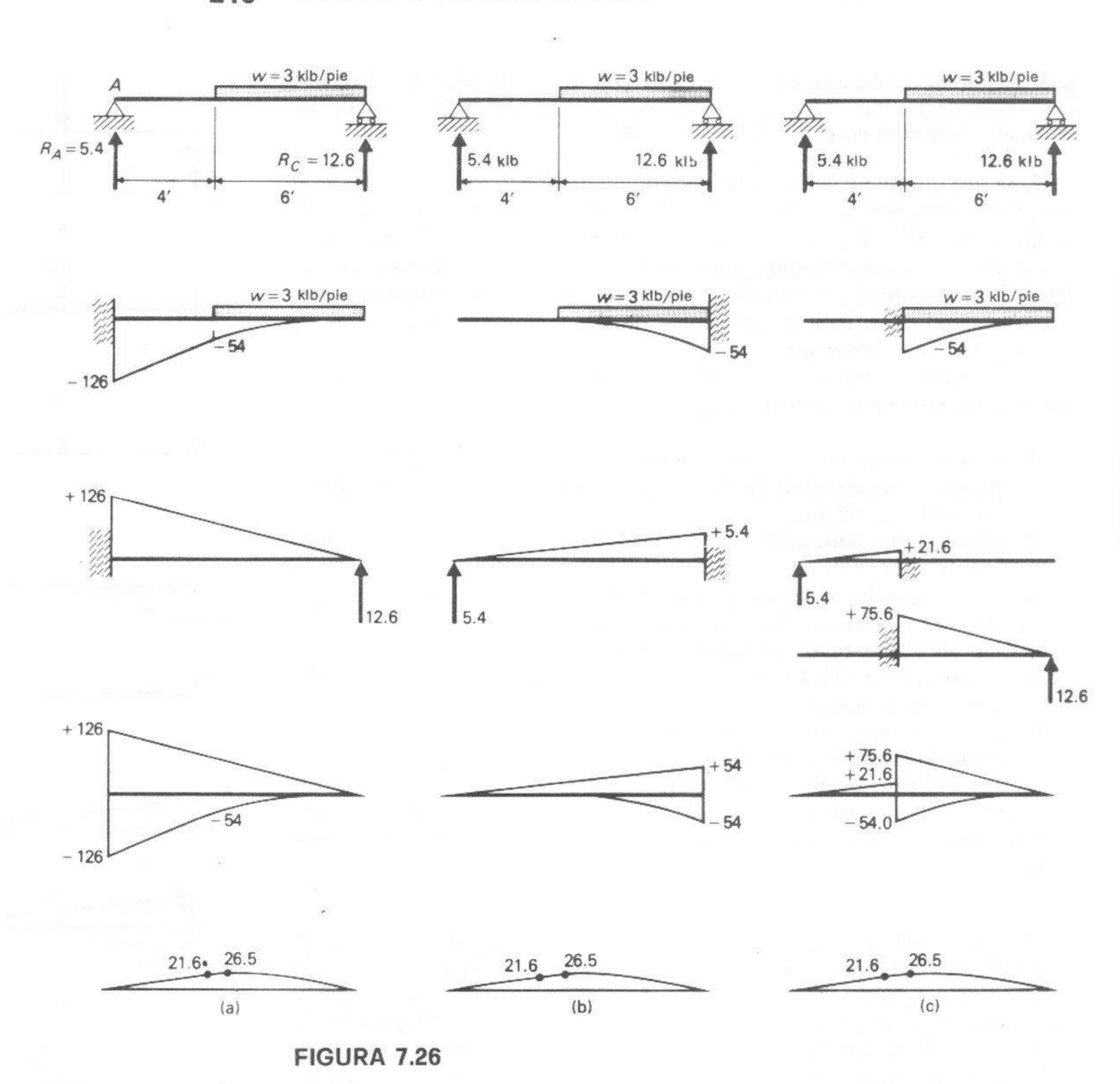


FIGURA 7.26

SOLUCION Los tres conjuntos de diagramas se indican en la Fig. 7.26. ■

EJEMPLO 7.18 Trazar el diagrama de momentos, por partes, para la viga indicada en la Fig. 7.27. Escoger como sección de referencia,

a) La reacción izquierda, R_A.
b) La reacción derecha, R_C.

SOLUCION En la Fig. 7.27 se indican los dos conjuntos de diagramas. ■

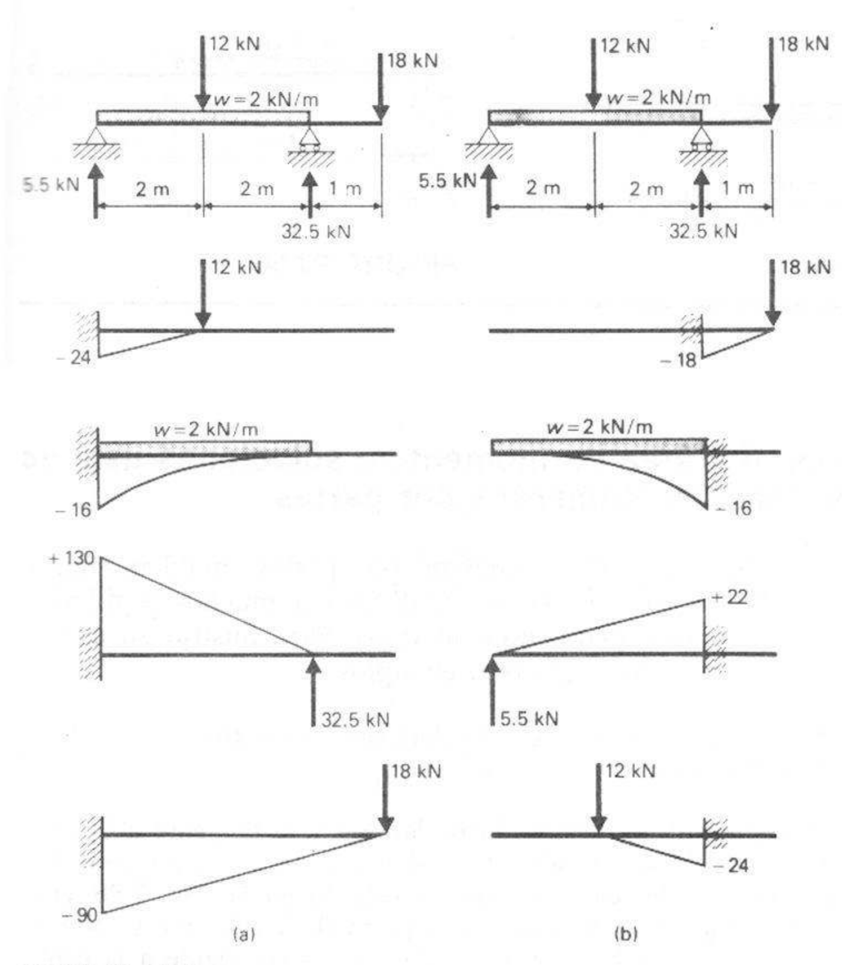


FIGURA 7.27

Problemas

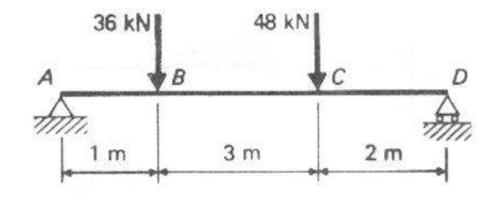


FIGURA P7.53

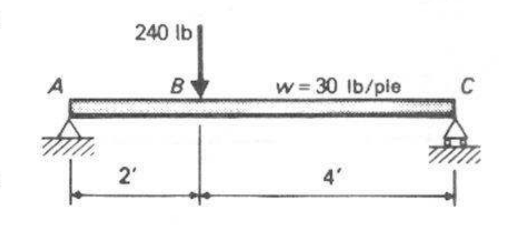


FIGURA P7.54

7.53 Trazar el diagrama de momentos, por partes, para la viga indicada en la Fig. P7.53. Escoger como sección de referencia,

a) La reacción izquierda, R_A. b) La reacción derecha, R_D. c) El punto B.

7.54 Trazar el diagrama de momentos, por partes, para la viga indicada en la Fig. P7.54. Escoger como sección de referencia,

a) La reacción izquierda, R_A. b) La reacción derecha, R_C. c) El punto B.

7.55 Trazar el diagrama de momentos, por partes, para la viga indicada en la Fig. P7.55. Escoger como sección de referencia,

a) El extremo izquierdo, punto A. b) La reacción izquierda, R_B. c) La reacción derecha, R_C.

7.56 Trazar el diagrama de momentos, por partes, para la viga indicada en la Fig. P7.56. Escoger como sección de referencia,

a) La reacción izquierda, R_A. b) La reacción derecha, R_D. c) El punto B.

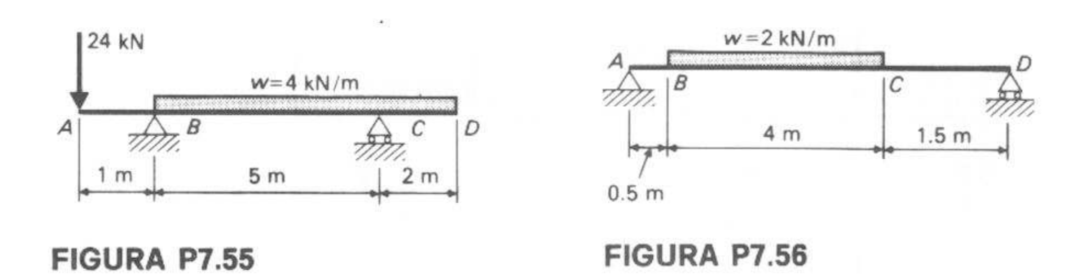
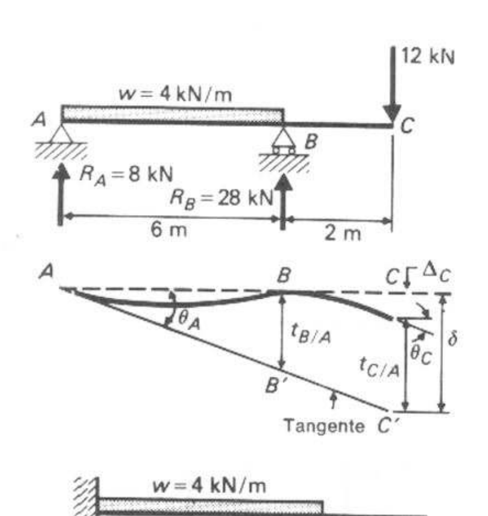


FIGURA P7.55

FIGURA P7.56

7.13 Método del área de momentos; soluciones usando diagramas de momentos por partes

Con la ayuda de diagramas de momentos por partes, pueden simplificarse grandemente los cálculos correspondientes a muchos problemas difíciles sobre deflexiones y pendientes de vigas. Para ilustrar su uso se presentan para su estudio, los siguientes ejemplos.



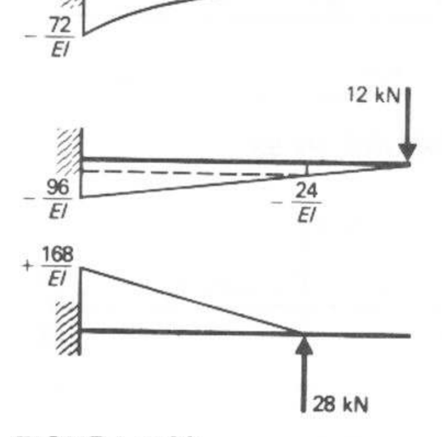
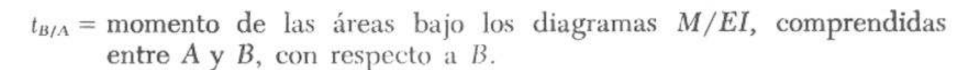


FIGURA 7.28

EJEMPLO 7.19 Halle la pendiente y la deflexión del extremo libre de la viga mostrada en la Fig. 7.28.

SOLUCION Trazamos el eje flexionado de la viga y la tangente a la elástica en A, ya que no es obvia la localización del punto de pendiente cero. De acuerdo con la geometría del eje flexionado, mostrado en la Fig. 7.28 (b), la deflexión requerida Δ_C puede determinarse a partir de la relación $\Delta_C = \delta - t_{C/A}$. Los términos δ y $t_{C/A}$ deben calcularse de manera semejante a la explicada en el ejemplo 7.14.

En este problema, los diagramas de momentos se trazaron por partes, usando como punto de referencia el apoyo izquierdo. El Apéndice E proporciona áreas y distancias centroidales para diversas formas geométricas. Primera calculemos δ:


$t_{B/A}$ = momento de las áreas bajo los diagramas M/EI, comprendidas entre A y B, con respecto a B.

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{72}{EI}\right)(6)\left(\frac{3}{4}\times 6\right) + \left(-\frac{24}{EI}\right)(6)\left(\frac{1}{2}\times 6\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{72}{EI}\right)(6)\left(\frac{2}{3}\times 6\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{168}{EI}\right)(6)\left(\frac{2}{3}\times 6\right)$$

$$= \frac{72}{EI}.$$

Por triángulos semejantes ABB' y ACC',

$$\frac{\delta}{8} = \frac{t_{B/A}}{6}, \qquad \delta = \frac{8}{6}t_{B/A}, \qquad \delta = \frac{96}{EI}.$$

Después calculamos $t_{C/A}$:

$t_{C/A}$ = momento de las áreas bajo los diagramas M/EI, comprendidas entre C y A, con respecto a C.

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{72}{EI}\right)(6)\left(2+\frac{3}{4}\times 6\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{96}{EI}\right)(8)\left(\frac{2}{3}\times 8\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{168}{EI}\right)(6)\left(2+\frac{2}{3}\times 6\right)$$

$$\doteq +\frac{40}{EI}.$$

La deflexión Δ_C, requerida es, entonces

$$\Delta_C = \delta - t_{C/A} = \frac{96}{EI} - \frac{40}{EI}$$

$$= \frac{56}{EI} \text{ (hacia abajo)}.$$

La pendiente en A puede determinarse a partir de la geometría de la curva elástica, y después puede calcularse θ_C a partir del primer teorema del área de momentos. Así

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{6} = \frac{72/EI}{6} = \frac{12}{EI}$$

$$\theta_A - \theta_C = \frac{1}{3}\left(-\frac{72}{EI}\right)(6) + \frac{1}{2}\left(-\frac{96}{EI}\right)(8) + \frac{1}{2}\left(\frac{168}{EI}\right)(6)$$

$$= -\frac{144}{EI} - \frac{384}{EI} + \frac{504}{EI} = -\frac{24}{EI} \text{ (sentido de las manecillas)}$$

$$\theta_C = \frac{24}{EI} + \frac{12}{EI}, \qquad \theta_C = \frac{36}{EI} \text{ (sentido de las manecillas)}$$ ■

EJEMPLO 7.20 Determine la deflexión máxima de la viga mostrada en la Fig. 7.29.

SOLUCION Como la deflexión máxima ocurrirá donde la pendiente es cero, se debe determinar primero ese punto. Para hacer esto, calculamos θ_A, y aplicamos el primer teorema del área de momentos.

Se traza la tangente a la elástica en el apoyo A, y se construye el diagrama de momentos por partes tomando como punto de referencia a B. Calculamos θ_A como sigue:

$t_{B/A}$ = momento de todas las áreas comprendidas entre A y B, con respeto a B:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{72}{EI}\right)(12)\left(\frac{1}{3}\times 12\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{54}{EI}\right)(9)\left(\frac{1}{3}\times 9\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{18}{EI}\right)(6)\left(\frac{1}{4}\times 6\right)$$

$$= +\frac{945}{EI},$$

y

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{945EI}{12}, \qquad \theta_A = \frac{78.75}{EI}.$$

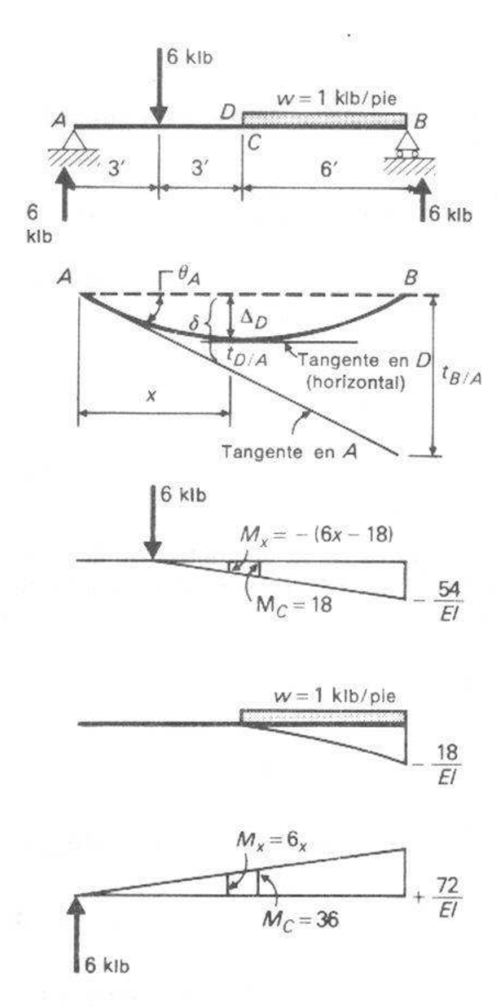


FIGURA 7.29

Para determinar si el punto D, de pendiente cero, queda comprendido en la porción AC, calculamos el área bajo los diagramas M/EI para los 6 pies a partir de A hacia C. Si el área es mayor de $78.75/EI$, x será menor de 6 pies. Sin embargo, si el área comprendida entre A y C es menor de $78.75/EI$, x quedará dentro de la zona de la carga uniformemente distribuida. Encontramos que:

$$\text{área entre } A \text{ y } C = \frac{1}{2}\left(-\frac{18}{EI}\right)(3) + \frac{1}{2}\left(\frac{36}{EI}\right)(6) = \frac{81}{EI}.$$

Por consiguiente, el punto D, de pendiente cero, queda entre A y C.

Aplicando el primer teorema del área de momentos, obtenemos:

$$\theta_A - \theta_D = \frac{1}{2}\left(\frac{6x}{EI}\right)(x) + \frac{1}{2}\left[-\frac{(6x-18)}{EI}\right](x-3)$$

$$\frac{78.75}{EI} - 0 = \frac{3x^2}{EI} + \left(\frac{-3x^2 + 18x - 27}{EI}\right)$$

$$78.75 = 18x - 27, \qquad x = 5.9 \text{ pies.}$$

Como se conoce la localización de la deflexión máxima, calculamos la deflexión mediante los procedimientos normales, usando el segundo teorma del área de momentos:

$$\Delta_D = \delta - t_{D/A}.$$

Calculamos δ,

$$\delta = \frac{5.9}{12} t_{B/A} = \frac{5.9}{12}\left(\frac{945}{EI}\right), \qquad \delta = \frac{465}{EI}.$$

Enseguida,

$t_{D/A}$ = momento de todas las áreas comprendidas entre A y D, con respecto a D

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{35.4}{EI}\right)(5.9)\left(\frac{1}{3}\times 5.9\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{17.4}{EI}\right)(2.9)\left(\frac{1}{3}\times 2.9\right)$$

$$= \frac{171}{EI},$$

y

$$\Delta_D = \frac{465}{EI} - \frac{171}{EI}, \qquad \Delta_D = \frac{294}{EI}. \quad \blacksquare$$

Problemas

7.57 Calcular la pendiente y la deflexión en los puntos B y D de la viga indicada en la Fig. P7.57.

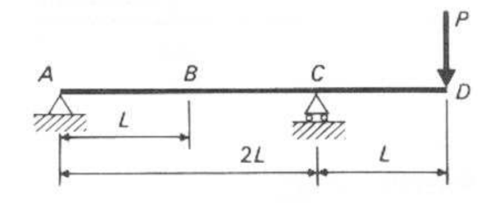


FIGURA P7.57

7.58 Una barra de acero de 60 mm × 12 mm y 1 m de longitud está apoyada en sus extremos y se flexiona con respecto a su eje de mínima resistencia (la dimensión de 12 mm es vertical). Determinar la deflexión máxima de la barra, debida a su propio peso. El peso específico del acero es de 76.98 kN/m^3.

7.59 Determinar la pendiente en los extremos, y la deflexión en el centro de la viga indicada en la Fig. P7.59.

7.60 Determinar la pendiente y la deflexión en el punto B y en el centro de la viga indicada en la Fig. P7.60.

7.61 Determinar la pendiente en los apoyos y la deflexión en el centro de la viga indicada en la Fig. P7.61.

7.62 Determinar la pendiente en los apoyos y la deflexión en el centro de la viga indicada en la Fig. P7.62.

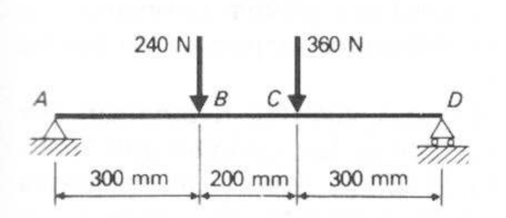


FIGURA P7.59

FIGURA P7.60

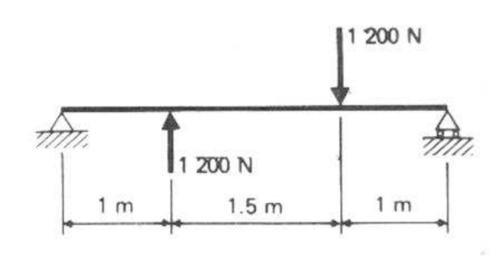


FIGURA P7.61

7.63 Determinar la pendiente y la deflexión del extremo libre A y del centro C de la viga indicada en la Fig. P7.63.
7.64 Determinar la deflexión, en mm, en el centro de la viga indicada en la Fig. P7.64. $I = 2 \times 10^{-6}$ m⁴.
7.65-7.68 Calcular la deflexión máxima de las vigas indicadas en las Figs. P7.65 a P7.68.

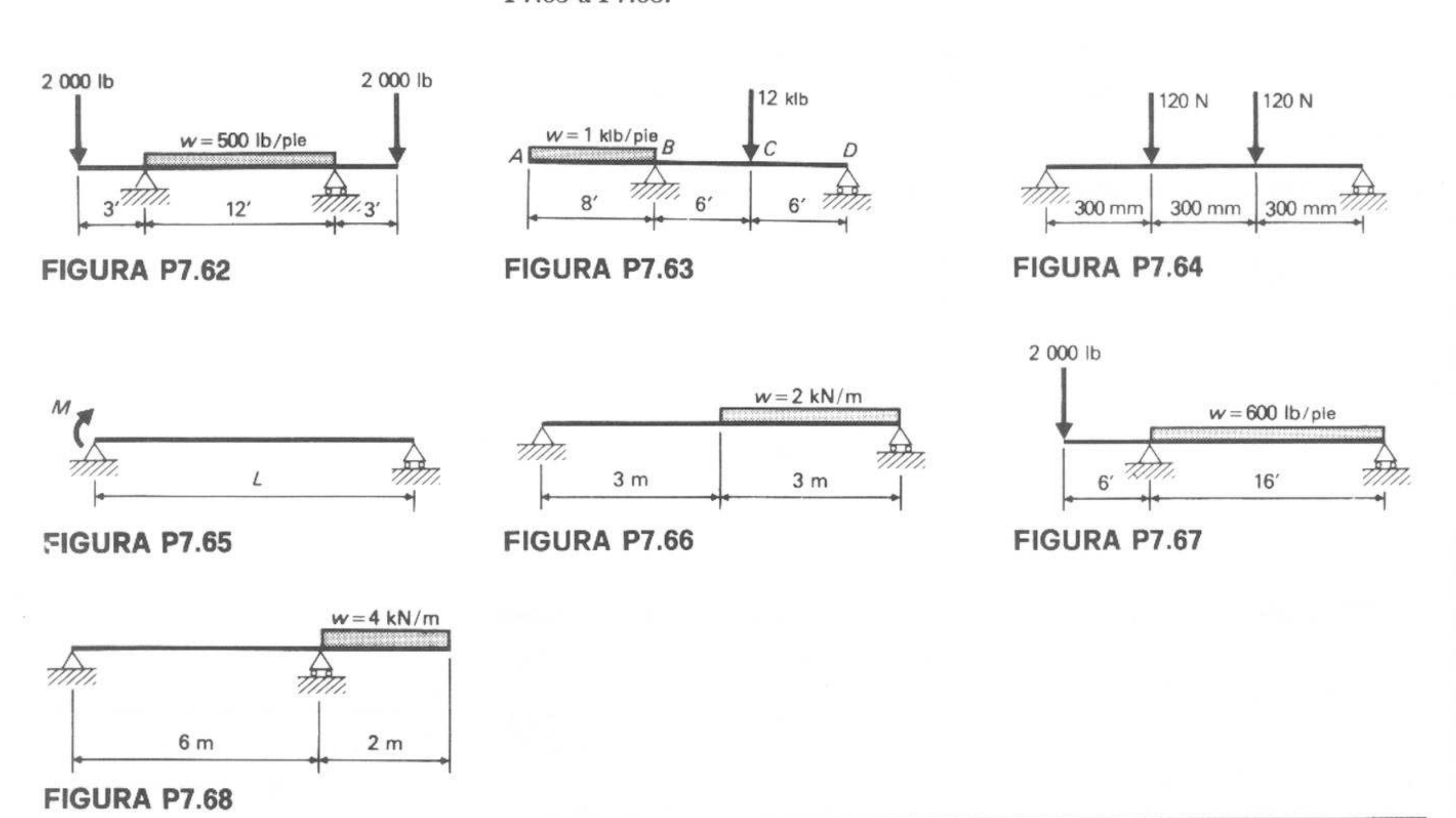


FIGURA P7.62

FIGURA P7.63

FIGURA P7.64

FIGURA P7.65

FIGURA P7.66

FIGURA P7.67

FIGURA P7.68

7.14 Vigas con *EI* Variable

Ocasionalmente se construyen vigas en las cuales el momento de inercia no es constante a lo largo de todo el claro. Los ejes cónicos quedan dentro de esta categoría, así como también los ejes con manguitos en una parte de su longitud. Las vigas estructurales pueden reforzarse con cubreplacas, obteniéndose una viga con diferentes momentos de inercia en varias secciones.

Las pendientes y las deflexiones de estas vigas se determinan por medio de los teoremas del área de momentos de las secciones anteriores. La única diferencia es que el diagrama M/EI no tiene la misma forma que el diagrama de momentos, debido a los momentos de inercia variables. En la Fig. 7.30 se muestran momentos de inercia variables, junto con

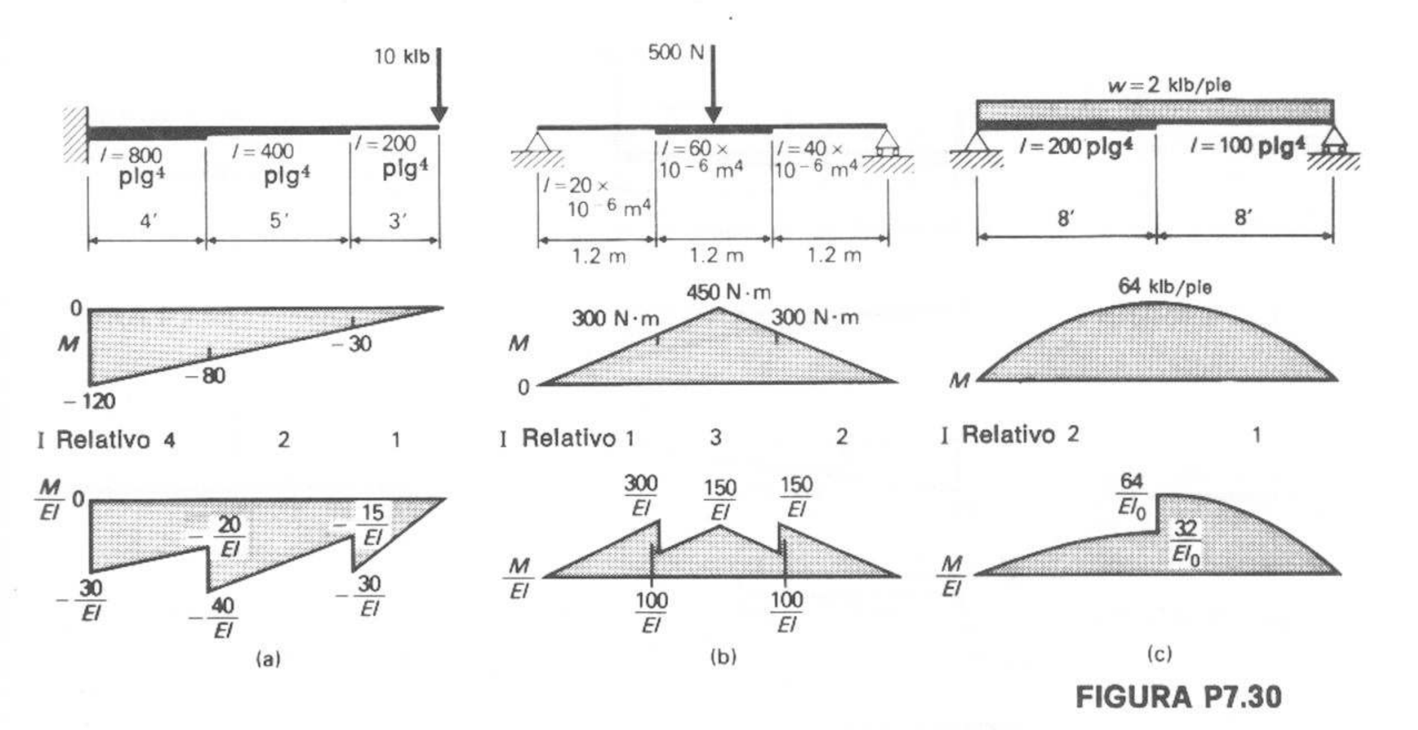


FIGURA P7.30

los diagramas correspondientes de momentos y los diagramas M/EI para varias vigas.

Deberá notarse que los diagramas de M/EI se dibujan usando los momentos de inercia relativos, en vez de los valores reales de éstos, para comodidad del cálculo. Obtenemos el I relativo expresando todos los momentos de inercia en términos del menor valor. Por ejemplo, en la Fig. 7.30 (a), los momentos de inercia de las secciones son 200 plg^4, 400 plg^4 y 800 plg^4. Los I relativos son 1, 2 y 4, respectivamente.

Si se pide la deflexión en pulgadas, o en metros, o la pendiente, en radianes, es más conveniente usar los valores numéricos de E e I cuando se lleva a cabo el último paso de los cálculos. El ejemplo 7.21 ilustra el método para resolver una viga de momentos de inercia variable.

EJEMPLO 7.21 Calcular la deflexión, en milímetros, y la pendiente, en radianes, del extremo libre de la viga indicada en la Fig. 7.31. Aquí E = 200 GPa.

SOLUCION Se traza la tangente a la curva elástica en A. Usando el segundo teorema del área de momentos con las áreas bajo el diagrama M/EI de la Fig. 7.31 (d), obtenemos la deflexión Δ_B:

$$\Delta_B = \frac{1}{2}\left(-\frac{60}{EI_1}\right)(1)\left(\frac{2}{3}\times 1\right) + \left(-\frac{30}{EI_1}\right)(2)\left(1+\frac{1}{2}\times 2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{60}{EI_1}\right)(2)\left(1+\frac{2}{3}\times 2\right)$$

$$= -\frac{280}{EI_1}.$$

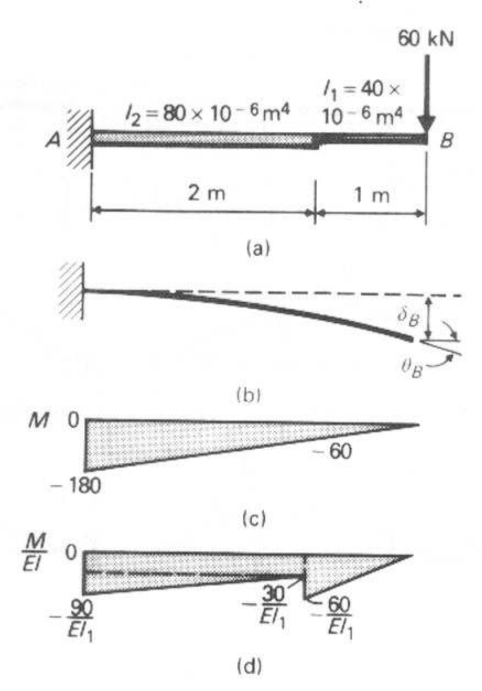


FIGURA 7.31

El valor, en milímetros, es

$$\Delta_B = \frac{(280\ 000)}{(200 \times 10^9)(40 \times 10^{-6})} = 0.035 \text{ m} = 35 \text{ mm}.$$

Se obtiene la pendiente aplicando el primer teorema del área de momentos, teniendo en cuenta que $\theta_A = 0$:

$$\theta_B - \theta_A = \frac{1}{2}\left(-\frac{60}{EI_1}\right)(1) + \left(-\frac{30}{EI_1}\right)(2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{60}{EI_1}\right)(2) = -\frac{150}{EI_1}.$$

Por consiguiente, el valor en radianes, es

$$\theta_B = \frac{(150\ 000)}{(200 \times 10^9)(40 \times 10^{-6})}$$

$$\theta_B = 0.0188 \text{ rad.} \quad ■$$

Problemas

7.69-7.71 Calcular la pendiente, en radianes, y la deflexión en plg o mm, en los extremos libres de las vigas indicadas en las Figs. P7.69 a P7.71.

7.72-7.74 Calcular la pendiente, en radianes, en los apoyos, y la deflexión en plg o mm, en el centro de las vigas indicadas en las Figs. P7.72 a P7.74. Aquí $E = 30\ 000\ 000$ lb/plg^2 = 200 GPa.

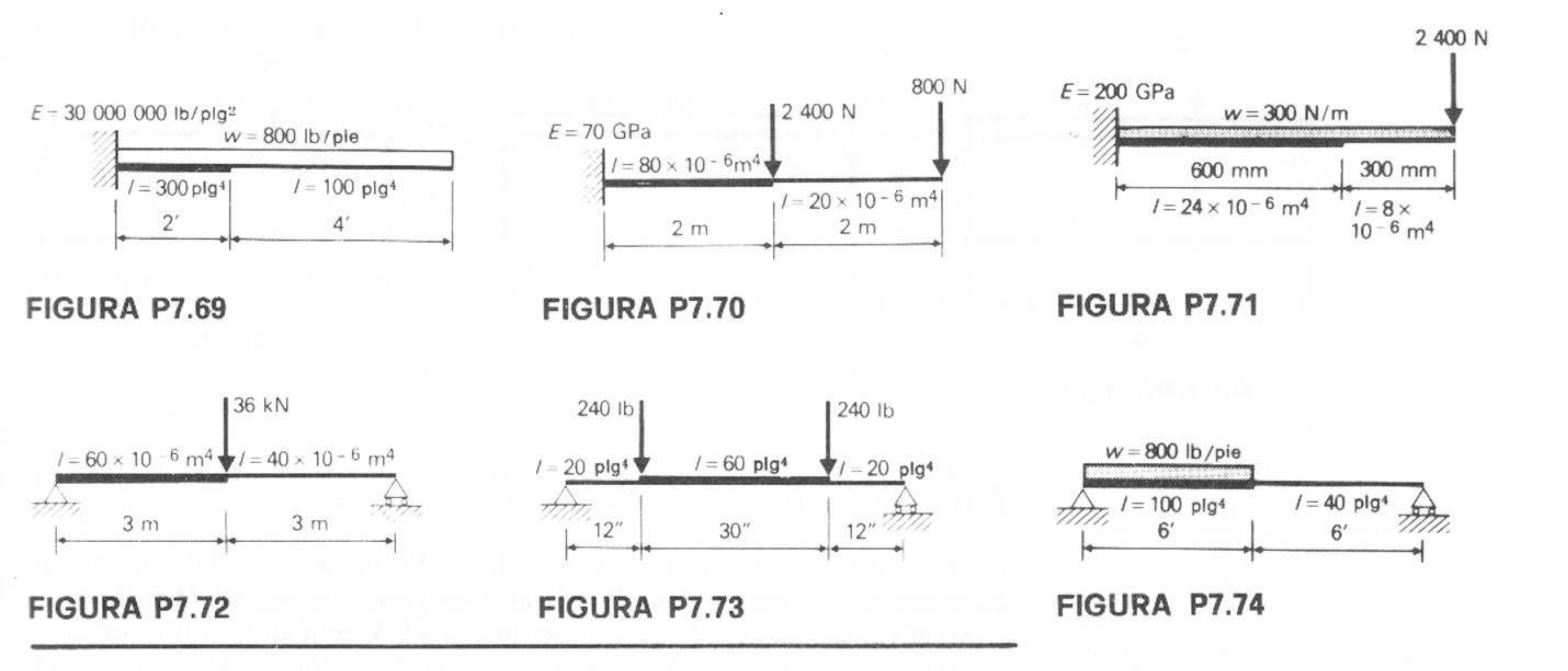


FIGURA P7.69

FIGURA P7.70

FIGURA P7.71

FIGURA P7.72

FIGURA P7.73

FIGURA P7.74

Superposición SECCION C

En la práctica de la ingeniería, se usa a menudo el principio de superposición en la solución de problemas. Cuando tenemos un miembro que está sujeto a un sistema de carga completo que involucra un cierto número de fuerzas de diferentes tipos, podemos determinar el efecto de cada fuerza del sistema sobre el miembro separadamente. Después, los resultados de cada una de ellas se combinan para obtener la solución del problema complejo. Por ejemplo, la Fig. 7.32 (a) indica una viga libremente apoyada soportando una carga uniformemente distribuida, w, y una carga concentrada, P. El principio de superposición nos permite analizar separadamente los efectos de las dos cargas de la Fig. 7.32 (b) y (c), y después combinar los resultados para obtener la solución.

El principio de superposición es fácil de entender y aplicar. Uno necesita solamente asegurarse que sea válido combinar los resultados. Uno podría calcular los momentos flexionantes en el centro de las vigas de la Fig. 7.32 (b) y (c) y sumarlos para obtener el momento flexionante en el centro de la viga de la Fig. 7.32 (a). Los resultados no tienen límite en cuanto a la combinación.

Por otro lado, supongamos que calculamos los esfuerzos de flexión en el centro de la viga de la Fig. 7.32 (b) y (c). Podemos sumar los esfuerzos, en tanto que su suma no exceda el límite de proporcionalidad del material. Si los resultados combinados no son lineales, la superposición no es válida. La Sección C describe métodos mediante los cuales pueden obtenerse pendientes y deflexiones de vigas, por superposición. Supóngase que la superposición es válida en todos los casos.

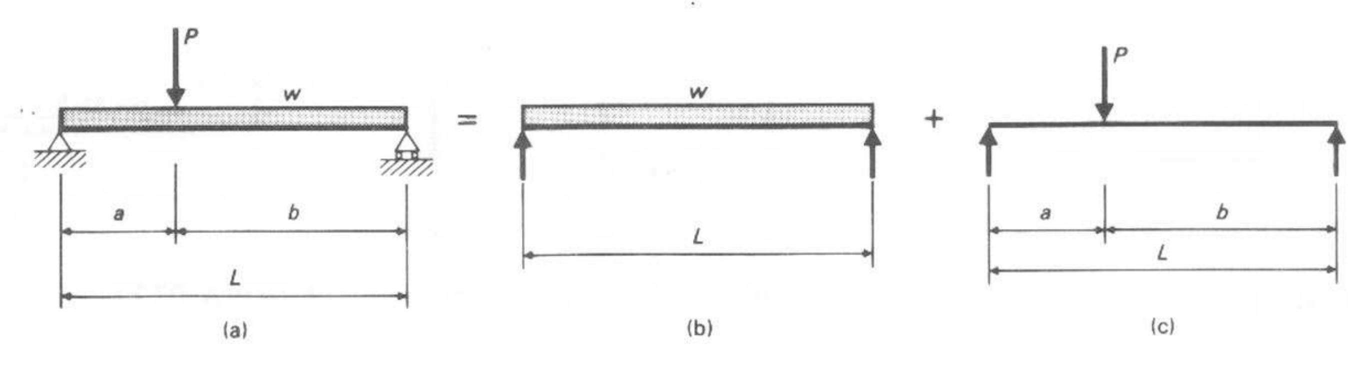


FIGURA 7.32

7.15 Fórmulas estándar

La mayoría de los manuales prácticos de ingeniería, tales como el *Mechanical Engineers' Handbook*, el *Electrical Engineers' Handbook*, y el *Steel Construction Manual*, editado por el American Institute of Steel Construction, para nombrar unos cuantos, incluyen cierto número de diagramas de vigas cargadas, junto con sus fórmulas para calcular las pendientes y las deflexiones de la curva elástica. Algunas de las condiciones de carga más comunes y las fórmulas correspondientes están dadas en el Apéndice *D* de este libro de texto. Por supuesto, es imposible mostrar todas las combinaciones de apoyos y cargas en vigas. Las fórmulas estándar cubren solamente las condiciones más comunes.

Estas fórmulas se deducen, en términos generales, mediante los métodos usuales del área de momentos o de la doble integración presentados en este capítulo. Como una ilustración de una deducción mediante el método del área de momentos, nos referimos al ejemplo 7.9, que estipula la deflexión máxima de una viga en voladizo sujeta a una carga concentrada en el extremo libre con un valor de $\Delta = PL^3/3EI$. Este es el caso 7 del Apéndice *D*. Pueden deducirse otras fórmulas de una manera semejante por este método o por el método de la doble integración. Muchos de estos casos estándar se han incorporado en este libro de texto como ejemplos ilustrativos o como problemas de tarea.

Debe tenerse extremo cuidado al usar las fórmulas estándar, de comprobar si las condiciones de carga del problema corresponden exactamente a las del caso estándar. Esto es particularmente importante en la selección del origen del sistema de coordenadas para medir las distancias x dadas en las fórmulas. Dos fórmulas para la misma viga y condiciones de carga, tomadas de dos referencias distintas pueden parecer diferentes debido a que el origen se eligió en lugares diferentes. Es extremadamente importante saber a partir de qué punto se mide la x en las fórmulas. En las fórmulas del Apéndice *D* de este libro, el origen está en el extremo izquierdo de la viga. Sin embargo, esta convención no es estándar. Las respuestas tendrán un error considerable si no se aplican las fórmulas correctamente.

7.16 Procedimiento de superposición

El procedimiento general para aplicar el método de superposición es directo. Debemos separar la viga dada y las condiciones de carga de tal manera que las condiciones iniciales resulten equivalentes a un cierto número de condiciones estándar para las cuales disponemos de fórmulas para la pendiente y la deflexión. Entonces podemos combinar los resultados para dar el efecto de la carga original que actúa sobre la viga. Frecuentemente se requiere cierta habilidad, pero el procedimiento es relativamente directo.

Los ejemplos siguientes ilustran este procedimiento. En todos los casos las respuestas se dejan en términos de EI.

EJEMPLO 7.22 Determinar las pendientes en los extremos y la deflexión en el centro de la viga mostrada en la Fig. 7.33.

SOLUCION Según el caso 2, del Apéndice D, las pendientes son:

$$\theta_A = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{(8)(6)(10^2 - 6^2)}{6(10)EI}$$

$$\theta_A = \frac{51.2}{EI};$$

FIGURA 7.33

y

$$\theta_B = \frac{Pab(2L - b)}{6LEI} = \frac{(8)(4)(6)(2 \times 10 - 6)}{6(10)EI}$$

$$\theta_B = \frac{44.8}{EI}.$$

La deflexión es:

$$\Delta_{\text{línea central}} = \frac{Pb}{6LEI}\left[\frac{L}{b}(x-a)^3 + (L^2 - b^2)x - (x)^3\right]$$

$$= \frac{8(6)}{6(10)EI}\left[\frac{10}{6}(5-4)^3 + (10^2 - 6^2)5 - (5)^3\right]$$

$$= \frac{157.4}{EI}. \quad ■$$

EJEMPLO 7.23 Determinar las pendientes en A y B y la deflexión en el punto medio entre los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 7.34.

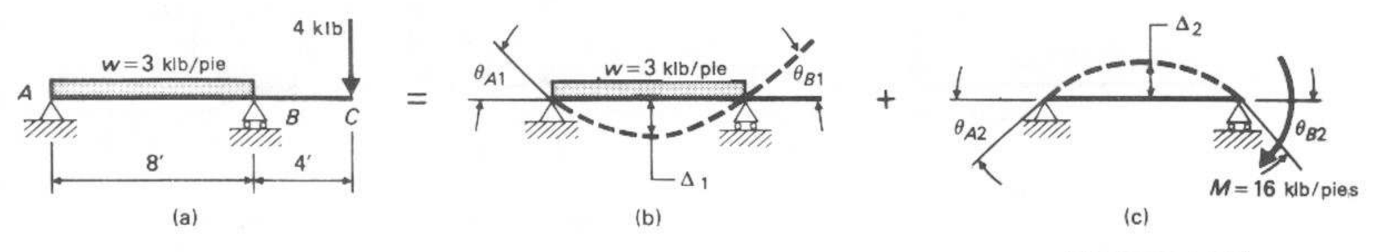


FIGURA 7.34

SOLUCION Como se muestra en la Fig. 7.34, este problema puede resolverse usando los casos 4 y 6 del Apéndice *D*. Hallamos:

$$\theta_A = \theta_{A1}\ (\text{Caso } 4) - \theta_{A2}\ (\text{Caso } 6)$$

$$= \frac{wL^3}{24EI} - \frac{ML}{6EI} = \frac{3(8)^3}{24EI} - \frac{16(8)}{6EI}$$

$$= \frac{42.7}{EI};$$

$$\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} = \frac{wL^3}{24EI} - \frac{ML}{3EI} = \frac{3(8)^3}{24EI} - \frac{16(8)}{3EI}$$

$$= \frac{21.3}{EI}.$$

La deflexión es:

$$\Delta_{\text{línea central}} = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{5wL^4}{384EI} - \frac{Mx}{6LEI}(L-x)(2L-x)$$

$$= \frac{5(3)(8)^4}{384EI} - \frac{16(4)}{6(8)EI}(8-4)(2\times 8-4)$$

$$\Delta_{\text{línea central}} = \frac{96}{EI}.$$

EJEMPLO 7.24 Determine la pendiente y la deflexión del extremo libre *C* de la viga del ejemplo 7.23 (Fig. 7.35).

SOLUCION Utilizando el valor de θ_B obtenido en el ejemplo 7.23, hallamos la pendiente y la deflexión en el extremo libre aplicando el Caso 7, como se muestra en la Fig. 7.35. Considerando la Fig. (b) obtenemos:

$$\theta_{C1} = \theta_B = \frac{21.3}{EI},$$

según el ejemplo 7.23. A partir del caso 7: (Fig. 7.35)

$$\theta_{C2} = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{4(4)^2}{2EI} = \frac{32}{EI},$$

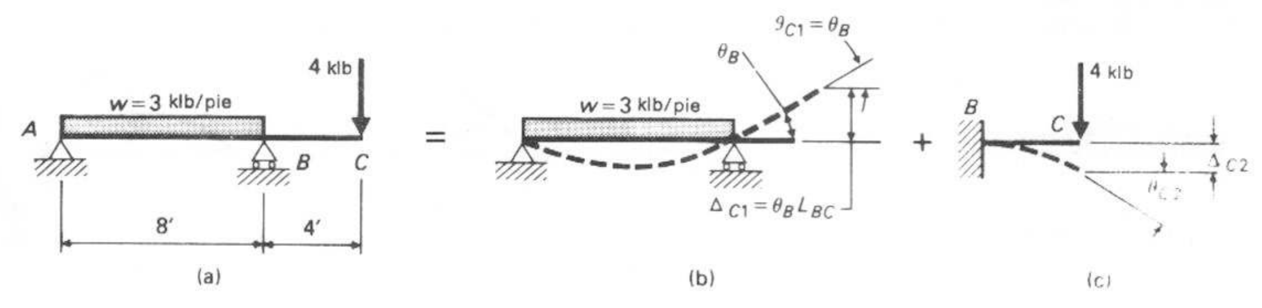


FIGURA 7.35

puede escribirse:

$$\theta_C = \theta_{C1} - \theta_{C2} = \frac{21.3}{EI} - \frac{32}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{10.7}{EI} \quad \text{(sentido del giro de las manecillas del reloj);}$$

$$\Delta_{C1} = \theta_B \times L_{BC} = \frac{21.3}{EI}(4) = \frac{85.2}{EI}$$

$$\Delta_{C2} = \frac{PL^3}{3EI}\text{(Caso 7)} = \frac{4(4)^3}{3EI} = \frac{85.3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta_{C1} - \Delta_{C2} = \frac{85.2}{EI} - \frac{85.3}{EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{0.1}{EI} \quad \text{(hacia abajo)}. \blacksquare$$

Problemas

Todos los problemas de esta sección pueden resolverse por combinación de uno o más de los casos indicados en el Apéndice *D*. Resolver los problemas enlistados, por superposición.

7.75 Ejemplo 7.11.
7.76 Ejemplo 7.19.
7.77 Ejemplo 7.31.
7.78 Ejemplo 7.32.
7.79 Ejemplo 7.39.
7.80 Ejemplo 7.40.
7.81 Ejemplo 7.51.
7.82 Ejemplo 7.61.
7.83 Ejemplo 7.62.
7.84 Ejemplo 7.63.

Métodos de los pesos elásticos SECCION D

El método del área de momentos es muy útil y fácil de aplicar cuando se quiere determinar pendientes y deflexiones de vigas en voladizo. Sin embargo, en el caso de vigas simplemente apoyadas, este método requiere cierta habilidad con las relaciones geométricas.

El método de los pesos elásticos que es otro procedimiento para calcular pendientes y deflexiones en vigas simplemente apoyadas, no requiere tanta geometría. Este método, que fue publicado por Otto Mohr en 1868, es completamente semejante al método del área de momentos desarrollado por Carlos E. Greene en 1873. Para vigas simplemente apoyadas, el método de los pesos elásticos da la misma solución que el procedimiento de la vida conjugada que se estudia frecuentemente en cursos de estructuras estáticamente indeterminadas. Una combinación de los métodos del peso elástico y del área de momentos proporciona una solución eficaz para calcular pendientes y deflexiones de vigas con extremos en voladizo.

7.17 Principios del método de los pesos elásticos

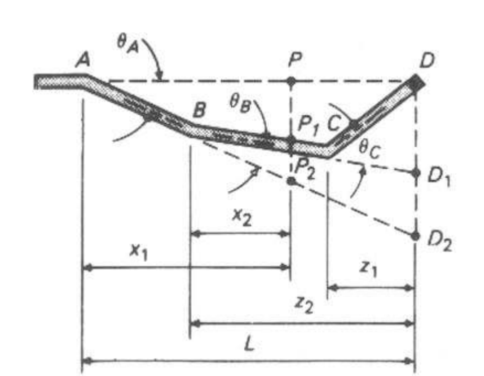


FIGURA 7.36

Considérese una viga originalmente recta que se rompe en los puntos A, B, C, y D, y después se suelda rígidamente en conjunto como se muestra en la Fig. 7.36. Las secciones de la viga son completamente rectas entre los puntos donde se hicieron las rupturas, y los ángulos involucrados son muy pequeños. Es decir, son tan pequeños, que sen $\theta \approx$ tan $\theta \approx \theta$ en radianes.

A partir de la Fig. 7.36, $\Delta P = PP_1 = PP_2 - P_1P_2$. Expresando esto en términos de los ángulos y las distancias a partir de los vértices, tenemos:

$$\Delta_P = PP_2 - P_1P_2 = \theta_A x_1 - \theta_B x_2. \tag{a}$$

El ángulo θ_A es:

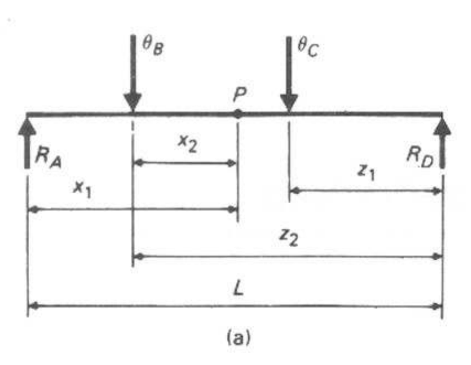
$$\theta_A = \frac{DD_1 + D_1D_2}{L} = \frac{\theta_C z_1 + \theta_B z_2}{L}. \tag{b}$$

Sustituyendo la ec. (b) para θ_A en la ec. (a) tenemos:

$$\Delta_P = \frac{\theta_C z_1 + \theta_B z_2}{L} x_1 - \theta_B x_2. \tag{c}$$

Una expresión final que será de interés es la de la pendiente en P:

$$\theta_P = \theta_A - \theta_B$$
$$= \frac{\theta_C z_1 + \theta_B z_2}{L} - \theta_B. \tag{d}$$



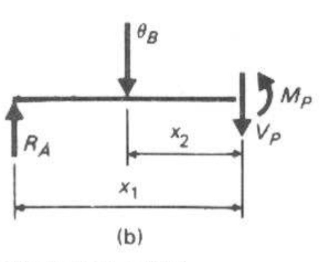


FIGURA 7.37

Por el momento, ignoremos las relaciones geométricas desarrolladas anteriormente y consideremos una viga simplemente apoyada y cargada con las fuerzas θ_B y θ_C, como se muestra en la Fig. 7.37. Calculemos la reacción de esta viga en A, tomando momentos con respecto a R_D:

$$\sum M_D = 0: \qquad R_A = \frac{\theta_C z_1 + \theta_B z_2}{L}. \tag{e}$$

El momento flexionante en P, producido por las cargas θ_B y θ_C, se calcula usando el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.37 (b). Así,

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M_P = R_A x_1 - \theta_B x_2.$$

Sustituyendo la ec. (e) para R_A, se tiene:

$$M_P = \frac{\theta_C z_1 + \theta_B z_2}{L} x_1 - \theta_B x_2. \tag{f}$$

La fuerza cortante en P también puede calcularse a partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.37 (b). Así:

$$\sum F_Y = 0: \qquad V_P = R_A - \theta_B$$

$$= \frac{\theta_C z_1 + \theta_B z_2}{L} - \theta_B. \tag{g}$$

Puede verse que hay una coincidencia absoluta entre las ecuaciones desarrolladas por medio de la geometría para las variaciones angulares pequeñas, ecs. (c) y (d), y las ecuaciones para la fuerza cortante y el momento, ecs. (f) y (g), obtenidas al cargar una viga simplemente apoyada con los cambios angulares concretados. Estas ecuaciones son la demostración geométrica de los siguientes enunciados generales:

a) Si en una línea originalmente recta se introducen cambios angulares muy pequeños, la desviación de cualquier punto sobre esa línea será igual al momento flexionante en el punto equivalente de una viga ficticia que soporte cargas concentradas que tengan la misma magnitud que los cambios angulares.
b) Si en una línea originalmente recta se introducen cambios angulares muy pequeños, la pendiente de cualquier punto situado sobre esa línea será igual a la fuerza cortante en el punto equivalente de una viga ficticia que soporte cargas concentradas que tengan la misma magnitud que los cambios angulares.

Una viga cargada adopta una forma semejante a la mostrada en la Fig. 7.36, excepto que su curva elástica es una curva continua. La variación angular entre dos puntos cualesquiera es $d\theta = M\ dx/EI$ (ec. 7.3). Sustituyendo las variaciones angulares continuas de una viga real por los cambios angulares concentrados anteriores, podemos volver a escribir los dos enunciados generales como sigue:

1. La *deflexión* de cualquier punto de una viga originalmente recta es igual al *momento* en ese punto de una viga ficticia cargada con el diagrama M/EI de la viga original.
2. La *pendiente* en cualquier punto de una viga originalmente recta es igual al *corte* en ese punto de una viga ficticia cargada con el diagrama M/EI de la viga original.

Estos dos enunciados forman las bases para calcular pendientes y deflexiones por el método de los pesos elásticos. Este método es mucho más fácil de aplicar para vigas simplemente apoyadas, que el método del área de momentos.

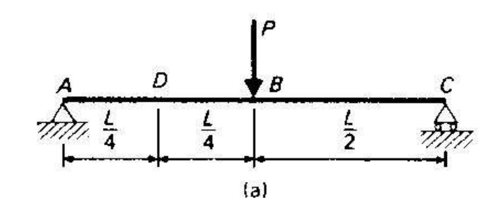
7.18 Uso del método de los pesos elásticos

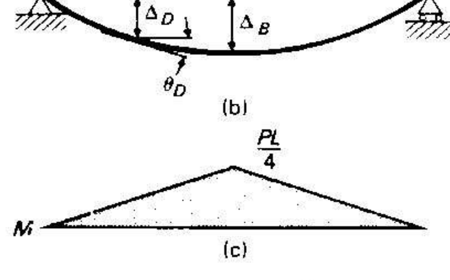
Los pasos para encontrar las pendientes y deflexiones mediante el método de los pesos elásticos son los siguientes:

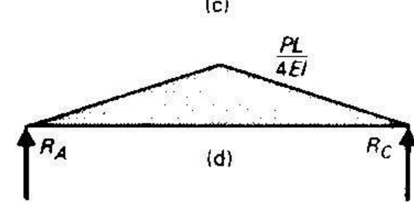
1. Dibújese la viga y las cargas, y bosquéjese la elástica de la viga.
2. Dibújese el diagrama de *fuerza cortante* (si se necesita) y el de momentos, para las cargas aplicadas.
3. Apliquese el diagrama M/EI como una carga a una viga ficticia que tenga el mismo claro y apoyos que la viga original.

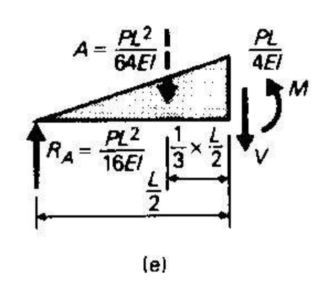
4. Calcule las reacciones de la viga ficticia causadas por la carga M/EI.
5. Recuérdese que la pendiente en cualquier punto sobre la elástica es la fuerza cortante en la viga ficticia con carga igual al diagrama M/EI; la deflexión en cualquier punto sobre la elásticidad es el momento flexionante en la viga ficticia cargada con la M/EI obtenida del diagrama.

EJEMPLO 7.25 Determinar la pendiente y la deflexión de las secciones B y D de la viga mostrada en la Fig. 7.38.









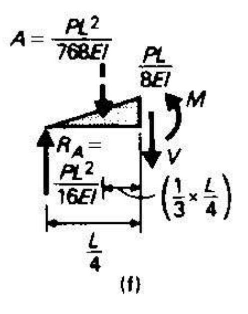


FIGURA 7.38

SOLUCION El diagrama de momentos se muestra en la Fig. 7.38 (c) Las ordenadas de este diagrama se dividen entre EI y se aplican como una carga sobre una viga ficticia, como se muestra en la Fig. 7.38 (d). Por estática:

$$\sum M_C = 0: \qquad R_A = \frac{\frac{1}{2}(PL/4EI)(L)(\frac{1}{2}\times L)}{L}$$

$$R_A = \frac{PL^2}{16EI}.$$

Como la fuerza cortante en el apoyo izquierdo de la viga ficticia es igual a R_A, la pendiente en A es $\theta_A = PL^2/16EI$.

La deflexión en el centro B puede determinarse tomando momentos con respecto a B en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.38 (e):

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = \frac{PL^2}{16EI}\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\times\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{PL^3}{48EI}.$$

La deflexión en el centro es, entonces:

$$\Delta_B = \frac{PL^3}{48EI}.$$

La deflexión en la sección D será igual al momento flexionante en la viga ficticia, en ese punto. A partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.38 (f):

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = \frac{PL^2}{16EI}\left(\frac{L}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\times\frac{L}{4}\right)$$

$$= \frac{11PL^3}{768EI}.$$

Por consiguiente, $\Delta_D = 11PL^3/768EI$.

Por inspección, la pendiente en B es cero, aunque podría calcularse determinando la fuerza cortante en B. Se encuentra la pendiente en D calculando la fuerza cortante en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.38 (f). Así:

$$\sum F_Y = 0: \qquad V = R_A - \text{área} = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)$$

$$= \frac{3PL^2}{64EI}.$$

Por consiguiente, $\theta_D = 3PL^2/64EI$.

Estos resultados pueden compararse con los obtenidos en los ejemplos 7.12 y 7.13. ■

EJEMPLO 7.26 Calcule la deflexión en el centro de la viga mostrada en la Fig. 7.39.

SOLUCION Se aplica el diagrama M/EI como carga a una viga ficticia, como se muestra en la Fig. 7.39 (c). Como la deflexión en B será igual al momento en B en el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.39 (d), la única reacción que debemos calcular aquí (excepto que se quiera hacer una verificación de los cálculos) es R_c. Esto, como sucede en la mayoría de los problemas de este tipo, puede hacerse mejor en forma tabular (véase la Tabla 7.1). Usamos los resultados de la Tabla 7.1 para calcular R_c, así:

$$\sum M_{RA} = 0: \qquad R_C = \frac{2\,389/EI}{16}$$

$$R_C = \frac{149}{EI}.$$

Tabla 7.1

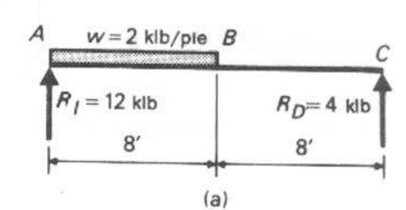
Area	Fuerza	Brazo de Palanca	Momento
1	$\frac{1}{2}\frac{(32)(16)}{EI}$	8 pies	$\frac{2\,048}{EI}$
2	$\frac{\frac{2}{3}[\frac{1}{8}(2)(8)^2]8}{EI}$	4 pies	$\frac{341}{EI}$
			$\sum M_{RA} = \frac{2\,389}{EI}$

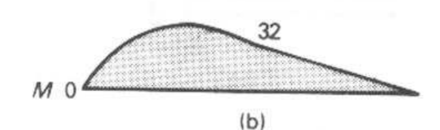
Usando el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 7.39 (d), tenemos

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = \frac{149}{EI}(8) - \frac{1}{2}\left(\frac{32}{EI}\right)(8)(\tfrac{1}{3} \times 8)$$

$$M = \frac{851}{EI}.$$

Por consiguiente, la deflexión en el centro es $\Delta_{\text{línea central}} = 851/EI$. ■





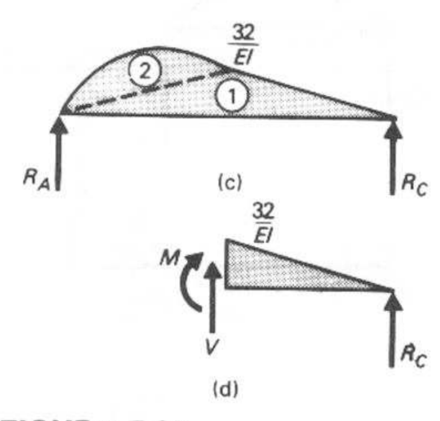
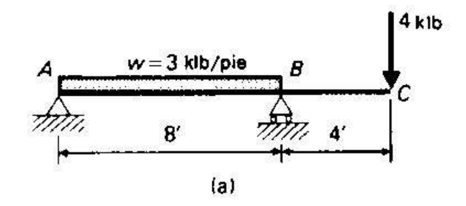


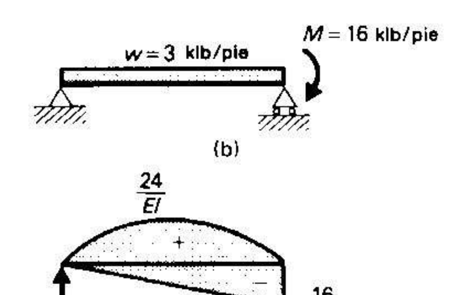
FIGURA 7.39

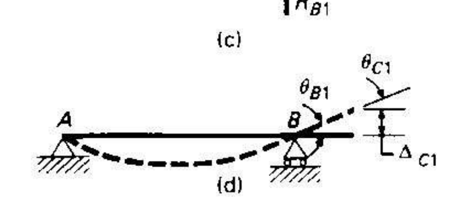
7.19 Combinación de los métodos de los pesos elásticos y del área de momentos

Para vigas simplemente apoyadas, el método de los pesos elásticos es más conveniente que el método del área de momentos. Sin embargo, este

último es muy eficaz para encontrar las pendientes y deflexiones de vigas en voladizo. El combinar ambos métodos proporciona una herramienta útil para el análisis de vigas con extremos en voladizo, como se ilustra en el ejemplo 7.27 (que es igual a los ejemplos 7.23 y 7.24).







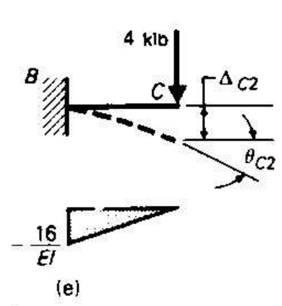


FIGURA 7.40

EJEMPLO 7.27 Determinar la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga mostrada en la Fig. 7.40.

SOLUCION La solución será semejante a la del ejemplo 7.24. Calculamos la pendiente en B por medio del método del peso elástico y después el movimiento en C debido al ángulo θ_{B1}. La diferencia de pendientes y la deflexión entre B y C se determina por medio del método del área de momentos; los resultados se combinan, como se muestra en la Fig. 7.40, para determinar los valores requeridos.

A partir de la Fig. 7.40 (c) encontramos:

$$M_{RA} = 0; \qquad 8R_{B1} = \frac{2}{3}\left(\frac{24}{EI}\right)(8)(\tfrac{1}{2} \times 8) + \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{EI}\right)(8)(\tfrac{2}{3} \times 8)$$

$$R_{B1} = \theta_{B1} = \frac{21.3}{EI}$$

$$\theta_{C1} = \theta_{B1} = \frac{21.3}{EI}$$

$$\Delta_{C1} = \theta_B L_{BC} = \frac{21.3}{EI}(4) = \frac{85.2}{EI}.$$

A partir de la Fig. 7.40 (e) obtenemos:

$$\theta_{C2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{EI}\right)(4) = -\frac{32}{EI}$$

$$\Delta_{C2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{EI}\right)(4)(\tfrac{2}{3} \times 4) = \frac{85.3}{EI}.$$

La pendiente y deflexión finales se determinan combinando los resultados parciales:

$$\theta_C = \theta_{C1} - \theta_{C2} = \frac{21.3}{EI} - \frac{32}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{10.7}{EI} \text{ (en el sentido del reloj).}$$

$$\Delta_C = \Delta_{C1} - \Delta_{C2} = \frac{85.2}{EI} - \frac{85.3}{EI}$$

$$= \frac{0.1}{EI} \text{ (hacia abajo).} \blacksquare$$

Problemas

Usar el método de los pesos elásticos para resolver los problemas siguientes:

7.85 Problema 7.41.
7.86 Problema 7.42.
7.87 Problema 7.43.
7.88 Problema 7.44.
7.89 Problema 7.49.
7.90 Problema 7.47.
7.91 Problema 7.57.
7.92 Problema 7.60.
7.93 Problema 7.62.
7.94 Problema 7.63.

8

Vigas estáticamente indeterminadas

8.1 Introducción

Todas las vigas que hemos considerado hasta ahora han sido estáticamente determinadas. Es decir, todas las reacciones de la viga pueden determinarse mediante las leyes de la estática solamente. Por ejemplo, podemos calcular las reacciones de las vigas mostradas en las Figs. 8.1 (a) y 8.2 (a) aplicando: ($\Sigma F_X = 0$, $\Sigma F_Y = 0$, y $\Sigma M = 0$) al diagrama de cuerpo libre de la viga.

Muchas veces, en el diseño de vigas es deseable o necesario usar apoyos adicionales para la viga, tales como los mostrados en las Figs. 8.1 y 8.2 (b), (c), y (d). Estos apoyos adicionales hacen más rígida la viga y reducen los momentos máximos, permitiendo así un diseño más económico.

Para trazar los diagramas de momentos y de fuerzas cortantes necesarios para el diseño de una viga, primero debemos calcular las reacciones. Un análisis breve indicará que las reacciones de las vigas de las Figs. 8.1 y 8.2 (b), (c) y (d) no pueden calcularse mediante los procedimientos normales de la estática. Cuando hay más componentes reactivas que ecuaciones disponibles, las ecuaciones de la estática ($\Sigma F_X = 0$, $\Sigma F_Y = 0$, $\Sigma M = 0$) no son suficientes para determinarlas todas. Si surge esta condición, se dice que la viga es estáticamente indeterminada.

Las componentes reactivas, que exceden aquellas que se requieren para que la viga sea estáticamente determinada y estable, se llaman reacciones redundantes. Estas, pueden calcularse, aunque para ello debemos recurrir a otros medios distintos de la estática. Este capítulo presenta algunos de los métodos usados para calcular las reacciones redundantes de vigas estáticamente indeterminadas.

Las vigas estáticamente indeterminadas se pueden agrupar en dos clases: vigas *continuas* y vigas *empotradas*. Una viga continua es aquella que está soportada mediante una serie de apoyos, tales como las de la Fig. 8.1. Una viga empotrada está completamente fija en uno o más apoyos, como se muestra en la Fig. 8.2.

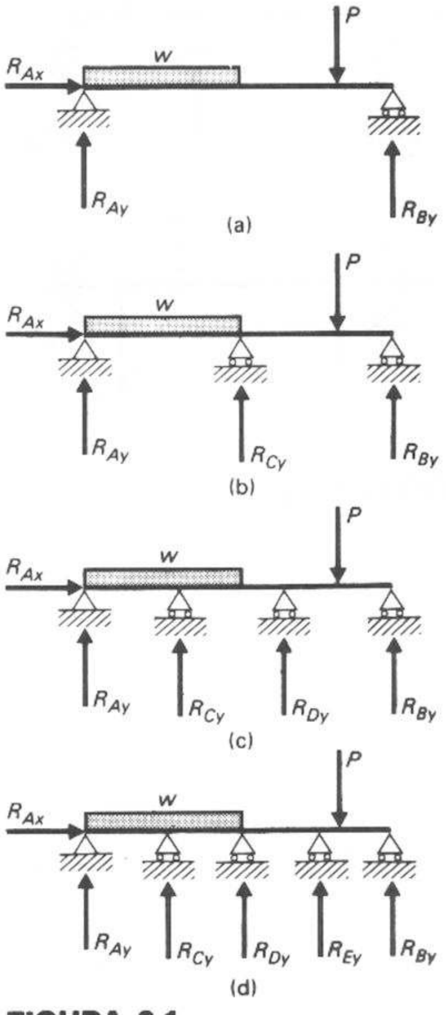


FIGURA 8.1

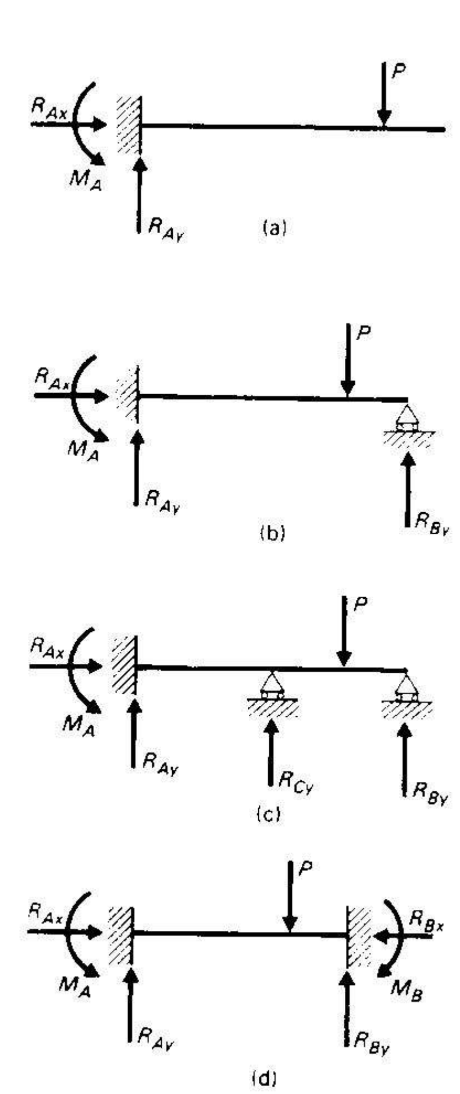


FIGURA 8.2

En la discusión de las vigas estáticamente indeterminadas es conveniente referirse al grado de indeterminación. El *grado de indeterminación* es el número de reacciones redundantes de la viga. Se determina restando el número de componentes reactivas que pueden calcularse por medio de la estática, del número total de componentes reactivas de la viga. Por ejemplo, en la Fig. 8.1 (b), hay cuatro componentes reactivas (R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}, R_{Cy}), tres de las cuales pueden determinarse mediante las ecs. de la estática. La viga de la Fig. 8.1 (b) se dice que es indeterminada de primer grado, ya que los cuatro componentes reactivos menos las tres determinadas por las ecs. de estática dan una reacción redundante. Análogamente, la viga de la Fig. 8.1 (c) es indeterminada de segundo grado, y la de la Fig. 8.1 (d) es indeterminada de tercer grado.

8.2 Métodos de análisis

El principal problema en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas es calcular suficientes reacciones redundantes para que el resto de las reacciones puedan calcularse por medio de las ecuaciones de la estática. Para este fin se dispone de varias técnicas. La mayoría de ellas caen dentro de una de dos categorías generales.

a) *Métodos de superposición*. La viga estáticamente indeterminada se descompone en una serie de vigas estáticamente determinadas. Las pendientes y deflexiones de las vigas estáticamente determinadas se combinan en tal forma que su suma corresponda a las condiciones conocidas de la viga estáticamente indeterminada.
b) *Métodos de relajación*. Todas las uniones de la viga estáticamente indeterminada se empotran rígidamente. Después estas uniones se sueltan para que correspondan a las condiciones originales de la viga indeterminada, y los momentos correctivos que deben tomarse en cuenta para la relajación se distribuyen a lo largo de la viga de una manera particular.

La mayoría de los métodos del análisis indeterminado caen dentro de la categoría de superposición. El proceso de superposición, llamado algunas veces el método general o el método de las deformaciones consistentes, es directo y de fácil aplicación. La Sección A describe este procedimiento en detalle.

El método general superpone las deformaciones producidas por una serie de cargas sobre la viga para obtener las fuerzas sobre la viga estáticamente indeterminada. Las pendientes y las deflexiones de las vigas pueden determinarse por cualquiera de los métodos descritos en los Capítulos 7 ó 13. La técnica de solución es independiente del método mediante el cual se calcularon las deformaciones. Por consiguiente, como el principal objetivo es comprender el método general, en todos los ejemplos ilustrativos se usarán fórmulas estándar para vigas, tomadas del Apéndice *D*. En la práctica, o como ejercicio adicional en el cálculo de

pendientes y deflexiones, pueden usarse los otros métodos para determinar las deformaciones.

Método de superposición SECCION A

8.3 Método general

El procedimiento para resolver problemas estáticamente indeterminados usa la geometría de las pendientes y deflexiones. Usando este método, hacemos estáticamente determinada la estructura indeterminada, mientras la mantenemos en equilibrio estable, removiendo las reacciones redundantes. (Es principalmente un asunto de conveniencia el determinar cuáles de las reacciones se van a considerar redundantes.) Después se cálcula la pendiente y/o la deflexión en el lugar correspondiente a la reacción redundante removida. Finalmente, se calcula la fuerza o el momento (redundante) necesario para llevar a la viga a su posición original. Las componentes de las reacciones restantes se determinan por medio de las ecs. de la estática.

Para ilustrar este procedimiento en forma general, consideremos la viga de la Fig. 8.3 (a). Esta viga es estáticamente indeterminada de primer grado, lo que significa que únicamente una componente de reacción necesita calcularse por otros medios diferentes a la estática. Para esta viga supóngase por conveniencia que R_B es la componente reactiva redundante. La Fig. 8.3 (a) muestra la configuración deformada de la viga indeterminada. Debería notarse que puesto que el apoyo en B no se mueve, la deflexión final del punto B debe ser cero.

Si se quita R_B, como en la Fig. 8.3 (b), el punto B se desplazará una cantidad Δ_B, que puede calcularse por cualquiera de los métodos descritos en los capítulos 7 o 13. Si después se quita la carga P de la viga estáticamente determinada, y se aplica una fuerza de magnitud R_B en B, como se indica en la Fig. 8.3 (c), la deflexión δ_B podría calcularse en términos de R_B.

Si se superpusieran las vigas de las Figs. 8.3 (b) y (c) resultaría la viga de la Fig. 8.3 (a) solamente si $\Delta_B = \delta_B$. Como Δ_B es una cantidad conocida y δ_B se expresa en términos de R_B, igualando las deflexiones se obtendrá una ec. de la cual puede calcularse R_B. Una vez que se conoce R_B, las reacciones restantes pueden calcularse por las ecs. de estática.

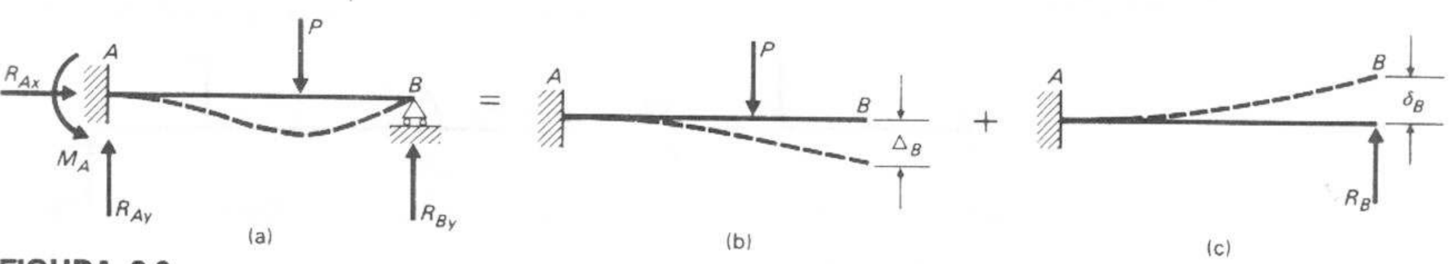


FIGURA 8.3

(a) (b) (c)

FIGURA 8.4

También podemos hallar las reacciones de esta viga considerando otra componente de reacción como redundante. La Fig. 8.4 muestra la misma viga de la ilustración anterior, pero esta vez supongamos que el momento M_A es el elemento redundante.

Se sabe que la pendiente en A de la viga original, [Fig. 8.4 (a)] es cero, debido al empotramiento en ese punto. Si se quita el momento reactivo M_A, resulta la viga simplemente apoyada de la Fig. 8.4 (b). La pendiente θ_A producida por la carga P puede calcularse mediante algún método adecuado. Quitando la carga P y aplicando un momento M_A en el extremo A se produciría la elástica mostrada en la Fig. 8.4 (c), con una pendiente ϕ_A producida por el momento M_A.

Superponiendo las vigas de la Fig. 8.4 (b) y (c) se obtiene la viga original de la Fig. 8.4 (a) si solamente si $\theta_A = \phi_A$ Esta relación entre las deformaciones nos permite calcular la incógnita M_A. Conociendo M_A, podemos calcular las componentes reactivas restantes simplemente mediante la aplicación de las ecs. de la estática.

Las reacciones de la viga del problema anterior no pueden resolverse considerando la reacción R_{AY} como la redundante. Aunque la viga tendría solamente tres componentes reactivas si se hiciera esto, no habría equilibrio estable. La Fig. 8.5 muestra que la viga estáticamente determinada fallaría, ya que no hay nada que sostenga el apoyo izquierdo. Debe tenerse mucho cuidado en asegurarse que la estructura que se seleccione como estáticamente determinada sea estable, aunque en la mayoría de los casos resulten obvias las consideraciones de estabilidad.

La Sección 8.4 proporciona un procedimiento paso a paso, para aplicar este enfoque, que después se muestra en una serie de ejemplos de problemas y sus soluciones. Nótese que las pendientes y las deflexiones pueden calcularse por cualquier método y que, como ya se mencionó anteriormente, las fórmulas del Apéndice D se usaron solamente para simplificar e ilustrar el procedimiento.

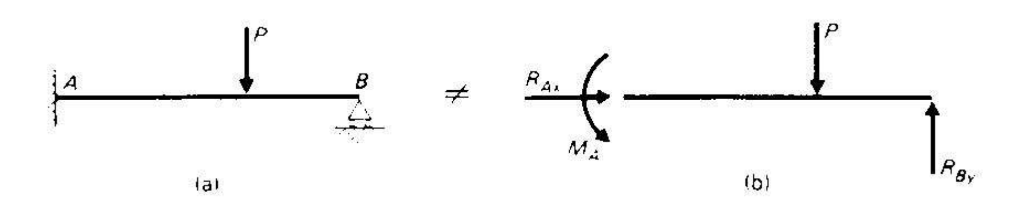


FIGURA 8.5

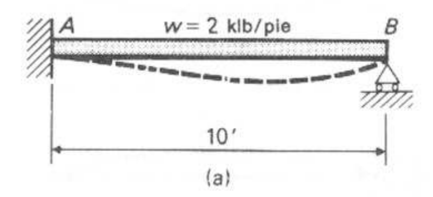
8.4 Procedimiento de superposición

Las reacciones redundantes de una viga estáticamente indeterminada pueden determinarse mediante el siguiente procedimiento:

1. Suprímase el número necesario de redundantes para hacer que la viga sea estáticamente determinada y estable.
2. Calcule la deflexión (o la pendiente) de la viga en los puntos donde se suprimieron las redundancias.
3. Quítense las cargas aplicadas originalmente sobre la viga estáticamente determinada y aplíquense solamente las redundantes en términos generales, tales como R_B, M_A, etc.
4. Establézcase una expresión para la deflexión (o pendiente) producida por estas redundantes.
5. Correlaciónense estas deflexiones (o pendientes) encontradas en los pasos 2 y 4 para la viga en su posición original (indeterminada), y despéjense las incógnitas redundantes.
6. Calcule las reacciones restantes aplicando las leyes de la estática.

Los ejemplos siguientes ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 8.1 Determinar todas las reacciones de la viga mostrada en la Fig. 7.6. Considere que R_B es el elemento redundante.



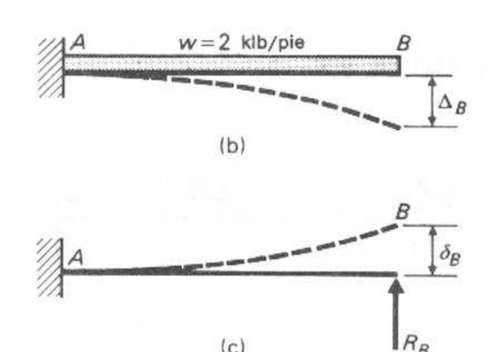


FIGURA 8.6

SOLUCION La deflexión Δ_B puede determinarse según el caso 9 del Apéndice D, así:

$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{2(10)^4}{8EI}.$$

Los cálculos no se efectuarán esta vez, pues el paso 4 contiene muchos de los mismos términos que pueden cancelarse en el paso 5. Nótese que en este caso no se ha usado el factor 1728 plg³/pie³. Este término también podría cancelarse en el paso 5. Sin embargo, debe tenerse cuidado de asegurarse de que las unidades en las ecs. sean consistentes.

La deflexión δ_B puede determinarse para el caso 7. Obtenemos:

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{R_B(10)^3}{3EI}.$$

Como la deflexión en B de la viga original es cero,

$$\Delta_B = \delta_B, \qquad \frac{2(10)^4}{8EI} = \frac{R_B(10)^3}{3EI}, \qquad R_B = 7.5 \text{ klb}$$

Conociendo que R_B = 7.5 klb, podemos calcular las reacciones restantes a

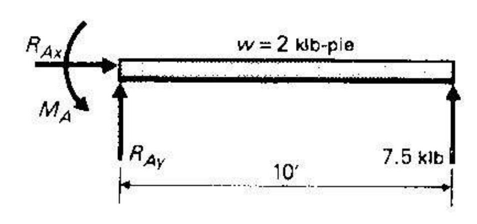


FIGURA 8.7

partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 8.7:

$$\sum F_X = 0: \qquad R_{AX} = 0;$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad R_{AY} - 2(10) + 7.5 = 0,$$

$$R_{AY} = 12.5 \text{ klb}$$

$$\sum M_A = 0: \qquad M_A + 7.5(10) - 2(10)(5) = 0,$$

$$M_A = 25 \text{ klb-pie}. \quad \blacksquare$$

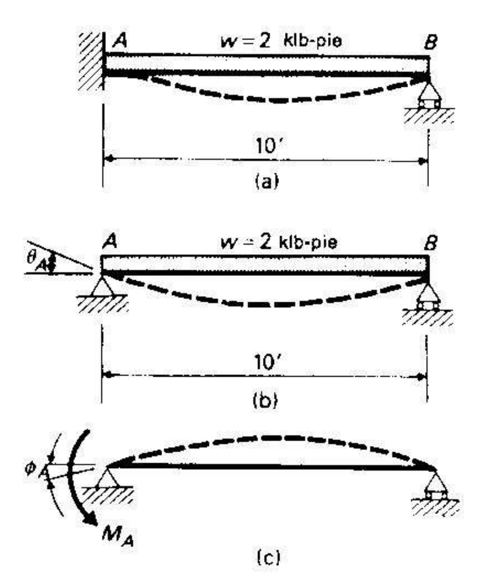


FIGURA 8.8

EJEMPLO 8.2 Determinar las reacciones de la viga del ejemplo 8.1 considerando que M_A es la redundante.

SOLUCION La Fig. 8.8 muestra las vigas, indeterminada y estáticamente determinada. En este caso, como en la mayoría de los problemas, es mejor no calcular los términos numéricos en los primeros pasos ya que muchos factores serán comunes en ambas expresiones y pueden cancelarse, como se indica a continuación. Calculamos la pendiente θ_A mediante el Caso 4,

$$\theta_A = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{2(10)^3}{24EI},$$

y hallamos ϕ_A utilizando el Caso 6:

$$\phi_A = \frac{ML}{3EI} = \frac{M_A(10)}{3EI}.$$

La pendiente en la viga original, Fig. 8.8 (a), es cero en A. Por consiguiente:

$$\theta_A = \phi_A, \qquad \frac{2(10)^3}{24EI} = \frac{M_A(10)}{3EI}, \qquad M_A = 25 \text{ klb-pie}$$

Conociendo que M_A = 25 klb-pie, calculamos las reacciones restantes a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 8.9. Así:

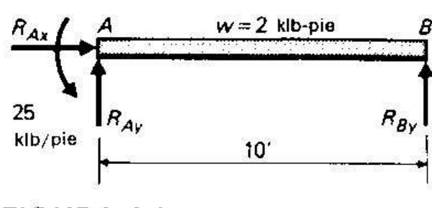


FIGURA 8.9

$$\sum F_X = 0: \qquad R_{AX} = 0;$$

$$\sum M_A = 0: \qquad R_{BY}(10) + 25 - 2(10)(5) = 0,$$

$$R_{BY} = 7.5 \text{ klb};$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad R_{AY} + 7.5 - 2(10) = 0,$$

$$R_{AY} = 12.5 \text{ klb}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8.3 Determinar la reacción en B de la viga indicada en la Fig. 8.10.

SOLUCION La deflexión en el centro, Δ_B, de la Fig. 8.10 (b) puede determinarse combinando los Casos 4 y 2:

$$\Delta_B = \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - x^2 - b^2)$$
$$= \frac{5(4)(8)^4}{384EI} + \frac{(32)(2)(4)}{6(8)EI}(8^2 - 4^2 - 2^2)$$
$$= \frac{1\,344}{3EI}$$

La deflexión en el centro, δ_B, de la Fig. 8.10 (c) puede determinarse a a partir del Caso 1:

$$\delta_B = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{R_B(8)^3}{48EI}.$$

Como la deflexión final en B debe ser cero, tenemos

$$\Delta_B = \delta_B, \qquad \frac{1\,344}{3EI} = \frac{R_B(8)^3}{48EI},$$
$$R_B = 42 \text{ kN}. \quad \blacksquare$$

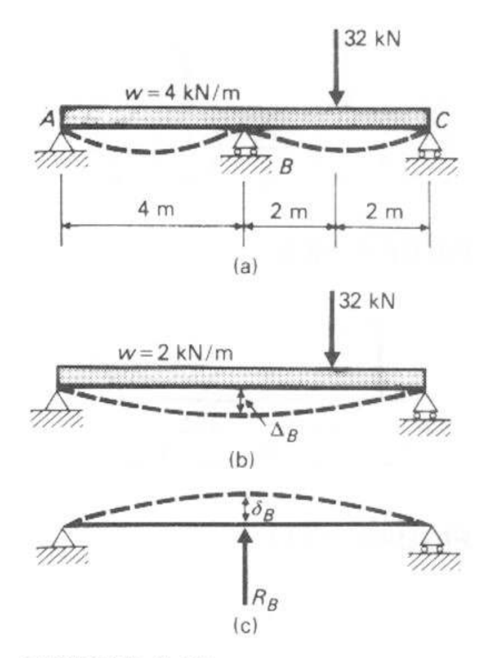


FIGURA 8.10

Problemas

8.1-8.6 Calcular las reacciones de las vigas indicadas en las Figs. P8.1 a P8.6 considerando que las redundantes son:

a) La reacción vertical en B
b) El momento en A

8.7-8.12 Calcular las reacciones de las vigas indicadas en las Figs. P8.7 a P8.12.

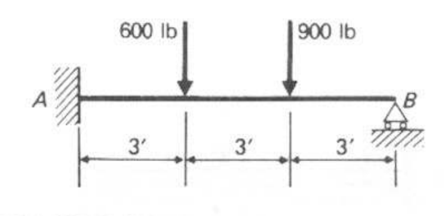


FIGURA P8.1

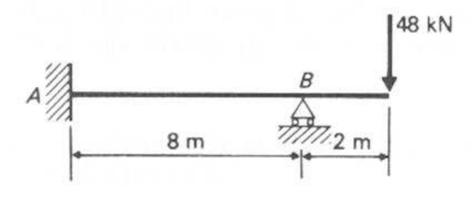


FIGURA P8.2

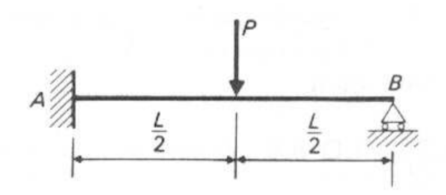


FIGURA P8.3

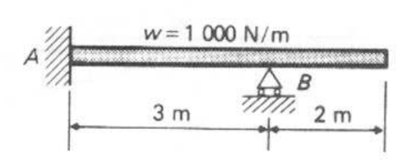


FIGURA P8.4

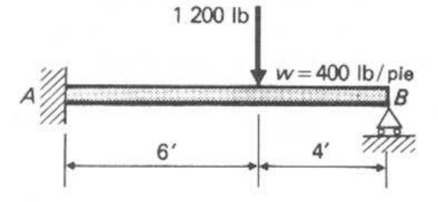


FIGURA P8.5

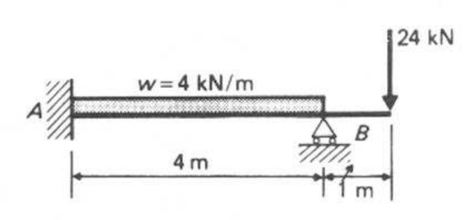


FIGURA P8.6

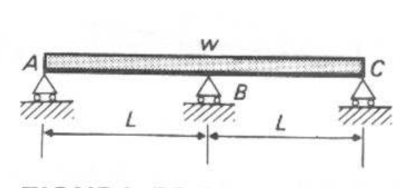


FIGURA P8.7

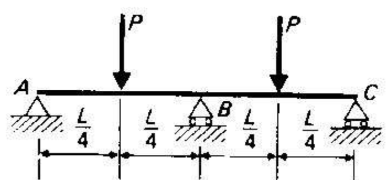


FIGURA P8.8

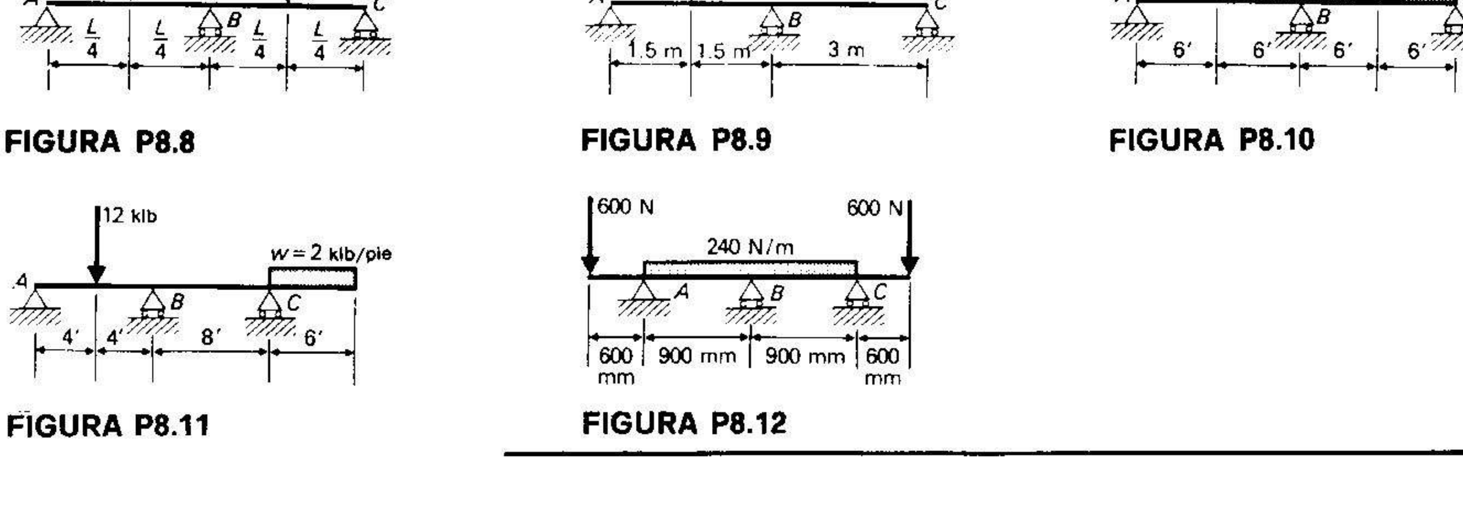


FIGURA P8.9

FIGURA P8.10

FIGURA P8.11

FIGURA P8.12

8.5 Vigas estáticamente indeterminadas de grado mayor que uno

El método de superposición puede usarse también para vigas estáticamente indeterminadas de grado mayor que uno. Sin embargo, las vigas indeterminadas de segundo grado plantearán dos ecuaciones simutáneas para su solución, las vigas indeterminadas de tercer grado plantearán tres ecuaciones simultáneas, etc. Así, aunque el método es aplicable a vigas de más de tres grados de indeterminación, la resolución de más de tres ecuaciones simultáneas es engorrosa y requiere mucho tiempo, a menos que se cuente con una computadora digital.

Los ejemplos que se dan a continuación ilustran el procedimiento para calcular las reacciones de vigas que tienen más de un grado de indeterminación.

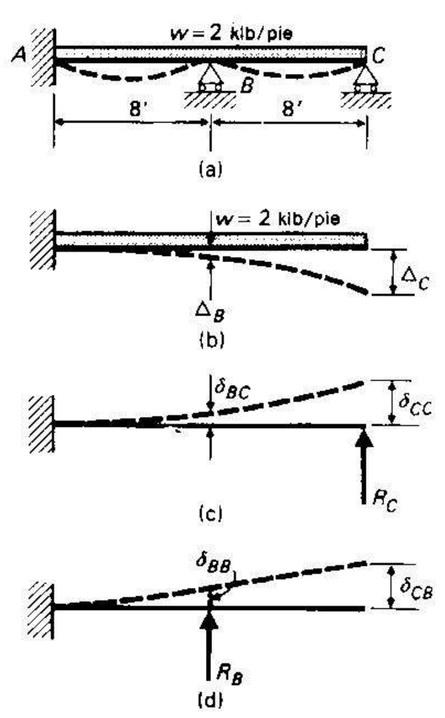


FIGURA 8.11

EJEMPLO 8.4 Determinar las reacciones en B y C de la viga mostrada en la Fig. 8.11.

SOLUCION Considerando las reacciones en B y C como las redundantes, debemos determinar las deflexiones Δ_B y Δ_C. Estas pueden obtenerse usando el caso 9, como se muestra en las ecs. (1) y (2).

$$\Delta_B = \frac{wx^2}{24EI}(x^2 + 6L^2 - 4Lx)$$

$$= \frac{2(8)^2}{24EI}[(8)^2 + 6(16)^2 - 4(16)(8)] = \frac{(16)(1088)}{3EI}; \qquad (1)$$

$$\Delta_C = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{2(16)^4}{8EI} = \frac{4(16)^3}{EI}. \qquad (2)$$

Aplicando la fuerza R se producen las deflexiones tanto en B como en C, como se muestra en la Fig. 8.11 (c). Estas deflexiones pueden determinarse usando el caso 7, como se indica en las ecs. (3) y (4):

$$\delta_{BC} = \frac{Rx^2}{6EI}(3L - x) = \frac{R_C(8)^2}{6EI}[3(16) - 8] = \frac{R_C(32)(40)}{3EI}; \tag{3}$$

$$\delta_{CC} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{R_C(16)^3}{3EI}. \tag{4}$$

Se usa la notación δ_{BC} para significar "la deflexión en B producida por una carga aplicada en C". Análogamente, δ_{CC} significa la deflexión en C producida por una carga aplicada en C.

Aplicando la fuerza R_B se producen las deflexiones tanto en B como en C, como se muestra en la Fig. 8.11 (d). Estas deflexiones pueden determinarse usando el caso 8, como se indica en las ecs. (5) y (6):

$$\delta_{BB} = \frac{Rx^2}{6EI}(3a - x) = \frac{R_B(8)^2}{6EI}[3(8) - 8] = \frac{R_B(32)(16)}{3EI}; \tag{5}$$

$$\delta_{CB} = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) = \frac{R_B(8)^2}{6EI}[3(16) - 8] = \frac{R_B(32)(40)}{3EI}. \tag{6}$$

A partir de la Fig. 8.11 (a), puede verse que la deflexión final de los puntos B y C es cero. Por consiguiente, las ecuaciones de las deformaciones pueden expresarse como:

$$\begin{cases} \Delta_B = \delta_{BC} + \delta_{BB}, \\ \Delta_C = \delta_{CC} + \delta_{CB}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{16(1{,}088)}{3EI} = \dfrac{R_C(32)(40)}{3EI} + \dfrac{R_B(32)(16)}{3EI}, \\ \dfrac{4(16)^3}{EI} = \dfrac{R_C(16)^3}{3EI} + \dfrac{R_B(32)(40)}{3EI}. \end{cases}$$

Eliminando los términos iguales y simplificando, llegamos a las ecuaciones:

$$34.0 = 2.5R_C + R_B$$
$$38.4 = 3.2R_C + R_B$$
$$4.4 = 0.7R_C,$$
$$R_C = 6.3 \text{ klb},$$
$$R_B = 34.0 - (2.5)(6.3); \qquad R_B = 18.3 \text{ klb}. \blacksquare$$

EJEMPLO 8.5 Encuentre las reacciones de la viga mostrada en la Fig. 8.12.

SOLUCION Esta viga es estáticamente indeterminada de tercer grado. Sin embargo, como las cargas se aplican perpendicularmente al eje de la viga, las componentes reactivas horizontales en A y B son despreciables y por consiguiente, se omiten. Esto reduce el grado de indeterminación al segundo grado.

En problemas de esta clase es más conveniente considerar los momentos reactivos en A y B como redundantes.

En la Fig. 8.12 (b), θ_A y θ_B pueden determinarse utilizando el caso 2. Así:

$$\theta_A = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{60(3)(5^2 - 3^2)}{6(5)EI} = \frac{96}{EI},$$

$$\theta_B = \frac{Pab(2L - b)}{6LEI} = \frac{60(2)(3)(2 \times 5 - 3)}{6(5)EI} = \frac{84}{EI}.$$

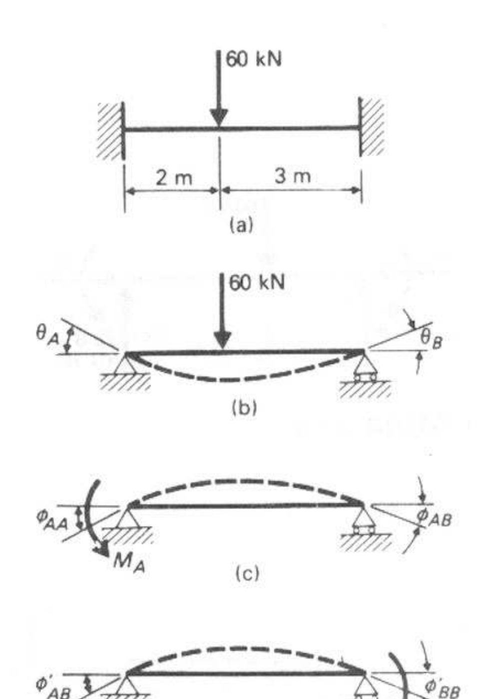


FIGURA 8.12

En la Fig. 8.12 (c), θ_{AA} y θ_{BA} pueden determinarse a partir del caso 6 (la notación θ_{BA} significa "la rotación en B producida por una carga en A"; análogamente, θ_{AA} significa "la rotación en A producida por una carga en A"):

$$\phi_{AA} = \frac{ML}{3EI} = \frac{M_A(5)}{3EI} = \frac{5M_A}{3EI},$$

$$\phi_{BA} = \frac{ML}{6EI} = \frac{M_A(5)}{6EI} = \frac{5M_A}{6EI}.$$

En la Fig. 8.12 (d), ϕ_{AB} y ϕ_{BB} pueden determinarse a partir del caso 6:

$$\phi_{AB} = \frac{ML}{6EI} = \frac{M_B(5)}{6EI} = \frac{5M_B}{6EI},$$

$$\phi_{BB} = \frac{ML}{3EI} = \frac{M_B(5)}{3EI} = \frac{5M_B}{3EI}.$$

A partir de la viga original de la Fig. 8.12 (a), podemos ver que la pendiente tanto en A como en B es cero. Las ecuaciones de las deformaciones pueden escribirse entonces como

$$\begin{cases} \theta_A = \phi_{AA} + \phi_{AB}, \\ \underline{\theta_B = \phi_{BA} + \phi_{BB}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{96}{EI} = \dfrac{5M_A}{3EI} + \dfrac{5M_B}{6EI}, \\[2ex] \dfrac{84}{EI} = \dfrac{5M_A}{6EI} + \dfrac{5M_B}{3EI}. \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas nos da

$$M_A = 43.2\ \text{kN}\cdot\text{m}, \qquad M_B = 28.8\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

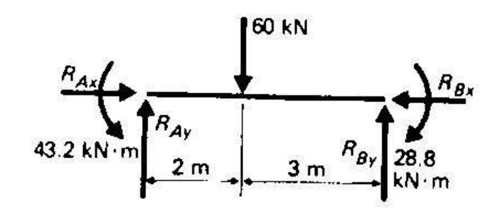


FIGURA 8.13

Las reacciones verticales pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre indicado en la Fig. 8.13. Encontramos que:

$$\sum F_X = 0: \qquad R_{AX} = R_{BX} \approx 0;$$

$$\sum M_A = 0: \qquad R_{BY}(5) + 43.2 - 28.8 - 60(2) = 0,$$

$$R_{BY} = 21.1\ \text{kN}$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad R_{AY} + 2.1 - 60 = 0,$$

$$R_{AY} = 38.9\ \text{kN}. \quad ■$$

Problemas

8.13-8.18 Determinar las reacciones de las vigas indicadas en las Figs. P8.13 a P8.18.

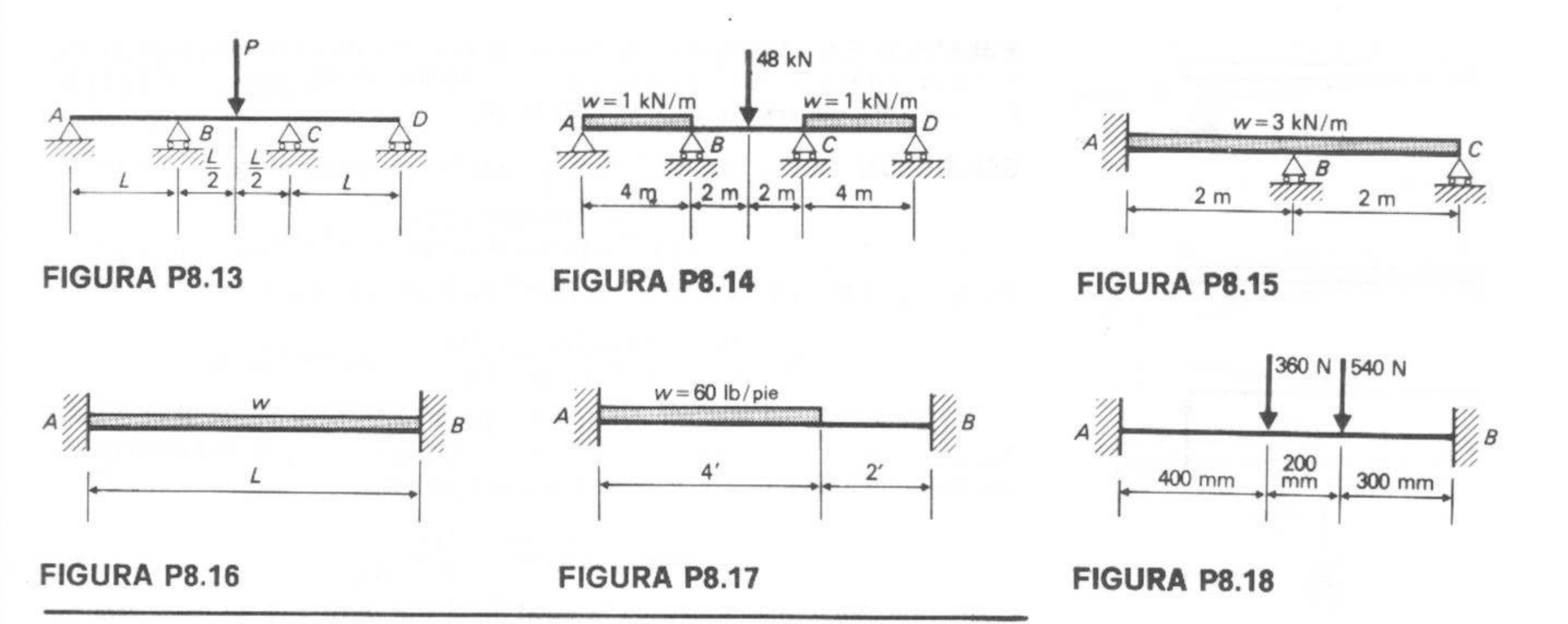


FIGURA P8.13

FIGURA P8.14

FIGURA P8.15

FIGURA P8.16

FIGURA P8.17

FIGURA P8.18

8.6 Vigas con apoyos elásticos

Ocasionalmente, una viga estáticamente indeterminada puede estar apoyada por una reacción que se hunde. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando un apoyo es elástico y se deforma bajo la influencia de una carga aplicada. Ejemplos de este tipo se ilustran en la Fig. 8.14.

La solución de este tipo de problemas utiliza otra vez las características de deflexión de la viga y de los apoyos. Es más conveniente considerar el apoyo elástico como el elemento redundante, y la clave de la solución estriba en el hecho de que la deformación de la viga y la del apoyo elástico tienen el mismo valor en el punto de contacto. Además, deben considerarse cuidadosamente las unidades de la deflexión, particularmente si el apoyo elástico es un resorte o un cable.

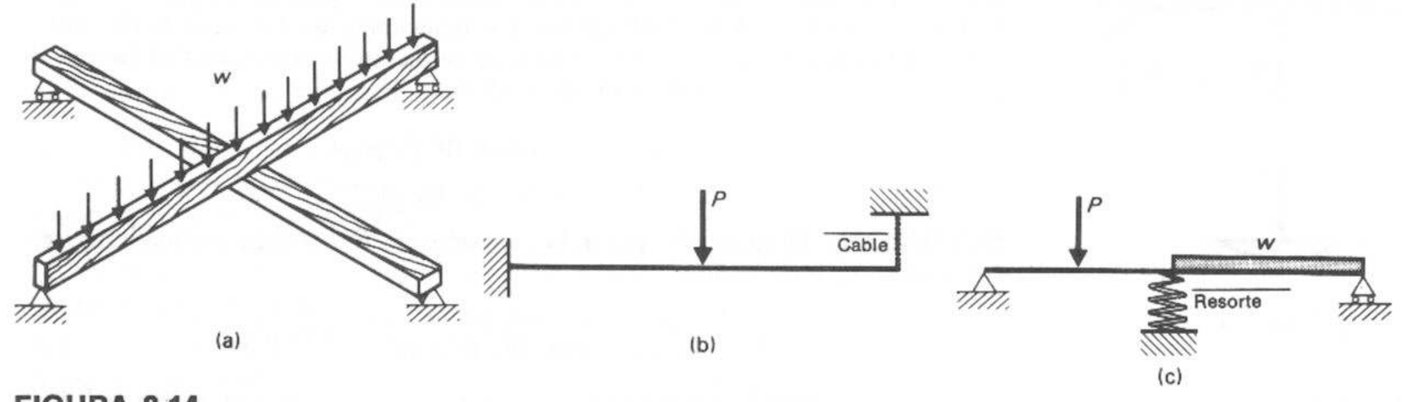


FIGURA 8.14

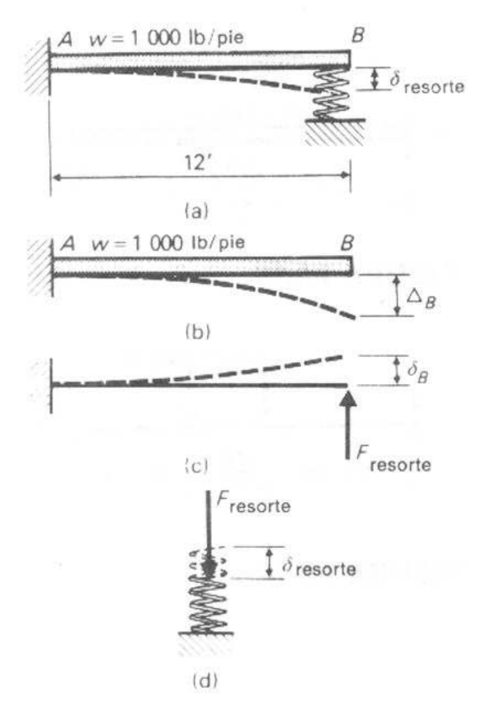


FIGURA 8.15

EJEMPLO 8.6 Determinar la fuerza de reacción en el resorte para la viga mostrada en la Fig. 8.15. Para la viga, $E = 10\ 000\ 000$ lb/plg^2 e $I = 144$ plg^4. La constante del resorte es $k = 500$ lb/plg.

SOLUCION En la Fig. 8.15 (b), Δ_B puede determinarse según el caso 9:

$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{(1\ 000)(12)^4(1\ 728)}{8(10\ 000\ 000)(144)} = 3.11 \text{ plg}$$

En la Fig. 8.15 (c), δ_B puede calcularse mediante el caso 7:

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F_{\text{resorte}}(12)^3(1\ 728)}{3(10\ 000\ 000)(144)} = 0.000691 F_{\text{resorte}}$$

La fuerza en un resorte deformado puede calcularse como $F_{\text{resorte}} = k\ \delta_{\text{resorte}}$, donde k = constante del resorte en lb/plg y δ_{resorte} = deformación del resorte debida a la fuerza F_{resorte}. Por consiguiente:

$$\delta_{\text{resorte}} = \frac{F_{\text{resorte}}}{k} = \frac{F_{\text{resorte}}}{500 \text{ lb/plg}}.$$

Refiriéndose ahora a la viga original de la Fig. 8.15 (a), se encuentra que la deflexión final de B será igual a la deflexión del resorte. Expresada en términos de deflexión:

$$\delta_{B(\text{final})} = \delta_{\text{resorte}} = \Delta_B - \delta_B.$$

Resolviendo esta expresión, se obtiene:

$$\frac{F_{\text{resorte}}}{500} = 3.11 - 0.000691 F_{\text{resorte}}$$

$$0.002 F_{\text{resorte}} + 0.000691 F_{\text{resorte}} = 3.11,$$

$$F_{\text{resorte}} = 1\ 160 \text{ lb}.$$

La deflexión final del punto B sería:

$$\delta_{B(\text{final})} = \delta_{\text{resorte}} = \frac{1\ 160}{500} = 2.32 \text{ plg}$$

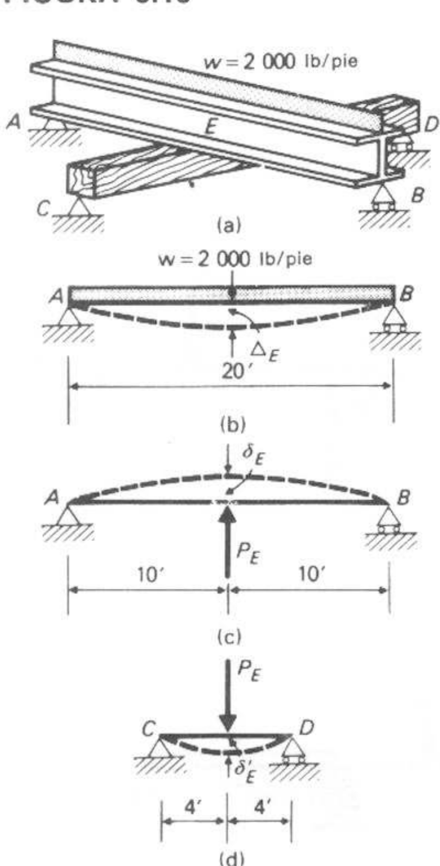


FIGURA 8.16

EJEMPLO 8.7 Una viga de acero W 12 × 26 de 20 pies de longitud está soportada en sus extremos por apoyos fijos, y en su centro por una viga de madera de 8 plg × 12 plg (tamaño nominal), de 8 pies de longitud, como se muestra en la Fig. 8.16. Determinar las reacciones en los apoyos de ambas vigas. A la viga de acero se le aplica una carga uniformemente distribuida de 2000 lb/pie. Los módulos de elasticidad son:

$$E_{\text{madera}} = 1.76 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

$$E_{\text{acero}} = 30 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

SOLUCION Después de quitar la reacción en E (la viga de madera), encontramos Δ_E utilizando el caso 4:

$$\Delta_E = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5(2\ 000)(20)^4(1\ 728)}{384(30 \times 10^6)(204)} = 1.18 \text{ plg}$$

Cuando se quita la carga distribuida de la viga de acero y se aplica la fuerza

P_E de la viga de madera, aparece una deflexión δ_E hacia arriba, como se muestra en la Fig. 7.16 (c).

Según el caso 1,

$$\delta_E = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{P_E(20)^3(1\,728)}{48(30 \times 10^6)(204)} = P_E(47 \times 10^{-6}).$$

La viga de madera de la Fig. 8.16 (d) se deflexionará hacia abajo una cantidad δ_E debido a la carga P_E aplicada en su centro. Aplicando el caso 1,

$$\delta'_E = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{P_E(8)^3(1\,728)}{48(1.76 \times 10^6)(951)} = P_E(11 \times 10^{-6}).$$

En el punto de contacto las deflexiones de la viga de acero y de la viga de madera son iguales. Entonces, la ecuación de las deflexiones puede escribirse como:

Deflexión de la viga de madera = deflexión final,

$$\delta'_E = \Delta_E - \delta_E,$$

$$P_E(11 \times 10^{-6}) = 1.18 - P_E(47 \times 10^{-6}),$$

$$P_E = 20{,}400 \text{ lb}.$$

Conociendo P_E, podemos hallar las reacciones de la viga de acero a partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 8.17 (a). La reacción es $R_A = R_B =$ 9800 lb. Análogamente, las reacciones de la viga de madera pueden encontrarse a partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 8.17 (b), y obtenemos $R_C = R_D =$ 10 200 lb. ■

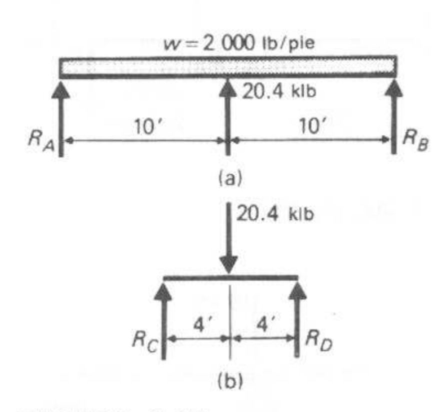


FIGURA 8.17

Problemas

8.19 Una viga de acero W 18 × 18 de 16 pies de longitud está apoyada en sus extremos en apoyos fijos y en su centro por medio de una varilla de acero de 1 plg de diámetro y 8 pies de longitud. Determine el esfuerzo en la varilla producido por las cargas indicadas en la Fig. P8.19.

8.20 La viga horizontal mostrada en la Fig. P8.20 es una barra redonda de acero de 40 mm de diámetro, y el miembro vertical BD es una varilla de acero de 6 mm de diámetro.

a) Determine el esfuerzo en la barra vertical BD y el esfuerzo flexionante máximo en la viga ABC debido a la aplicación de la fuerza de 480N en C.

b) Si la barra BD no estuviera presente, ¿cuál sería el esfuerzo flexionante máximo en la viga ABC debido a la fuerza de 480N?

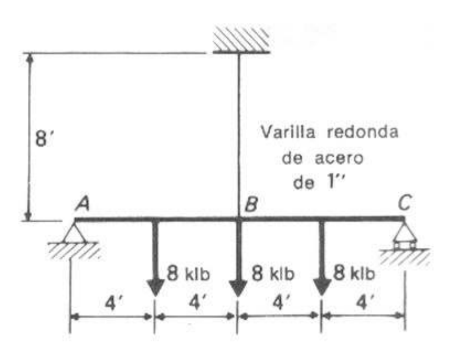


FIGURA P8.19

8.21 Determine las reacciones de la viga mostrada en la Fig. P8.21. La viga consiste en un tubo estándar de acero de 4 plg, de diámetro y la parte CD es un lazo de manila de ½ plg² de área. E_{manila} = 1 000 000 lb/plg².

8.22 A la viga W 8 × 18 indicada en la Fig. P8.22 se le aplica una carga de 2 000 lb/pie. Si la constante del resorte del apoyo del centro en B es k = 5 000 lb/plg, determinar las reacciones de la viga.

8.23 Un miembro de madera de 60 mm × 80 mm × 4 m de longitud soporta una carga concentrada de 60 kN en su centro, como se indica en la Fig. P8.23. Un resorte de constante k = 300 kN/m soporta a la viga directa-

FIGURA P8.20

FIGURA P8.21

FIGURA P8.22

FIGURA P8.23

FIGURA P8.24

FIGURA P8.26

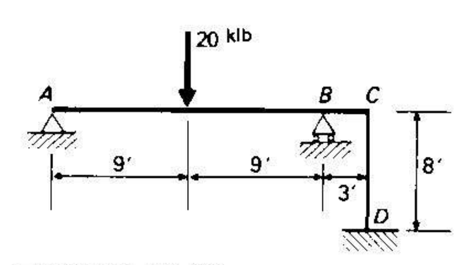


FIGURA P8.27

mente bajo la carga concentrada. Determinar todas las reacciones cuando el módulo de elasticidad es E = 12 GPa.

8.24 Determinar la fuerza ejercida por el bloque cilíndrico entre las vigas *AB* y *BC* en la Fig. P8.24. Ambas vigas tienen un ancho de 36 mm y un peralte de 60 mm. El módulo de elasticidad es E = 200 GPa.

8.25 Resolver el problema 8.24 para una viga *BC* de aluminio, con E = 70 GPa.

8.26 Determinar las reacciones de la vigueta de acero W 12 × 26 indicada en la Fig. P8.26. El miembro *CD* es un cable que tiene un módulo de elasticidad de 6 000 klb/plg^2 y un área de su sección transversal de 0.8 plg^2.

8.27 Determinar las reacciones de la viga de acero W 14 × 30 mostrada en la Fig. P8.27. La parte *CD* es una barra de acero de 8 pies de longitud con una área de su sección transversal de 1 plg^2.

8.28 Una viga de madera de 6 plg × 12 plg (tamaño nominal) y de 16 pies de longitud soporta unas cargas de 4.0 klb a los cuartos de su longitud (véase Fig. P7.28). La viga de madera está soportada en sus extremos en apoyos fijos y en su centro por medio de una viga de acero W 8 × 18. La viga de acero

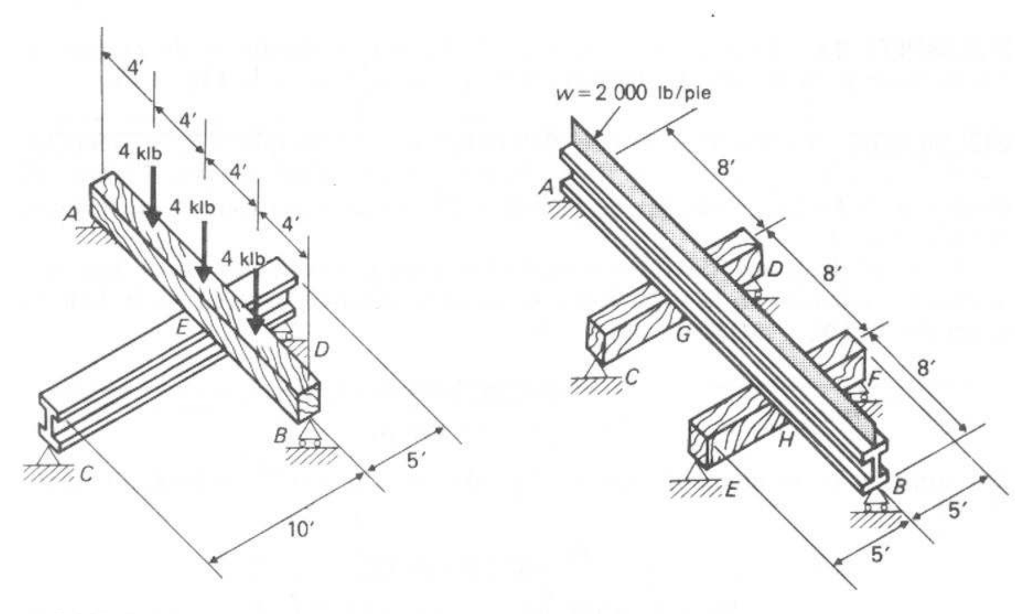


FIGURA P8.28 **FIGURA P8.29**

tiene 15 pies de longitud y soporta la viga de madera a 5 pies de uno de sus extremos.

a) Calcular el esfuerzo flexionante máximo en las dos vigas.
b) Calcular el esfuerzo flexionante máximo en la viga de madera, suponiendo que la viga de acero no existiera.

8.29 En la Fig. P8.29, una viga W 14 × 30 de 24 pies de longitud está soportada en los extremos por medio de apoyos fijos y a los tercios de su longitud por medio de vigas de madera de 6 plg × 10 plg (tamaño nominal), de 10 pies de longitud. A la viga de acero se aplica una carga uniformemente distribuida de w = 2 000 lb/pie. Determine el esfuerzo máximo en las vigas.

8.30 Una de las vigas maestras del techo de una casa está hecha de tres secciones de 2 plg × 12 plg (tamaño nominal). La viga tiene 20 pies de longitud y está apoyada en una columna en su punto medio. Determinar las reacciones para una carga de 900 lb/pie.

a) Cuando ninguno de los apoyos se hunde.
b) Cuando el cimiento de la columna se hunde ¾ plg.

8.7 Diagramas de momentos y fuerzas cortantes

Los diagramas de momentos y fuerzas cortantes para vigas estáticamente indeterminadas se construyen usando los principios y procedimientos explicados en el capítulo 4. Las formas de los diagramas se ajustan a lo discutido en la sección 4.6, y se presentará un momento máximo en cada lugar donde el diagrama de fuerzas cortantes pase por el cero.

El ejemplo siguiente ilustra los diagramas de fuerzas cortante y de momentos para una viga estáticamente indeterminada.

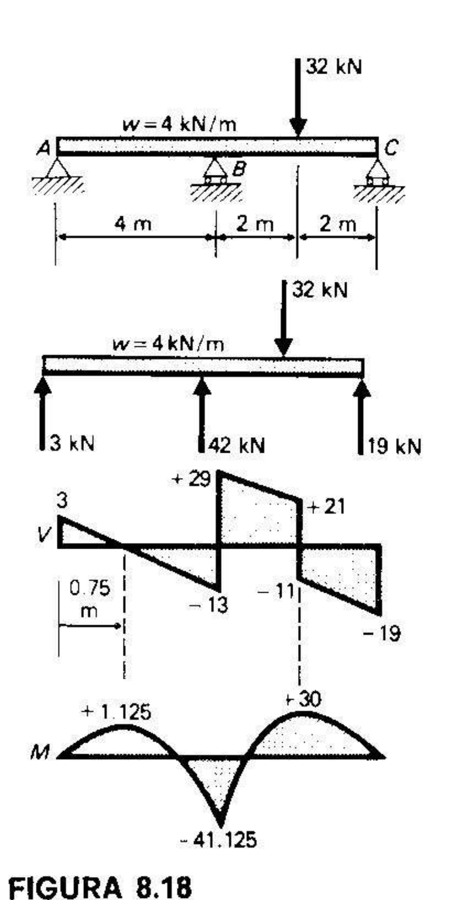


FIGURA 8.18

EJEMPLO 8.8 Trazar los diagramas de fuerzas cortantes y de momentos flexionantes para la viga del ejemplo 8.3, que se indica en la Fig. 8.18.

SOLUCION La reacción R_B se determinó en el ejemplo 8.3, y tiene un valor de 42 kN; $R_A = 3$ kN y $R_C = 19$ kN pueden calcularse por estática. El diagrama de fuerzas cortantes de la Fig. 8.18 (c) se traza usando las técnicas del Capítulo 4.

Como el diagrama de fuerzas cortantes pasa por cero tres veces, hay tres momentos máximos en la viga. Estos momentos máximos ocurren en B, bajo la carga de 32 kN, y a 0.25 m de R_A. Así,

$$M_{1,\,\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(0.75)(3)$$
$$M_{1,\,\text{máx}} = 1.125 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

La variación en el momento desde el punto situado a 0.75 m hasta el punto B es

$$\Delta M = \tfrac{1}{2}(-13)(3.25) = -21.125$$
$$M_{2,\,\text{máx}} = \Delta M - M_1 = -21.125 + 1.125$$
$$M_{2,\,\text{máx}} = 20.0 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

El tercer momento máximo ocurre bajo la carga de 32 kN. El cambio en el momento desde C hasta la carga de 32 kN es el momento en este punto:

$$M_{3,\,\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(8)(2) + 11(2)$$
$$M_{3,\,\text{máx}} = 30 \text{ N}\cdot\text{m}. \quad ■$$

SECCION B La ecuación de los tres momentos

8.8 Un método analítico alternativo

El método de superposición presentado en la sección A es un instrumento de análisis muy poderoso. La ecuación de los tres momentos se presenta como una solución alternativa para vigas continuas sobre varios apoyos. Las soluciones de algunos problemas se pueden facilitar con este método.

Se usa el principio de superposición para determinar directamente las reacciones en una viga. La ecuación de los tres momentos determina los momentos en tres apoyos consecutivos cualesquiera de una viga continua. Conociendo los momentos en los apoyos de una viga, las componentes de las reacciones pueden determinarse aplicando las leyes de la estática a varios diagramas de cuerpo libre correspondientes a diversas porciones de la viga.

8.9 La ecuación de los tres momentos

La ecuación de los tres momentos puede deducirse más fácilmente usando el segundo principio del área de momentos del capítulo 7. Para ha-

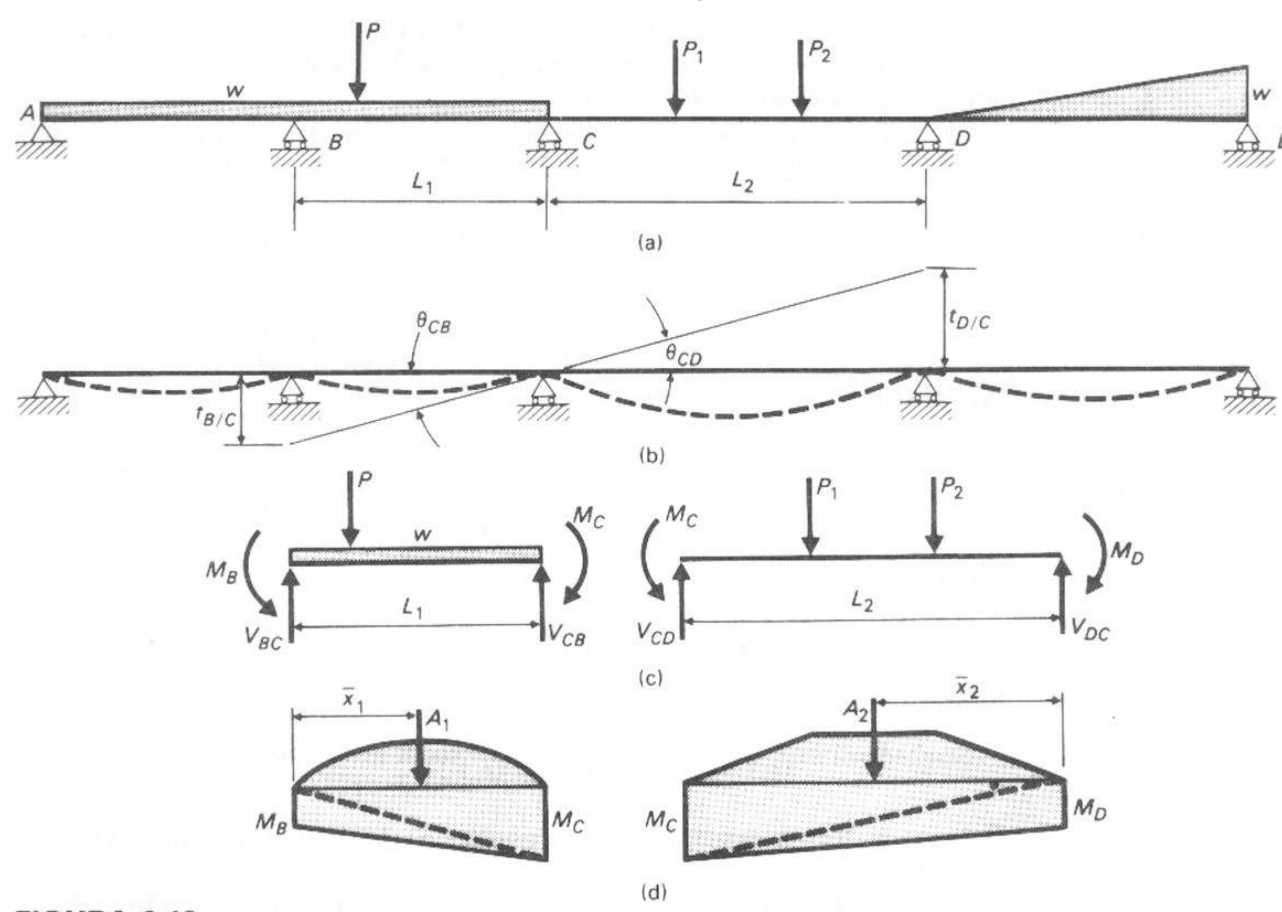


FIGURA 8.19

cer esto, considérese una viga continua como la de la Fig. 8.19 (a). En la Fig. 8.19 (b) se muestra la elástica de la viga. Por el apoyo C se traza una tangente a la curva.

Como la elástica es continua sobre los apoyos, los ángulos en C deben tener el mismo valor. Por consiguiente,

$$\theta_{CB} = -\theta_{CD}. \tag{a}$$

Los ángulos θ pueden expresarse como:

$$\theta_{CB} = \frac{t_{B/C}}{L_1}, \qquad \theta_{CD} = \frac{t_{D/C}}{L_2}. \tag{b}$$

Las desviaciones tangenciales $t_{B/C}$ y $t_{D/C}$ pueden determinarse aplicando el segundo principio del área de momentos a las áreas bajo los diagramas M/EI comprendidas entre los puntos respectivos. Para ayudar al lector a aplicar los principios, se han trazado diagramas de momentos separados para las cargas exteriores y los momentos internos en los apoyos (Fig. 8.19d).

Sean A_1 y A_2 las áreas bajo los diagramas de momentos para las cargas exteriores, y $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ las distancias a los centroides de estas áreas a partir

de los puntos B y D, respectivamente. Los diagramas de momentos producidos por los momentos internos se han descompuesto en áreas triangulares para facilitar el cálculo.

Determínemos las desviaciones tangenciales en términos generales aplicando el segundo teorema del área de momentos, como sigue:

$$t_{B/C} = \frac{A_1}{EI}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\frac{M_B}{EI}(L_1)\left(\frac{1}{3}L_1\right) + \frac{1}{2}\frac{M_C}{EI}(L_1)\left(\frac{2}{3}L_1\right)$$

$$t_{D/C} = \frac{A_2}{EI}\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\frac{M_D}{EI}(L_2)\left(\frac{1}{3}L_2\right) + \frac{1}{2}\frac{M_C}{EI}(L_2)\left(\frac{2}{3}L_2\right). \qquad \text{(c)}$$

Al substituir en las ecs. (a) y (b),

$$\theta_{C/B} = -\theta_{C/D}$$

$$\frac{t_{B/C}}{L_1} = \frac{-t_{D/C}}{L_2},$$

obtenemos

$$\frac{(A_1/EI)\bar{x}_1 + M_B L_1^2/6EI + M_C L_1^2/3EI}{L_1} = -\frac{A_2\bar{x}_2/EI + M_D L_2^2/6EI + M_C L_2^2/3EI}{L_2}.$$

Simplificando esta expresión, tenemos

$$M_B L_1 + 2M_C(L_1 + L_2) + M_D L_2 = -\frac{6A_1\bar{x}_1}{L_1} - \frac{6A_2\bar{x}_2}{L_2}. \qquad (8.1)$$

Esta es la forma general de la ecuación de los tres momentos. Expresa la relación entre los momentos en tres apoyos consecutivos cualesquiera de una viga continua. Los dos términos del segundo miembro de la ecuación se determinan mediante los diagramas de momentos de las fuerzas exteriores aplicadas a una viga simple entre los apoyos respectivos.

La ecuación de los tres momentos, expresada en la forma de la ec. (8.1) supone que el momento de inercia se conserva constante para los claros considerados y que todos los apoyos están al mismo nivel. La ecuación no sería válida para vigas sobre apoyos elásticos o vigas con momentos de inercia distintos en los diferentes claros.

8.10 Uso de la ecuación de los tres momentos

La ecuación de los tres momentos se dedujo suponiendo que los momentos en los apoyos eran positivos. Por consiguiente, el signo algebraico obtenido en la solución de la ecuación será el signo correcto del momento. Los subíndices de la ec. (8.1) deben revisarse para que correspondan a la designación dada a los apoyos.

Los ejemplos siguientes ilustran este método de solución.

EJEMPLO 8.9 Determine las reacciones de la viga mostradas en la Fig. 8.20.

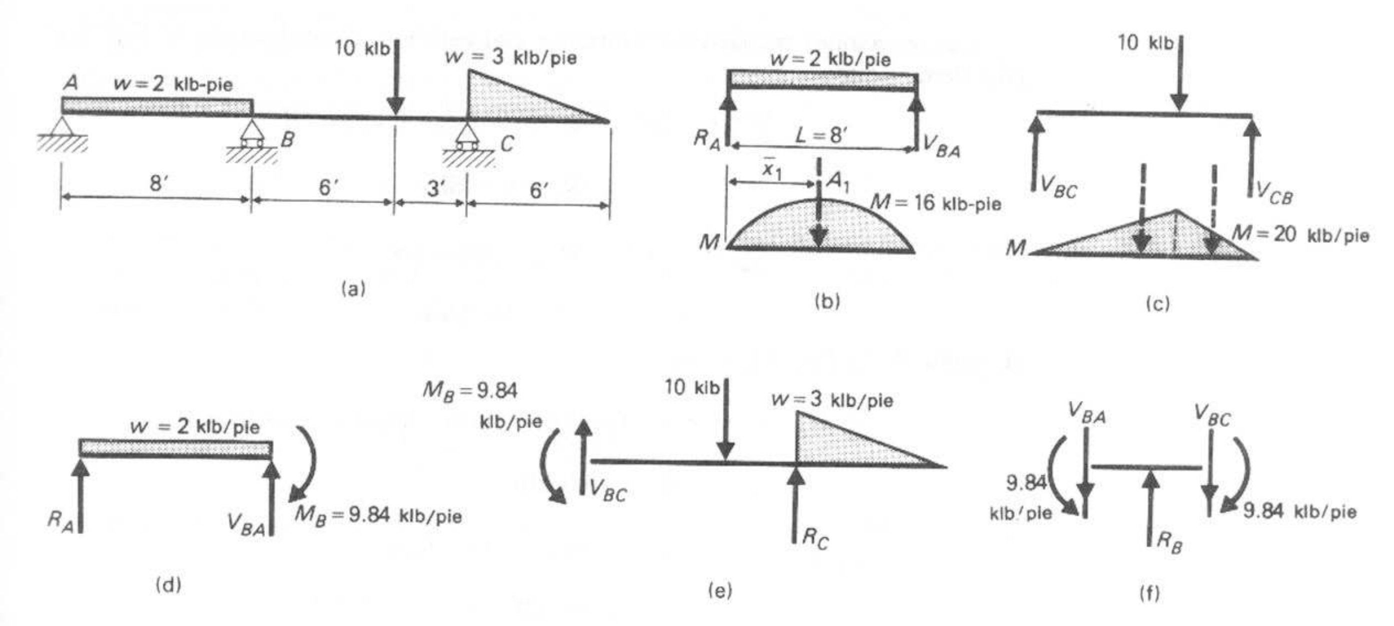


FIGURA 8.20

SOLUCION Sabemos que el momento en A es cero, y por estática hallamos que el momento en C es,

$$M_C = -\tfrac{1}{2}(3)(6)(\tfrac{1}{3}\times 6) = -18 \text{ klb-pie}$$

Como se conocen M_A y M_C, M_B será la única incógnita en la ecuación. Los términos de carga del segundo miembro de la ecuación pueden determinarse como sigue:

Claro AB:

$$A_1\bar{x}_1 = \tfrac{2}{3}(16)(8)(4) = 341.2.$$

Claro BC:
El área puede calcularse como una sola, localizando el centroide a partir de las figuras del Apéndice E. Sin embargo, como ilustración, se descompone en la Fig. 8.20 (c), en dos porciones triangulares. En este tramo:

$$A_2\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(20)(3)(\tfrac{2}{3}\times 3) + \tfrac{1}{2}(20)(6)(3+\tfrac{1}{3}\times 6) = 360.$$

Aplicando la ecuación de los tres momentos (8.1), tenemos:

$$M_AL_1 + 2M_B(L_1+L_2) + M_CL_2 = -\frac{6A_1x_1}{L_1} - \frac{6A_2x_2}{L_2}$$

$$0(8) + 2M_B(8+9) + (-18)(9) = -\frac{6(341.2)}{8} - \frac{6(360)}{9}$$

$$34M_B = -256 - 240 + 162$$

$$M_B = -9.84 \text{ klb-pie.}$$

Las reacciones pueden determinarse por estática. Considerando la Fig. 8.20 (d) vemos que:

$$\sum M_B = 0: \qquad R_A(8) + 9.84 - 2(8)(4) = 0$$

$$R_A = 6.8 \text{ klb;}$$

$$\sum F_V = 0: \qquad V_{BA} = 2(8) - 6.8$$

$$= 9.2 \text{ klb.}$$

A partir de la Fig. 8.20 (e),

$$\sum M_B = 0: \qquad R_C(9) + 9.84 - 10(6) - \tfrac{1}{2}(3)(6)(9 + \tfrac{1}{3} \times 6) = 0$$

$$R_C = 16.6 \text{ klb;}$$

$$\sum F_V = 0: \qquad V_{BC} = 10 + \tfrac{1}{2}(3)(6) - 16.6$$

$$= 2.4 \text{ klb.}$$

Considerando la Fig. 8.20 (f), hallamos que:

$$\sum F_V = 0: \qquad R_B = V_{BA} + V_{BC} = 9.2 + 2.4$$

$$= 11.6 \text{ klb.} \blacksquare$$

EJEMPLO 8.10 Determinar los momentos en los apoyos de la viga mostrada en la Fig. 8.21.

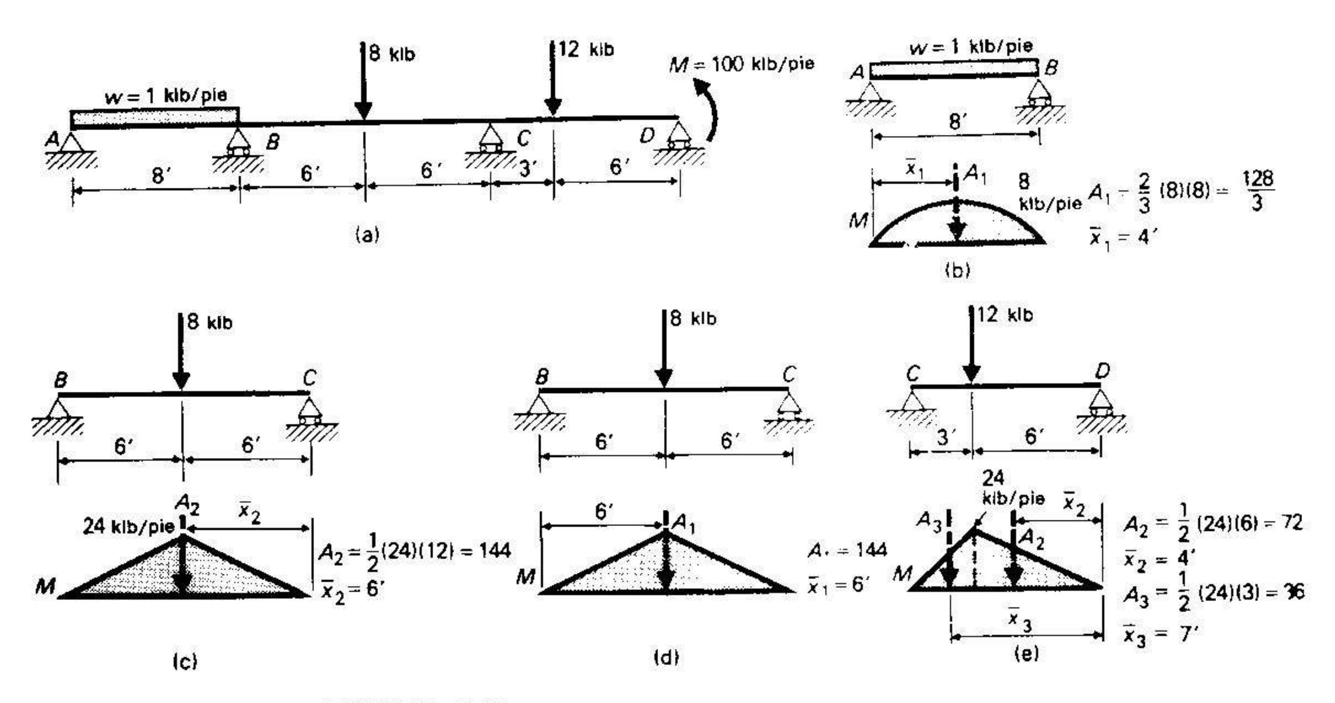


FIGURA 8.21

SOLUCION Se sabe que los momentos en A y D son 0 klb-pie y + 100 klb-pie, respectivamente. Se determina M_B y M_C usando la ecuación de los tres momentos. Considerando los tres apoyos consecutivos en A, B, y C, podemos escribir la ecuación para los momentos en esos apoyos:

$$M_A L_{AB} + 2M_B(L_{AB} + L_{BC}) + M_C L_{BC} = -\frac{6A_1\bar{x}_1}{L_{AB}} - \frac{6A_2\bar{x}_2}{L_{BC}}.$$

Los términos, $-6A_1 x_1/L_{AB}$ y $-6A_2 x_2/L_{BC}$ pueden determinarse a partir de los diagramas de momentos de los tramos AB y BC, respectivamente, como se muestra en la Fig. 8.21 (b) y (c). Así:

$$-\frac{6A_1\bar{x}_1}{L_{AB}} = -\frac{6(\frac{128}{3})(4)}{8} = -128;$$

$$-\frac{6A_2\bar{x}_2}{L_{BC}} = -\frac{6(144)(6)}{12} = -432.$$

Entonces, la ecuación de los tres momentos para la porción ABC se escribe como:

$$0(8) + 2M_B(8 + 12) + M_C(12) = -128 - 432$$

$$40M_B + 12M_C = -560.$$

Como hay dos incógnitas en esta ecuación, debe obtenerse una expresión adicional que contenga las mismas dos incógnitas. Esto se logra aplicando la ecuación de los tres momentos a los momentos en los apoyos B, C, y D:

$$M_B L_{BC} + 2M_C(L_{BC} + L_{CD}) + M_D L_{CD} = -\frac{6A_1\bar{x}_1}{L_{BC}} - \frac{6A_2\bar{x}_2}{L_{CD}}.$$

Los términos debidos a la carga pueden determinarse a partir de los diagramas de momentos de los tramos BC y CD, como se muestra en la Fig. 8.21 (d) y (e). Así:

$$-\frac{6A_1\bar{x}_1}{L_{BC}} = -\frac{6(144)(6)}{12} = -432;$$

$$-\frac{6A_2\bar{x}_2}{L_{CD}} = -\frac{6[36(7) + 72(4)]}{9} = -360.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de los tres momentos para la porción BCD, se tiene:

$$M_B(12) + 2M_C(12 + 9) + 100(9) = -432 - 360$$

$$12M_B + 42M_C = -1\,692.$$

Las dos ecuaciones pueden resolverse simultáneamente:

$$\begin{cases} 40M_B + 12M_C = -560 \\ 12M_B + 42M_C = -1\,692. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene:

$$M_B = -2.08 \text{ klb-pie} \quad M_C = -39.7 \text{ klb-pie}.$$

Problemas

8.31 Resolver el ejemplo 8.3 por medio de la ecuación de los tres momentos.
8.32 Resolver el problema 8.8 por medio de la ecuación de los tres momentos.

Resolver los problemas indicados a continuación por medio de la ecuación de los tres momentos.

8.33 Problemas 8.9.
8.34 Problema 8.10.
8.35 Problema 8.11.
8.36 Problema 8.12.
8.37 Problema 8.13.
8.38 Problema 8.14.

9

Columnas

9.1 Introducción

Una columna es un miembro que soporta una carga de compresión axial. Esta carga puede ser concéntrica (aplicada a lo largo del eje centroidal, como en la Fig. 9.1 (a) o excéntrica (aplicada paralelamente al eje del miembro centroidal, pero a cierta distancia del mismo), como en la Fig. 9.1 (b).

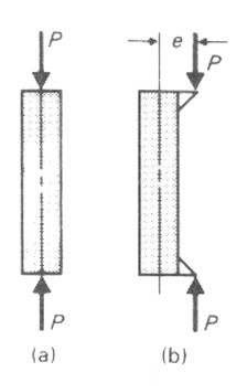


FIGURA 9.1

Según esta definición, los miembros a compresión cargados concéntricamente discutidos en el capítulo 2 son "columnas". Sin embargo, dichos miembros eran relativamente cortos y gruesos. Para tales columnas, la falla ocurriría por aplastamiento general del material.

A medida que se aumenta la longitud de la columna, se reduce su capacidad d soportar carga. Esta reducción está basada más en el tipo de falla que ocurrirá, que en el esfuerzo. Considérense, por ejemplo dos barras de acero que tienen el diámetro de un lápiz. Suponga que una barra es de 1 m de longitud y la otra de 2 cm de longitud. Si se aplicara una fuerza de compresión gradualmente creciente a la barra larga, fallaría porque se presentaría repentinamente una gran deflexión lateral. Esta deflexión lateral, llamada *pandeo*, es producida por la inestabilidad de la barra cuando se alcanza una cierta carga crítica.

Por otro lado, la barra corta, fallaría por *fluencia* general (aplastamiento). Por consiguiente, la barra corta soportaría una carga considerablemente mayor que la barra larga. Este ejemplo ilustra los dos tipos extremos de falla que pueden ocurrir cuando miembros rectos se sujetan a cargas de compresión.

Cuando una barra se sujeta a compresión, pueden ocurrir tres tipos de falla, según la teoría de columnas. Las columnas cortas fallan por aplastamiento del material, las columnas largas fallan por pandeo, y las columnas intermedias fallan por una combinación de pandeo y aplastamiento.

Las columnas cortas pueden analizarse y diseñarse según la fórmula elemental $\sigma = P/A$, dada en el capítulo 2. Sin embargo, las columnas largas e intermedias deben tratarse de tal manera que se considere el fenómeno de pandeo. Este capítulo presenta parte de la teoría y de los

fundamentos que gobiernan el diseño de columnas e ilustra los métodos de análisis y diseño.

9.2 Fórmula de Euler para columnas

La base de la teoría de las columnas es la fórmula de Euler, que fue publicada en 1757 por Leonardo Euler, un matemático suizo. La fórmula de Euler, que solamente es válida para columnas largas, calcula lo que se conoce como la *carga crítica de pandeo.* Esta es la carga última que puede ser soportada por columnas largas; es decir, la carga presente en el instante del colapso.

Consideremos una columna soportada en sus dos extremos por articulaciones y sometida a una carga axial P. Supongamos que esta columna inicialmente es recta, homogénea, y de sección transversal constante en toda su longitud. También debe suponerse que el material de que está hecha la columna se comporta elásticamente. Es decir, se aplica la Ley de Hooke y los esfuerzos son inferiores al límite de proporcionalidad del material.

Cuando se intenta determinar la carga de pandeo de una columna, debe uno darse cuenta que una columna cargada con la carga crítica de pandeo puede tener dos posiciones de equilibrio. Una de estas es la posición recta y la otra es una posición ligeramente deformada, como se indica en la Fig. 9.2 (a).

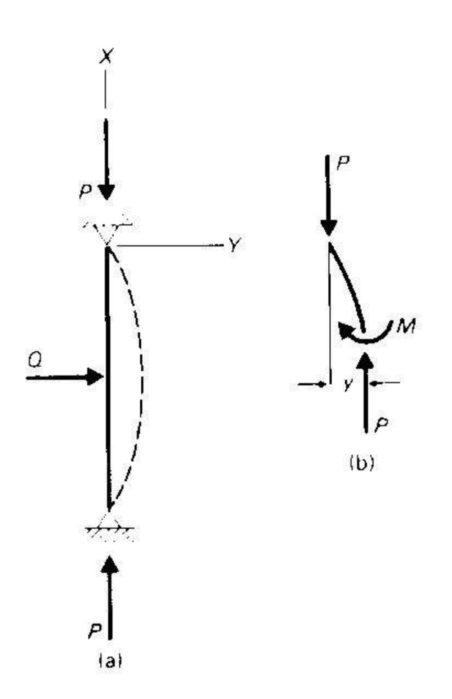


FIGURA 9.2

Consideremos por ejemplo, la barra mostrada en la Fig. 9.2 (a). Suponga que la carga axial P parte de un valor bajo y se incrementa gradualmente de magnitud. Si se aplica una pequeña fuerza lateral Q, la barra se deformará lateralmente una pequeña cantidad. Si se quita Q, la barra regresará a su configuración recta. Sin embargo, la barra deformada no regresará a su posición recta cuando la carga axial P sea de un valor particular, llamado la *carga crítica de pandeo.* Cuando se aplica esa carga crítica, la barra se deformará debido a la pequeña carga lateral Q, pero conservará la posición deformada cuando se quita Q. Esta condición de la barra puede describirse como equilibrio neutro. Si en la condición de equilibrio neutro, la carga axial se reduce ligeramente, la barra regresará a su posición recta. Si la carga axial se incrementa ligeramente, la barra sufrirá el colapso. Se llama carga crítica de pandeo, a aquella a la cual corresponde el equilibrio neutro.

Se obtiene la carga crítica de pandeo para una columna, considerando a la barra en la configuración flexionada de equilibrio neutro. La Fig. 9.2 (b) muestra un diagrama de cuerpo libre de la barra en esa situación. El momento flexionante es:

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = -Py. \tag{a}$$

Se usa el signo menos debido a los ejes coordenados elegidos. Estos ejes y por consiguiente, el signo menos para el momento flexionante, se eligen para simplificar la solución matemática del problema. Pueden

elegirse otros ejes, pero la expresión matemática para la solución no sería tan fácil para su análisis.

La ec. (7.4) define la ecuación de la curva de elasticidad de la viga como $d^2y/dx^2 = M/EI$. Usando esta expresión y la ec. (a) para M, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0.$$

Hagamos $k^2 = P/EI$; podremos entonces escribir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial,* obtenemos

$$y = A\cos kx + B\,\mathrm{sen}\,kx. \tag{b}$$

En la ec. (b), deben calcularse las dos constantes de integración A y B. Por consiguiente, es necesario conocer dos condiciones de frontera. A partir de la Fig. 9.2 (a), se observa que:

1. $y = 0$ en $x = 0$,
2. $y = 0$ en $x = L$.

Usando estas condiciones con la ec. (b), tenemos:

1. $0 = A\cos 0 + B\,\mathrm{sen}\,0$

   $0 = A(1) + B(0)$

   $A = 0$

y

2. $0 = B\,\mathrm{sen}\,kL.$ (c)

---

* La parte matemática de la solución puede adoptar varias formas. Una solución sería como sigue:

$$(y'')^2 + k^2y = 0, \qquad (D^2 + k^2)y = 0, \qquad y = C_1e^{ikx} + C_2e^{-ikx}$$

Esta ecuación, que tiene un par de soluciones complejas conjugadas se expresa como:

$$y = C_1(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\,kx) + C_2(\cos kx - i\,\mathrm{sen}\,kx)$$

y por consiguiente:

$$y = A\cos kx + B\,\mathrm{sen}\,kx,$$

donde

$$A = C_1 + C_2,$$

$$B = iC_1 - iC_2.$$

La solución generalmente se expresa en esta última forma trascendente.

Para satisfacer la ec. (c), B debe ser cero o sen kL debe ser cero. Si $B = 0$, no hay problema (o solución). Por consiguiente B debe tener algún valor finito, aunque pueda ser indeterminado. Dividiendo ambos miembros de la ec. (c) por B se llega a que sen $kL = 0$.

Esta ecuación se describe como un valor característico o una ecuación de valor característico. Las soluciones son:

$$kL = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ n\pi.$$

Tomando la solución general, vemos que:

$$kL = n\pi; \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{L};$$

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2}. \tag{9.1}$$

El término n describe los modos de pandeo. Algunas soluciones se indican en la Fig. 9.3

Para la mayoría de los casos prácticos el primer modo de pandeo ($n = 1$) producirá la falla, y a menos que se encuentren características especiales de construcción, el pandeo ocurrirá en

$$P = \frac{\pi^2EI}{L^2}. \tag{9.2}$$

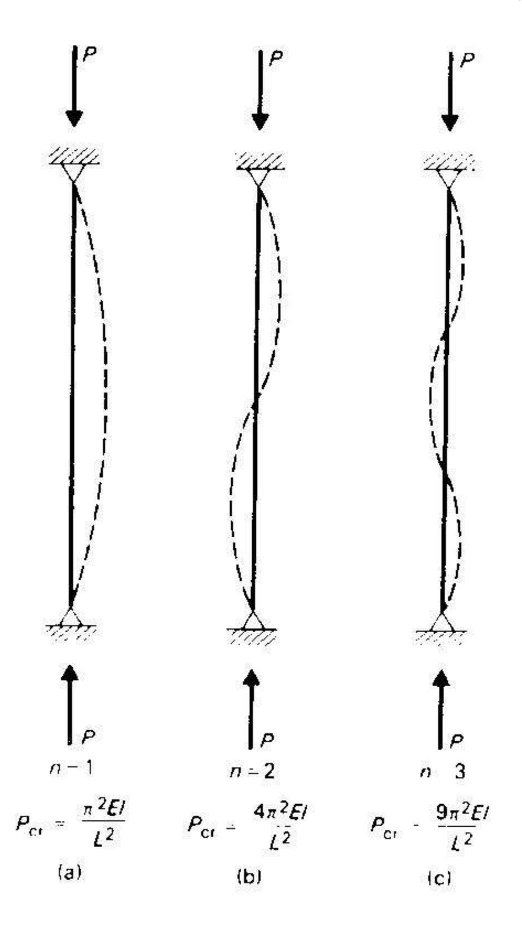


FIGURA 9.3

Debe notarse que en la deducción se usa la expresión $\sigma = Mc/I$, ya que estaba incluida en la deducción de la ec. (7.4). Por consiguiente, cualesquiera suposiciones hechas en las deducciones de $\sigma = Mc/I$ o de $d^2y/dx^2 = M/EI$ son también suposiciones en la deducción de la ecuación de Euler.

9.3 Fórmulas de Euler para otras condiciones de los extremos

La fórmula de Euler para columnas con extremos articulados puede modificarse para tomar en consideración otros tipos de condiciones de los extremos, algunos de los cuales se muestran en la Fig. 9.4.

Usando la columna con extremos articulados como el caso básico, podemos modificar la ec. (9.2) para proporcionar la carga crítica de pandeo para columnas que tengan como condiciones en sus extremos las mostradas en la Fig. 9.4 (b), (c) y (d). Se necesita solamente substituir la longitud L de la ec. (9.2) por la "longitud efectiva" (mostrada en la Fig. 9.4). La *longitud efectiva* es la distancia entre los puntos de inflexión de la curva deformada que adopta el eje de la columna.

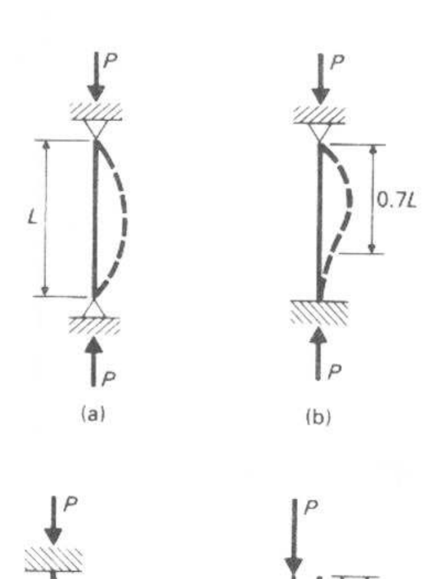


FIGURA 9.4

Por ejemplo, la carga crítica de pandeo para la columna de la Fig. 9.4 (b), que tiene un extremo empotrado y el otro extremo articulado (longitud efectiva = $0.7L$) se convierte en:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{2.04\pi^2 EI}{L^2}. \tag{9.3}$$

Análogamente, la fórmula de Euler puede modificarse para las otras condiciones de los extremos mostradas en la Fig. 9.4. Para columnas doblemente empotradas (Fig. 9.4 (c), longitud efectiva = $0.5L$), es :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}. \tag{9.4}$$

Para columnas con un extremo empotrado y otro libre (Fig. 9.4 (d), longitud efectiva = $2L$), se convierte en

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}. \tag{9.5}$$

Para tener en cuenta la posible diferencia entre la longitud efectiva y la longitud verdadera, frecuentemente se incluye un factor de longitud efectiva en la ecuación básica. Entonces la ecuación de Euler aparecería como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}, \tag{9.6}$$

donde K es el factor de longitud efectiva.

Para los casos ideales mostrados en la Fig. 9.4 (a) a (d), los valores de K son 1.0,0.7,0.5 y 2.0.

EJEMPLO 9.1 Determinar la carga crítica de pandeo de una columna redonda de acero, de 2 plg de diámetro y 10 pies de longitud.

SOLUCION

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(30 \times 10^6)[\pi(2)^4/64]}{(10 \times 12)^2}$$
$$= 16\ 100 \text{ lb.}$$

Nótese que ésta es la carga "última" para esta columna. Para obtener la carga "admisible", debemos aplicar un factor de seguridad. ■

Para la columna del ejemplo 9.1, calculemos las cargas de pandeo para los cuatro casos indicados en la Fig. 9.4 para comparar las cargas críticas de pandeo.

Articulado-articulado: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(30 \times 10^6)(0.785)}{(120)^2}$

$= 16\ 100$ lb.

Empotrado-articulado: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{0.49L^2} = \frac{\pi^2(30 \times 10^6)(0.785)}{0.49(120)^2}$

$= 32\ 900$ lb.

Empotrado-empotrado: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{0.25L^2} = \frac{\pi^2(30 \times 10^6)(0.785)}{(0.25)(120)^2}$

$= 64\ 000$ lb.

Empotrado-libre: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2(30 \times 10^6)(0.785)}{4(120)^2}$

$= 4\ 000$ lb.

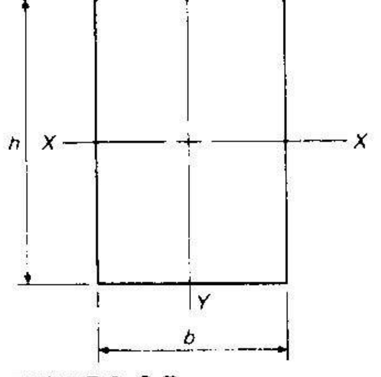


FIGURA 9.5

Debe notarse que para una sección asimétrica, el momento de inercia I debe tomarse con respecto al eje alrededor del cual ocurre el pandeo. Por ejemplo, si la sección transversal de los ejemplos anteriores fuera una sección rectangular y no hubiera apoyos intermedios que impidieran el pandeo alrededor del eje más débil, el pandeo ocurriría alrededor del eje Y de la Fig. 9.5.

Problemas

FIGURA P9.3

9.1 Calcular la carga crítica de pandeo para un tubo de acero estándar de 2 plg de diámetro y 10 pies de longitud, cuyos extremos están articulados.

9.2 Resolver el problema 9.1 para las siguientes condiciones de los extremos: **a**) empotrado-libre, **b**) empotrado-empotrado, **c**) empotrado-articulado.

9.3 Calcular la carga crítica de pandeo de la barra maciza de aluminio (de sección transversal de 25 mm × 40 mm) mostrada en la Fig. P9.3.
9.4 Calcular la carga crítica de pandeo de la barra de acero de 8 mm × 50 mm mostrada en la Fig. P9.4.
9.5 Calcular la carga crítica de pandeo en una barra de madera de 16 mm × 32 mm y 1 m de longitud, cuando los extremos están:

a) articulado-articulado,
b) empotrado-empotrado,
c) empotrado-libre,
d) empotrado-articulado.

En este caso $E = 12$ GPa.

9.6 Calcular la carga crítica de pandeo de la barra de acero de ½ plg × 1 plg mostrada en la Fig. P9.6.
a) Supóngase que A y B son extremos articulados y que no existe apoyo intermedio en C.
b) Supóngase que A y B son extremos articulados y que se coloca una restricción en C, a 16 plg de B, para impedir el movimiento lateral según el eje más débil, pero no según el eje más fuerte.

9.7 ¿Qué tan lejos de B debería colocarse la restricción del problema 9.6 para producir cargas de pandeo iguales con respecto tanto al eje débil como al eje más resistente?
9.8 Deducir la ecuación para la carga crítica de pandeo de una columna empotrada en la base y libre en la parte superior.
9.9 Deducir la ecuación para la carga crítica de pandeo de una columna empotrada en ambos extremos.

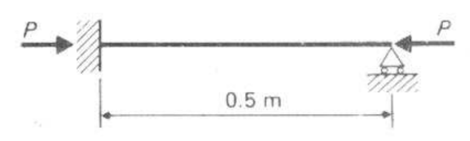


FIGURA P9.4

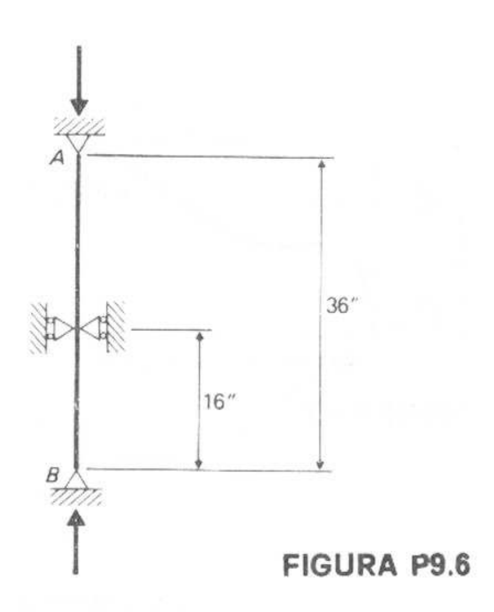


FIGURA P9.6

9.4 Esfuerzo crítico

Las fórmulas de Euler, como se presentaron en las secciones 9.2 y 9.3 son válidas solamente para columnas "largas". Para ilustrar la definición de una columna larga y proporcionar una base de discusión de las fórmulas empíricas para columnas intermedias, se estudiarán los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 9.2 Determinar la carga crítica de pandeo y el esfuerzo en la columna correspondiente a la carga crítica, para una columna maciza de acero de sección circular, de 1 plg de diámetro y 30 plg de longitud, con extremos articulados.

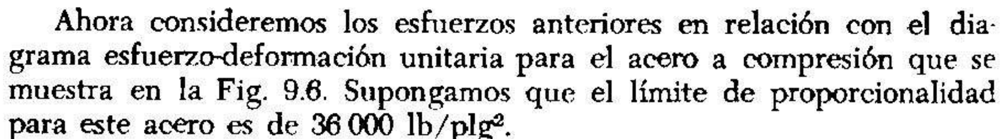
SOLUCION

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(30 \times 10^6)[\pi(1)^4/64]}{(30)^2}; \qquad P_{cr} = 16\ 100 \text{ lb};$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{16\ 100}{(\pi/4)(1)^2}; \qquad \sigma_{cr} = 20\ 500 \text{ lb/plg}^2. \quad ■$$

EJEMPLO 9.3 Resolver el ejemplo 9.2, suponiendo que la longitud de la columna es de 21 plg en vez de 30 plg.

SOLUCION



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(30\times 10^6)[\pi(1)^4/64]}{(21)^2}; \qquad P_{cr} = 33\ 000\ \text{lb},$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{33\ 000}{(\pi/4)(1)^2}; \qquad \sigma_{cr} = 42\ 000\ \text{lb/plg}^2. \quad ■$$

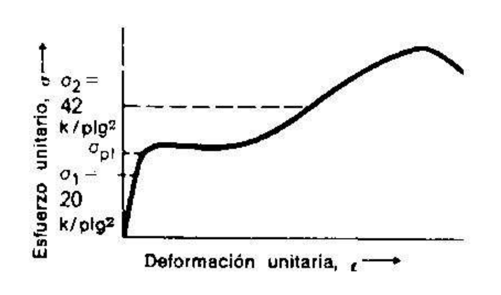


FIGURA 9.6

Ahora consideremos los esfuerzos anteriores en relación con el diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el acero a compresión que se muestra en la Fig. 9.6. Supongamos que el límite de proporcionalidad para este acero es de 36 000 lb/plg².

El esfuerzo σ_1 es inferior al límite de proporcionalidad del material, donde el material está aún en el intervalo elástico del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Sin embargo, el esfuerzo σ_2 queda arriba del límite de proporcionalidad del material, donde el material ya no se comporta elásticamente. Una de las suposiciones hechas en la deducción de la fórmula de Euler (sección 9.2) fue que el material se comportaba elásticamente. Como este no es el caso para la columna del ejemplo 9.3, la fórmula de Euler no es válida. Por consiguiente, *la carga calculada en el ejemplo* 9.3 *es incorrecta.*

En consecuencia, una columna larga se define como una columna en la cual los esfuerzos correspondientes a la carga crítica de pandeo son menores que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad del material. Esta es la razón por la cual la fórmula de Euler no predice con precisión la carga de pandeo para todas las columnas. Sin embargo, cuando son razonablemente correctas las suposiciones descritas en la sección 9.2, la fórmula de Euler da resultados confiables. Para cargas que producen un esfuerzo que excede al del límite de proporcionalidad del material, se han desarrollado otras fórmulas que dan resultados razonables. Estas fórmulas se discutirán posteriormente en este capítulo.

Como el esfuerzo es un medio conveniente para definir el límite de validez de la ecuación de Euler, es útil expresar la ecuación en términos del esfuerzo, en lugar de en términos de la carga. Como $\sigma = P/A$, ambos miembros de la ec. (9.2) pueden dividirse entre A. Además, será necesario hacer la substitución $I = Ar^2$ para obtener la expresión en una forma más útil. El término r es el radio de giro de la sección transversal, y se define en el Apéndice A. El esfuerzo es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{9.2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{9.3}$$



donde

σ_{cr} = esfuerzo unitario en la columna, en lb/plg² o Pa, cuando se alcanza la carga crítica de pandeo,

E = módulo de elasticidad, en lb/plg², o en Pa,

$\frac{L}{r}$ = relación de esbeltez = longitud efectiva dividida entre el radio de giro (adimensional).

Si se dibuja la ec. (9.7) para varios valores de L/r, se obtiene la curva mostrada en la Fig. 9.7. El límite de validez de esta ecuación es nuevamente el límite de proporcionalidad del material. Los valores de los esfuerzos que son mayores que el límite de proporcionalidad no son válidos (líneas interrumpidas de la Fig. 9.7).

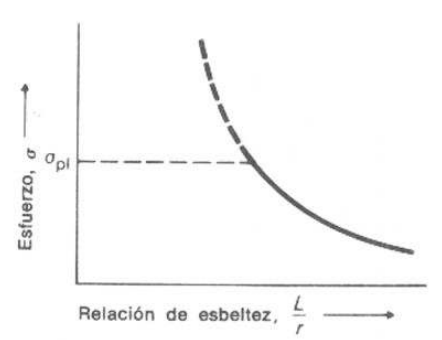


FIGURA 9.7

Se puede continuar la curva σ vs L/r para valores de L/r menores que el correspondiente al σ_{pl} modificando la ecuación de Euler de acuerdo con la teoría del módulo tangente del pandeo inelástico.

La fórmula para la curva se convierte en:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \qquad (9.8)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2}. \qquad (9.9)$$

El término E_t, llamado el *módulo tangente de elasticidad*, es la pendiente de la curva esfuerzo-deformación unitaria correspondiente al valor del esfuerzo donde ocurre el pandeo. La Fig. 9.8 muestra gráficamente la pendiente E_t.

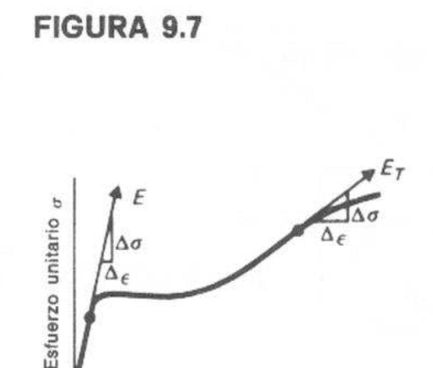


FIGURA 9.8

En la Fig. 8.9 se muestra una curva típica para todos los valores de L/r. Esta curva también es una forma conveniente de ilustrar la clasificación de las columnas como cortas, intermedias y largas.

Debe notarse que la longitud de la columna, aisladamente, no define el tipo de la misma; el parámetro crítico es más bien, la relación de esbeltez L/r. El radio de giro r se toma con respecto al eje de pandeo. En ausencia de apoyos intermedios, una columna se pandeará alrededor del eje más débil, que es el eje de menor radio de giro.

Como puede verse en la Fig. 9.9, las columnas cortas (que tienen relaciones de esbeltez pequeñas) fallan por aplastamiento. La carga máxima que pueden soportar esas columnas puede calcularse a partir de $P = \sigma A$. Las columnas largas fallan por pandeo, y sus cargas máximas pueden calcularse a partir de la ecuación de Euler, $P_{cr} = \pi_2 EI/(KL)^2$.

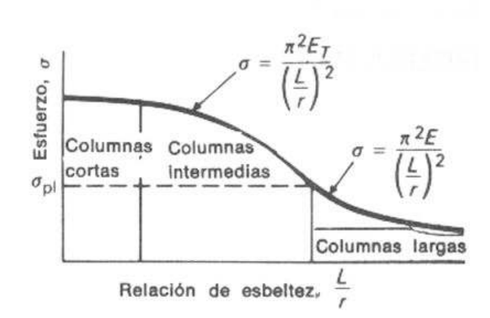


FIGURA 9.9

Las columnas intermedias fallan por una combinación de aplastamiento y pandeo, y la obtención de una fórmula apropiada para calcular la carga de pandeo ha sido un problema difícil de resolver. Solamente en 1947 se encontraron las fórmulas del módulo tangente de las ecs. (9.8) y (9.9), que dieron la solución correcta a las columnas de este tipo.

Problemas

9.10 Determinar la relación de esbeltez con respecto a los ejes x-x y y-y de una columna con extremos articulados, de 5 m de longitud, que tiene la sección transversal mostrada en la Fig. 9.10.

9.11 Determinar la relación de esbeltez con respecto a los ejes x-x y y-y de una columna de 20 pies de longitud, articulada en la parte superior y empotrada en la base. La sección transversal se muestra en la Fig. P9.11.

9.12 Determinar la mayor relación de esbeltez de una columna de 3 m de longitud, empotrada en la base y libre en la parte superior. La sección transversal se muestra en la Fig. P9.12.

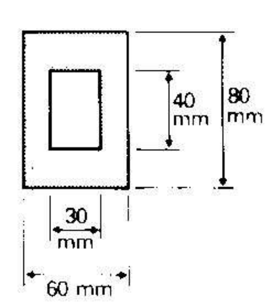


FIGURA P9.10

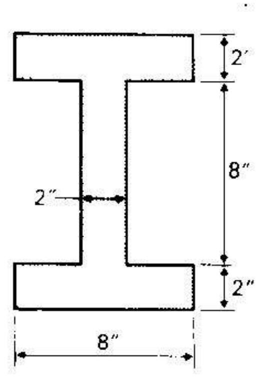


FIGURA P9.11

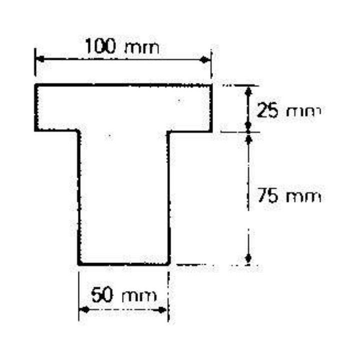


FIGURA P9.12

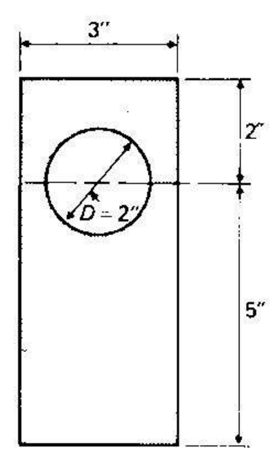


FIGURA P9.13

9.13 Determinar la mayor relación de esbeltez de una columna de 8 pies de longitud, con extremos articulados, que tiene la sección transversal mostrada en la Fig. P9.13.

9.14 Determinar las mayores relaciones de esbeltez de columnas de 10 pies de longitud y extremos articulados, cuando la columna es

(a) W 8 × 31,
(b) S 12 × 31.0,
(c) C 10 × 30.0,
(d) ángulo de 7 × 6 × ⅝.

9.15 Determinar la longitud mínima que deben tener las columnas para que se pueda aplicar la fórmula de Euler. Suponga que las columnas están articuladas en sus extremos y el esfuerzo en el límite de proporcionalidad es de 18 000 lb/plg^2.

(a) W 6 × 20.0,
(b) S 7 × 20.0,
(c) S 9 × 20.0,
(d) ángulo de 5 × 5 × ⅝,

9.16 Dibujar una curva de σ_{cr} contra L/r en el intervalo elástico para una columna de acero que tenga un límite de proporcionalidad de 25 000 lb/plg^2. ¿Para qué valor de L/r la fórmula de Euler deja de ser válida?

9.17 Una parte de una máquina tiene la forma de una barra maciza de acero de sección circular y una longitud de 800 mm, y soporta una fuerza de compresión axial de 600 N. Los extremos están articulados y se usa un factor de seguridad de 2. Determinar el diámetro necesario para dicha parte. Supóngase que la columna cae en el intervalo de aplicación de la fórmula de Euler.

9.18 Una barra de acero de 24 plg de longitud y 2 plg de ancho soporta una carga axial de 460 lb. Si la barra tiene sus extremos articulados y se usa un factor de seguridad de 2.5 con la fórmula de Euler, ¿cuál es el espesor? ¿cuál es el esfuerzo real y el esfuerzo crítico en la barra? ¿si el límite de proporcionalidad de la barra es de 18 000 lb/plg^2, se justifica el uso de la ecuación de Euler?

9.5 Fórmulas para columnas intermedias

La Fig. 9.9 ilustra la forma general de la curva esfuerzo-relación de esbeltez para columnas. Como esta curva representa el esfuerzo "último" para columnas, no se usa directamente en diseño. Las fórmulas de diseño se obtienen tomando las características de la curva σ vs L/r para el material

que se está considerando y escribiendo la ecuación de la curva, incluyendo un factor de seguridad adecuado en la expresión.

La mayoría de las fórmulas para columnas dan esfuerzos admisibles para las columnas intermedias y cortas. Históricamente, las predicciones de la resistencia de una columna en esas zonas han sido de naturaleza empírica. Las fórmulas (9.8) y (9.9) para el módulo tangente, aunque se propusieron por primera vez en 1889, no se demostró que predijeran con aproximación la carga de pandeo sino hasta finales de la década de 1940.

Las fórmulas de columnas usadas para diseño dan un esfuerzo admisible. Por consiguiente, el factor de seguridad está incluido en al ecuación. La línea sombreada de la Fig. 9.10 ilustra gráficamente la relación entre una fórmula de diseño y la capacidad última de columnas.

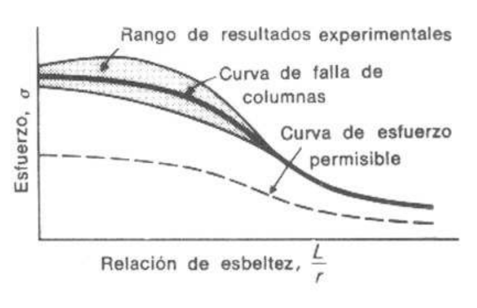


FIGURA 9.10

Desde la primera fórmula empírica para columnas, que se publicó en 1729, se han usado alrededor de 400 fórmulas en diseño en varias épocas. La mayoría de ellas son ecuaciones a las que corresponden líneas rectas o parábolas, ya que dichas curvas pueden aproximarse a la curva de falla de la columna y son también, de forma algebraica más sencilla.

Una ecuación de una línea recta tiene la forma de la ecuación (9.10).

$$\sigma_{\text{admisible}} = \sigma - \alpha \frac{L}{r} \tag{9.10}$$

donde

$\sigma_{\text{admisible}}$ = esfuerzo admisible, en lb/plg², o en Pa,
σ = valor del esfuerzo base, en lb/plg², o en Pa,
α = coeficiente elegido para dar la ecuación deseada,
L/r = relación de esbeltez.

La ecuación (9.11) es una ecuación parabólica.

$$\sigma_{\text{admisible}} = \sigma - \beta\left(\frac{L}{r}\right)^2 \tag{9.11}$$

donde

$\sigma_{\text{admisible}}$ = esfuerzo admisible, en lb/plg², o en Pa,
σ = valor del esfuerzo base, en lb/plg², o en Pa,
β = coeficiente elegido para dar la ecuación deseada,
$\frac{L}{r}$ = relación de esbeltez.

Aunque se han usado un gran número de fórmulas para columnas a-través de los años, la selección de fórmulas de diseño actualmente no es una tarea difícil. Los códigos y especificaciones para diseño proporcionan fórmulas que han probado ser dignas de confianza para muchas clases de construcción y de materiales. Por ejemplo, si se va a diseñar una columna de un edificio, las especificaciones del American Institute of Steel Construction o las del American Concrete Institute proporcionan las fórmulas, así como las restricciones impuestas para su uso. Las fórmulas para columnas en diseño de máquinas pueden obtenerse a partir

de los manuales y especificaciones en ese campo. La mayoría de las industrias han desarrollado fórmulas para diseño de columnas aplicables a sus materiales.

Para ilustrar el procedimiento básico de análisis y diseño de columnas, discutiremos dos de las fórmulas empíricas más comunes: la fórmula del AISC para acero estructural (sección 9.7) y la fórmula de J. B. Johnson (sección 9.8), que es ampliamente usada en el campo del diseño de máquinas. No se han incluido los códigos y fórmulas para otros materiales debido a que no podrían explicarse adecuadamente en una breve discusión, y la inclusión de demasiadas fórmulas tiende a hacer confusa la técnica básica del análisis y diseño de columnas.

El lector deberá darse cuenta, por supuesto, que las fórmulas presentadas en este capítulo son únicamente ejemplos de los tipos disponibles. El primer paso en el diseño de una columna consiste en escoger la fórmula más adecuada que debe usarse, teniendo en cuenta los materiales y las condiciones del problema. La ecuación de Euler, aunque sencilla y precisa, no se aplica a la mayoría de las columnas que se presentan en el diseño práctico.

9.6 Diseño de columnas

Al diseñar una columna se debe elegir primero la fórmula de esfuerzos admisibles adecuada. Como se mencionó en la sección 9.5, esto no es difícil, pues la experiencia, el material usado y los códigos y especificaciones bajo los cuales se hace el diseño, proporcionarán esta información. Cualquiera que sea la fórmula que se use, puede seguirse el procedimiento de tanteos que se describe a continuación. En el diseño, se conocen, por supuesto, la longitud, las condiciones de los extremos y la carga aplicada.

Paso 1: Se escogen las dimensiones de la columna.

Paso 2: Se determina el esfuerzo en esta columna a partir de $\sigma = P/A$.

Paso 3: Se calcula el esfuerzo admisible para esta columna mediante la fórmula usada para el esfuerzo de la columna.

Paso 4: Se comparan los esfuezos de los pasos 2 y 3. Si el esfuerzo del paso 2 es mayor que el del paso 3, se rediseña, usando otras dimensiones para la columna. Si el esfuerzo del paso 2 es considerablemente menor que el del paso 3, se rediseña para lograr una mejor aproximación.

Paso 5: Se continúa este procedimiento de tanteos hasta que se obtiene una sección satisfactoria.

Puede notarse que en la práctica rutinaria de las oficinas de diseño, generalmente se dispone de gráficas y tablas para reducir el tiempo y el esfuerzo que requiere el diseño de partes en compresión. Sin embargo, un estudio de mecánica teórica debe incluir la técnica básica de selección, de modo que los diseñadores sean capaces de manejar satisfactoriamente los casos no comunes, donde no se aplican las gráficas y tablas.

9.7 Fórmulas del AISC para columnas

El American Institute of Steel Construction (AISC) en sus especificaciones establece las fórmulas siguientes para los esfuerzos admisibles* en miembros a compresión cargados axialmente.

El esfuerzo admisible en la sección transversal de miembros a compresión cargados axialmente, cuando $K(L/r)$ (la mayor relación de esbeltez efectiva de una longitud de columna sin arriostrar) es menor que C_c, está dado por:

$$\sigma_a = \frac{[1-(KL/r^2)/2C_c^2]\sigma_y}{FS}, \tag{9.12}$$

donde

σ_a = esfuerzo admisible, en lb/plg², o en Pa,
σ_y = esfuerzo al límite de fluencia, en lb/plg², o en Pa,
FS = factor de seguridad $= \frac{5}{3} + \frac{3(L/r)}{8C_c} - \frac{(L/r)^3}{8C_c^3}$,

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}. \tag{9.13}$$

El término C_c es el valor particular de KL/r que separa las columnas largas de las intermedias. Cuando el valor de KL/r excede a C_c (columnas largas), el esfuerzo admisible está dado por

$$\sigma_a = \frac{149\,000\,000}{(KL/r)^2}. \tag{9.14}$$

El AISC especifica que la relación de esbeltez de partes a compresión sea menor que 200.

La ec. (9.12) es la fórmula de diseño para las columnas cortas e intermedias, mientras que la ec. (9.14) se aplica a las columnas largas (de Euler). El factor de seguridad para la ec. (9.12) varía desde 1.67 para columnas con pequeñas relaciones de esbeltez, hasta 1.92 para $(L/r) = C_c$. Este factor de seguridad variable toma en cuenta el hecho de que las columnas cortas fallan por aplastamiento, y las columnas largas por pandeo y procura hacer más consistentes las resistencias de las columnas en el intervalo de (L/r) usado.

La ec. (9.14) es realmente la ecuación de Euler (9.7), con $E =$ 29 000 000 lb/plg², y un factor de seguridad constante de 1.92.

La ec. (9.12) sirve para que el proyectista pueda determinar esfuerzos admisibles para aceros de diferentes resistencias, como se indica por el término que contiene el esfuerzo al límite de fluencia. Sin embargo, la mayoría de los diseños convencionales en acero, usan acero estructural dulce (con designación ASTM, A-36) que tiene un esfuerzo al límite de fluencia de 36 000 lb/plg². Debido a que el acero A-36 se usa tan

*El único cambio que hicimos en las fórmulas de AISC es la sustitución del símbolo σ por el símbolo F.

frecuentemente y a que la solución de las ecuaciones lleva mucho tiempo, en el apéndice F se tabulan los valores del esfuerzo admisible para este acero, para distintos valores de (KL/r). En el manual *Steel Construction* publicado por el American Institute of Steel Construction se pueden encontrar tablas semejantes para aceros de otras resistencias.

EJEMPLO 9.4 Determinar el esfuerzo admisible para una columna W 6 × 15 de 8 pies de longitud, cargada axialmente. Supóngase que los extremos están articulados y use acero con un esfuerzo en el límite de fluencia de 36 000 lb/plg². Comparar el valor calculado con el dado en el Apéndice F.

SOLUCION Según el Apéndice J, el menor radio de giro para esta sección es 1.46 plg. Se puede calcular que:

$$\frac{L}{r} = \frac{8 \times 12}{1.46} = 65.8$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{(2)(\pi)^2(29\ 000\ 000)}{36\ 000}} = 126.1.$$

Como el L/r real es 65.8 y es menor que C_c (L/r de **126.1**), la ec. (9.12) se usa para obtener:

$$\sigma_a = \frac{[1-(L/r)^2/2C_c^2]\sigma_y}{\frac{5}{3}+\frac{3(L/r)}{8C_c}-\frac{(L/r)^3}{8C_c^3}} = \frac{[1-(65.8)^2/2(126.1)^2]36\ 000}{\frac{5}{3}+\frac{3(65.8)}{8(126.1)}-\frac{(65.8)^3}{8(126.1)^3}}$$

$$= \frac{[1-0.137]36\ 000}{1.667+0.197-0.018} = 16\ 800 \text{ lb/plg}^2$$

El Apéndice F da σ_a = 16.84 klb/plg² para L/r = 66. ■

EJEMPLO 9.5 Resolver el ejemplo 9.4 suponiendo que la longitud es de 20 pies, en vez de 8 pies.

SOLUCION

$$\frac{L}{r} = \frac{20 \times 12}{1.46} = 164, \qquad C_c = 126.1.$$

Ya que $L/r > 126.1$, se usa la Ec. (9.14) y encontramos que:

$$\sigma_a = \frac{149\ 000\ 000}{(L/r)^2} = \frac{149\ 000\ 000}{(164)^2}, \qquad \sigma_a = 5\ 540 \text{ lb/plg}^2$$

El Apéndice F da σ_a = 5.55 klb/plg² para (L/r) = 164. ■

Problemas

En la solución de los problemas siguientes, use las fórmulas del AISC de las ecs. (7.12) a (7.14) y suponga que el acero es, según la designación del ASTM, acero estructural A-36, que tiene un esfuerzo en el límite de fluencia de 36 000 lb/plg².

9.19 ¿Cuáles son los esfuerzos de compresión admisible para una columna W 8 × 31 si la longitud efectiva es:

(a) 9 pies, (b) 18 pies, (c) 27 pies?

Compare los valores calculados con los dados en el Apéndice F.

9.20 Resolver el problema 9.19 cuando la columna es una W 6 × 25 y las longitudes efectivas son:

(a) 8 pies, (b) 16 pies, (c) 24 pies.

9.21 Determinar la carga de compresión axial admisible para una columna W 6 × 20 cuya longitud efectiva es:

(a) 8 pies, (b) 16 pies.

9.22 Determinar la carga de compresión axial admisible para una columna W 8 × 35 cuya longitud efectiva es:

(a) 12 pies, (b) 18 pies.

9.23 Determinar la carga de comprensión axial admisible para un ángulo de 4 × 4 × ½, si la longitud efectiva es:

(a) 5 pies, (b) 10 pies.

9.24 Resolver el problema 9.23, suponiendo que el ángulo es de 5 × 3 × ½ plg.

9.25 Determinar la carga de compresión axial admisible en un tubo estándar de acero de 4 plg, cuando la longitud efectiva es:

(a) 10 pies, (b) 16 pies.

9.8 Fórmula de J. B. Johnson

El análisis de las partes a compresión en máquinas sigue los mismos principios descritos en las secciones anteriores. Por supuesto, las fórmulas de columnas usadas dependen del material y de la función de la parte. Una de las fórmulas para columnas intermedias más ampliamente usada en diseño de máquinas en la fórmula de J.B. Johnson se da en la ec. (9.15). La fórmula de Euler, ec. (9.7) se usa para columnas largas. La demarcación entre las dos es, otra vez, el valor de L/r dado por la ec. (9.13). La fórmula de Johnson es:

$$\sigma_a = \frac{[1 - \sigma_y(KL/r)^2/4\pi^2 E]\sigma_y}{\text{FS}} = \frac{[1 - (KL/r)^2/2C_c^2]\sigma_y}{\text{FS}} \tag{9.15}$$

Los términos son los mismos que los descritos en la sección 9.7.

Es interesante observar que la fórmula de J.B. Johnson para diseño de máquinas, ec. (9.15), y la fórmula del AISC para diseño de acero estructural, ec. (9.12), son idénticas, excepto en lo que se refiere al factor de seguridad. En diseño de acero para edificios se considera que las condiciones de servicio están más estandarizadas que en diseño de máquinas. Por este motivo, se justifica un factor de seguridad consistente. Como se estableció en la sección 9.7, dicho factor varía desde 1.67 hasta 1.92.

Es más difícil estandarizar el factor de seguridad en diseño de máquinas debido al carácter variable de las condiciones ambientales y de

servicio. Sin embargo, para condiciones generalmente constantes y para materiales promedio, puede usarse un factor de seguridad de 2 a 2.5, como valores razonables.

EJEMPLO 9.6 Una biela de 9 plg de longitud tiene una sección transversal circular con un diámetro de 3/8 plg. Determinar la carga de compresión admisible que puede soportar si se hace de acero que tenga una resistencia en el punto de fluencia de 48 000 lb/plg². Supóngase que los extremos son articulados y úsese un factor de seguridad de 2.0.

SOLUCION El primer paso consiste en determinar si se aplica la fórmula de J. B. Johnson (9.15) o la fórmula de Euler (9.7). Esto se hace comparando la L/r de la biela con la de la ec. (9.13):

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(\pi/64)D^4}{(\pi/4)D^2}}$$

$$= \frac{D}{4} = \frac{3/8}{4} = \frac{3}{32}\,\text{plg},$$

$$\frac{L}{r} = \frac{9}{3/32} = 96.$$

De la ec. (9.13),

$$C_c = \frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(30\times 10^6)}{48\,000}} = 111.$$

Esta columna cae en el tipo intermedio, y el esfuerzo admisible puede determinarse a partir de la ec. (9.15) como sigue:

$$\sigma_a = \frac{[1-(KL/r)^2/2C_c^2]\sigma_y}{\text{FS}} = \frac{[1-(96)^2/2(111)^2]48\,000}{2}$$

$$= 15\,000\ \text{lb/plg}^2.$$

La carga de compresión admisible es:

$$P_a = \sigma_a A = (15\,000)\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2\right]$$

$$P_a = 1\,660\ \text{lb}. \quad ■$$

Problemas

9.26 Una biela tiene una sección transversal rectangular de 25 mm de ancho y 10 mm de espesor. El esfuerzo en el punto de fluencia es de 248 MPa y las longitudes efectivas son:

(a) 150 mm, (b) 300 mm, (c) 450 mm.

Determinar el esfuerzo de compresión último para cada longitud.

9.27 Una barra de sección transversal circular de 3/8 plg de diámetro soporta una fuerza de compresión axial. El esfuerzo en el punto de fluencia es de 50 000 lb/plg² y la longitud efectiva es:

(a) 9 plg, (b) 18 plg, (c) 27 plg.

Determinar los esfuerzos de compresión últimos correspondientes.

9.28 Determinar las cargas axiales admisibles que puede soportar una barra de sección transversal rectangular de 50 mm × 20 mm, suponiendo que el esfuerzo en el punto de fluencia del acero es de 248 MP el factor de seguridad es de 2, y la longitud efectiva es:

(a) 0.5, (b) 1.0 m.

9.29 Un tubo de acero de sección transversal rectangular de 1½ por 1 plg tiene una espesor uniforme de 0.20 plg. El punto de fluencia del material es de 72 000 lb/plg², el factor de seguridad es 2.75, y la longitud efectiva es:

(a) 2 pies, (b) 5 pies.

Determinar las cargas de compresión axiales admisibles.

9.30 La varilla del pistón de una bomba tiene una longitud efectiva de 18 plg y un diámetro de 1 plg. El esfuerzo en el límite de fluencia del acero es de 60 000 lb/plg², y se usa un factor de seguridad de 3. Determinar la presión máxima que puede permitirse en el fluido en un cilindro de 6 plg de diámetro (Fig. P9.30).

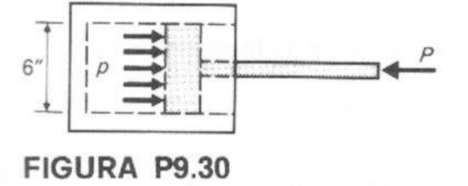


FIGURA P9.30

9.9 Condiciones de los extremos en el diseño de columnas

La base teórica de la teoría de las columnas se funda en que los extremos de la columna estén articulados por medio de pasadores sin fricción, estén libres, o estén completamente empotrados. Una pregunta que se presenta frecuentemente en el diseño de las columnas, es la de determinar la longitud efectiva de la columna. En otras palabras, el proyectista debe estimar el grado de fijación en los extremos de la columna, pues las condiciones ideales en los extremos rara vez se cumplen en la práctica.

Si las condiciones en los extremos de la columna pueden estimarse o controlarse con precisión, la longitud efectiva podrá conocerse también. Sin embargo, este caso es raro. Muchos proyectistas prefieren usar el valor conservador de $K = 1$, excepto, por supuesto, para el caso de un extremo empotrado y un extremo libre. Otros proyectistas hacen una estimación del factor de restricción de los extremos. Sin embargo, muy pocos y rara vez usan valores de K menores que los comprendidos entre 0.65 y 0.75 para columnas con extremos empotrados, y más bien usan valores mayores para las otras condiciones. Para facilitar al proyectista hacer una selección razonable del valor de diseño para la longitud efectiva, la Tabla 9.1 da los valores de diseño sugeridos y recomendados por el Column Research Council.

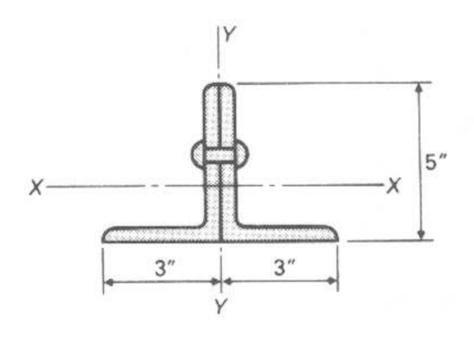
TABLA 9.1*

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
La forma pandeada de la columna se indica con la línea interrumpida.						
Valor teórico de *K*	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valores recomendados para diseño cuando se presentan condiciones aproximadas a las ideales.	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
Nomenclatura para las condiciones de los extremos.	Rotación fija y translación fija Rotación libre y translación fija Rotación fija y translación libre Rotación libre y translación libre					

* Cortesía del AISC.

Problema ilustrativo 9.1

Dos ángulos de 5 × 3 × $\frac{5}{16}$ plg están remachados espalda con espalda (véase figura) para formar una columna. La longitud de la columna es: (a) 6 pies, (b) 12 pies, (c) 18 pies. Determinar la carga admisible. Usese acero con un esfuerzo en el límite de fluencia de 36 000 lb/plg² y supóngase extremos articulados. Se permite usar el área total del miembro remachado cuando está sometido a compresión; es decir, el área de la columna es la de los ángulos sin deducir los agujeros para los remaches.



Columna

SOLUCION El primer paso consiste en determinar el menor radio de giro. Aquí $r_X = 1.61$ plg (según el Apéndice J) y r_y se calcula así:

$$I_y = I_0 + Ad^2 = [1.8 + (2.40)(0.68)^2]2; \qquad I_y = 5.82 \text{ plg}^4$$

$$r_y = \sqrt{I_y/A} = \sqrt{5.82/4.80} = \sqrt{1.21}; \qquad r_y = 1.10 \text{ plg.}$$

En este caso r_y es mínimo, y la falla ocurriría alrededor del eje y-y.

a) $\frac{L}{r} = \frac{(6)(12)}{1.10} = 66.0$

Según el Apéndice F, $\sigma_a = 16.84$ klb/plg². La carga máxima P es, entonces:

$$P = \sigma_a A = (16.84)(4.80); \qquad P = 81.0 \text{ klb}$$

b) $\frac{L}{r} = \frac{(12)(12)}{1.10} = 132.$

Según el Apéndice F, $\sigma_a = 8.57$ klb/plg² y

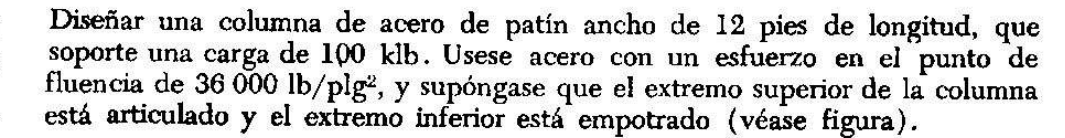
$$P = \sigma_a A = (8.57)(4.80); \qquad P = 41.1 \text{ klb.}$$

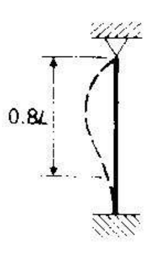
c) $\frac{L}{r} = \frac{18(12)}{1.10} = 198.$

Según el Apéndice F, $\sigma_a = 3.81$ klb/plg² y

$$P = \sigma_a A = 3.81(4.80); \qquad P = 18.3 \text{ klb.}$$

Problema ilustrativo 9.2


Diseñar una columna de acero de patín ancho de 12 pies de longitud, que soporte una carga de 100 klb. Usese acero con un esfuerzo en el punto de fluencia de 36 000 lb/plg^2, y supóngase que el extremo superior de la columna está articulado y el extremo inferior está empotrado (véase figura).



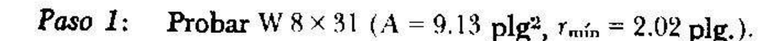
columna W

SOLUCION Normalmente los perfiles relativamente cuadrados de las secciones de patín ancho son las secciones de columnas más eficientes. Es decir, las secciones de 6 × 6, 8 × 8, 10 × 10, 10 × 8, etc. son mejores que las angostas y profundas que se usan principalmente como vigas. Por tanto, para este problema, se limitará la elección a secciones cuyas secciones transversales son relativamente cuadradas.

El problema de diseñar la columna seguirá los pasos descritos en la sección 9.6.

Según la Tabla 9.1, la longitud efectiva que debe usarse cuando se tienen aproximadamente las condiciones ideales es de $0.80L = (0.80)\ (12) = 9.6$ pies.


PRIMER TANTEO


Paso 1: Probar W 8 × 31 ($A = 9.13$ plg^2, $r_{mín} = 2.02$ plg.).

Paso 2: $\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{100}{9.13} = 11.0$ klb/plg^2

Paso 3: $\dfrac{L}{r} = \dfrac{(9.6)(12)}{2.02} = 57.1.$

Según la Tabla de Esfuerzos admisibles, Apéndice F,

$\sigma_a = 17.7$ klb/plg^2.

Paso 4: La columna es segura, pues $\sigma = 11.0$ klb/plg^2 $< \sigma_a = 17.7$ klb/plg^2. Sin embargo, puede seleccionarse una sección más económica.

SEGUNDO TANTEO

Paso 1: Probar W 6 × 20 ($A = 5.87$ plg^2, $r_{mín} = 1.50$ plg.).

Paso 2: $\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{100}{5.87} = 17.0$ klb/plg^2

Paso 3: $\dfrac{L}{r} = \dfrac{(9.6)(12)}{1.50} = 76.8$

Según el Apéndice F, $\sigma_a = 15.71$ klb/plg^2.

Paso 4: La columna no es satisfactoria ya que $\sigma = 17.0$ klb/plg^2 $> \sigma_a$ 15.7 klb/plg^2

TERCER TANTEO

Paso 1: Probar W 6 × 25 ($A = 7.34$ plg^2, $r_{mín} = 1.52$ plg.).

Paso 2: $\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{100}{7.34} = 13.6$ klb/plg^2

Paso 3: $\frac{L}{r} = \frac{(9.6)(12)}{1.52} = 75.8.$

Según el Apéndice F, σ_a = 15.82 klb/plg^2

Paso 4: Esta columna es satisfactoria pues σ = 13.6 klb/plg^2. σ_a = 15.8 klb/plg^2.

CUARTO TANTEO

Paso 1: Probar W 8 × 24 ($A = 7.08$ plg^2, $r_{mín} = 1.61$ plg.).

Paso 2: $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100}{7.08} = 14.1$ klb/plg^2

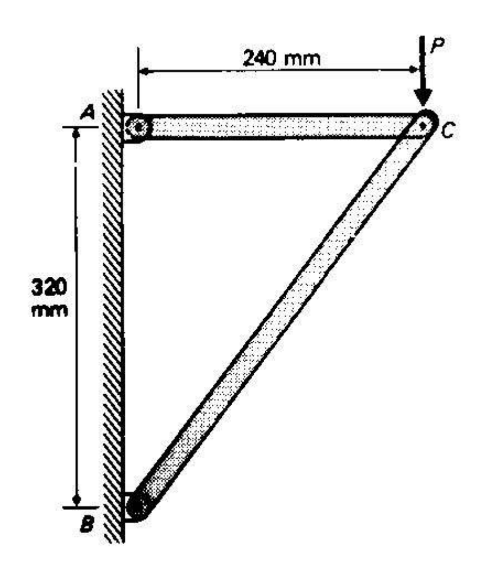
Paso 3: $\frac{L}{r} = \frac{(9.6)(12)}{1.61} = 71.5.$

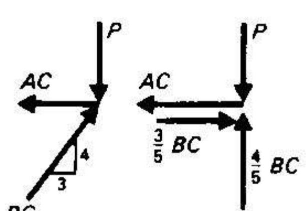
Según el Apéndice F, σ_a = 16.27 klb=plg^2.

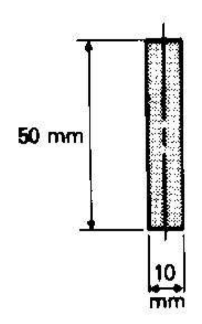
Paso 4: Esta columna es satisfactoria, pues σ = 14.2 klb/plg^2 < σ_a = 16.27 klb/plg^2.

Para los fines de cumplir con los procedimientos y principios de diseño, ya sea la W 8 × 24 ó la W 6 × 25 serían satisfactorias para soportar la carga de 100 klb. Aunque la W 6 × 25 es 1 lb/pie más pesada, probablemente sería más satisfactoria con respecto a los detalles prácticos de construcción.

Problema Ilustrativo 9.3







Determinar la carga máxima P que puede aplicarse a la ménsula indicada en la figura. El miembro AC es una barra de acero de 8 mm × 50 mm, y BC está compuesta de dos barras de acero de 10 mm × 50 mm. Supóngase que los agujeros para los pasadores son de 20 mm de diámetro y que éstos son lo suficientemente resistentes de modo que no hay necesidad de tenerlos en cuenta para el análisis. El esfuerzo de tensión admisible es de 150 MPa, y el esfuerzo de compresión admisible está dado por las ecuaciones (9.15) ó (9.7), con un factor de seguridad de 2.5.

SOLUCION Las fuerzas en AC y BC pueden calcularse por estática, como sigue:

$$\sum F_y = 0: \qquad \tfrac{4}{5}BC = P$$

$$BC = \tfrac{5}{4}P \text{ (compresión).}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad AC = \tfrac{3}{5}BC = \tfrac{3}{5}(\tfrac{5}{4}P)$$

$$AC = \tfrac{3}{4}P \text{ (tensión).}$$

Calculamos la carga P con base en la resistencia a tensión del miembro AC:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad AC = \sigma A = (150 \times 10^6)(8 \times 10^{-3})(50 - 20) \times (10^{-3})$$

$$= 36\,000 \text{ N}.$$

Calculamos la carga de seguridad basada en la tensión en AC:

$$AC = \tfrac{3}{4}P; \qquad P = \tfrac{4}{3}AC = \tfrac{4}{3}(36\,000)$$

$$P = 48\,000 \text{ N}.$$

Calculamos la carga P con base en la resistencia a la compresión del miembro BC:

Como las dos barras se pandearán independientemente una de otra, el esfuerza admisible se basa en la resistencia de una sola barra. La fuerza total será la soportada por ambas barras. Así:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}bd^3}{bd}} = \frac{d}{\sqrt{12}} = \frac{10 \times 10^{-3}}{\sqrt{12}}$$

$$r = 2.89 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{L}{r} = \frac{400 \times 10^{-3}}{2.89 \times 10^{-3}} = 138.$$

Una relación de esbeltez de $L/r = 138$ es mayor que el valor $L/r = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_y} = 126.1$. Por consiguiente, esta columna está en el intervalo de Euler, y el esfuerzo admisible se obtiene según la ecuación (9.7) con un factor de seguridad de 2.5. Así

$$\sigma_{\text{adm.}} = \frac{\sigma_{cr}}{\text{FS}} = \frac{\pi^2 E/(L/r)^2}{2.5}$$

$$\sigma_{\text{adm.}} = \frac{\pi^2(200 \times 10^9)/(138)^2}{2.5}$$

$$\sigma_{\text{adm.}} = 41.4 \text{ MPa}.$$

La fuerza admisible que puede soportar el miembro BC es

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad BC = \sigma A = (41.4 \times 10^6)(2)(50 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-3})$$

$$BC = 41,400 \text{ N}$$

La carga de seguridad basada en la compresión de BC es

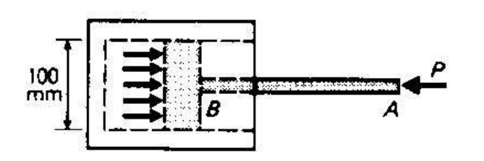
$$BC = \tfrac{5}{4}P; \qquad P = \tfrac{4}{5}(41\,400)$$

$$P = 33\,120 \text{ N}.$$

Por consiguiente, el valor admisible de P es de 33 120 N. Rige la resistencia a la compresión.

Problema ilustrativo 9.4

Diseñar el vástago del émbolo de un pistón, de sección circular, para un cilindro hidráulico de 100 mm de diámetro (véase figura), suponiendo que la presión hidráulica máxima es de 20 MPa. La longitud de la varilla es de 0.9 m, considerando el extremo A como articulado y el extremo B del pistón teóricamente empotrado. Usese un acero que tenga un esfuerzo en el límite de fluencia de 330 MPa. El factor de seguridad es de 2.5.



Varilla del pistón

SOLUCION La fuerza axial P es la presión hidráulica multiplicada por el área del pistón:

$$P = \text{Presión} \times \text{área} = (20 \times 10^6)(\pi/4)(100 \times 10^{-3})^2 = 157 \text{ kN}.$$

Debe estimarse el grado de fijación de los extremos. En condiciones normales usamos el factor $K = 0.8$ según la Tabla 9.1.

Se seguirán otra vez los pasos de la sección 9.6. El esfuerzo admisible se determinará ya sea por la ecuación (9.7) o por la (9.15).

PRIMER TANTEO

Paso 1: Probar una varilla de 30 mm de diámetro ($A = 707 \times 10^{-6}$ m^2, $r = D/4 = 7.5 \times 10^{-3}$ m).

Paso 2: $\sigma = P/A = (157 \times 10^3)/(707 \times 10^{-6}) = 222 \times 10^6$ N/m^2.

Paso 3: $KL/r = (0.80)(0.9)/(7.5 \times 10^{-3}) = 96$.

Según la ec. (9.13),

$$\frac{KL}{r} = C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{330 \times 10^6}} = 109.$$

Como $KL/r = 96 < 109$, usamos la ecuación (9.15) y obtenemos

$$\sigma_a = \frac{[1 - (KL/r)^2/2C_c^2]\sigma_y}{\text{FS}} = \frac{[1 - (96)^2/2(109)^2]330}{2.5}$$
$$= 80.8 \text{ MPa}.$$

Paso 4: La varilla está sobreesforzada pues $\sigma = 222$ MPa $> \sigma_a = 80.8$ MPa.

SEGUNDO TANTEO

Paso 1: Probar una varilla de 45 mm de diámetro ($A = 1\,590 \times 10^{-6}$ m^2, $r = D/4 = 11.25 \times 10^{-3}$ m).

Paso 2: $\sigma = P/A = (157 \times 10^3)/(1\,590 \times 10^{-6}) = 98.7 \times 10^6$ N/m^2.

Paso 3: $KL/r = (0.80)(0.9)/(11.25 \times 10^{-3}) = 64$, $\quad KL/r < C_c = 109$.

Otra vez usamos la ec. (9.15) para obtener

$$\sigma_a = \frac{[1 - (KL/r)^2/2C_c^2]\sigma_y}{\text{FS}} = \frac{[1 - (64)^2/2(109)^2]330}{2.5}$$
$$= 109 \text{ MPa}.$$

Paso 4: La varilla es aceptable ya que $\sigma = 98.7$ MPa $\overline{<}$ $\sigma_a = 109$ MPa.

Como se obtuvo una aproximación bastante buena entre el esfuerzo real y el esfuerzo admisible, y debido a que $\sigma < \sigma_a$, el diámetro de la varilla debería ser de 45 mm. Si el diseño justifica emplear una varilla menor para el pistón, podría efectuarse un tercer tanteo eligiendo un diámetro menor de 45 mm. Este proceso de tanteos se continúa hasta que se encuentra un diseño aceptable en términos tanto de resistencia como de economía.

Problemas

En los problemas del 9.31 al 9.42 úsense las fórmulas del AISC de las ecs. (9.12) y (9.14). En estos problemas, supóngase el uso de acero A-36 que tiene un esfuerzo al límite de fluencia de 36 000 lb/plg², y supóngase los extremos articulados, a menos que se especifique otra condición.

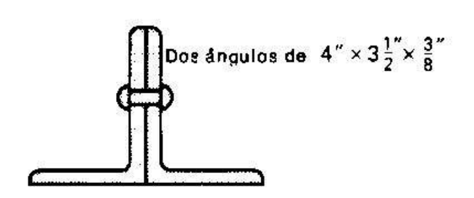


FIGURA P9.31

9.31 Dos ángulos de 4 × 3½ × ⅜ están remachados con los lados largos espalda con espalda formando una columna (Fig. P9.31). Determinar las cargas admisibles para la columna cuando la longitud es de: (a) 4 pies, (b) 8 pies, (c) 12 pies.

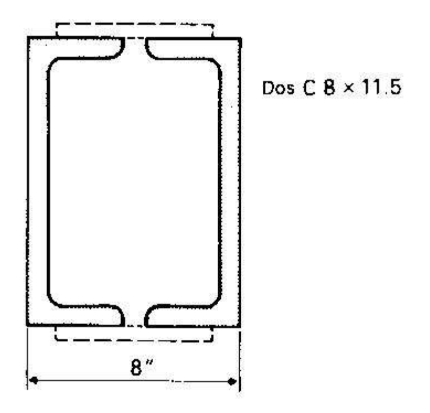


FIGURA P9.32

9.32 Una columna de 16 pies está formada de dos C 8 × 11.5 colocados a 8 plg de separación, como se muestra en la Fig. P9.32. Las canales están unidas a intervalos suficientes para actuar como una unidad. Determinar la carga admisible que puede soportar esta columna.

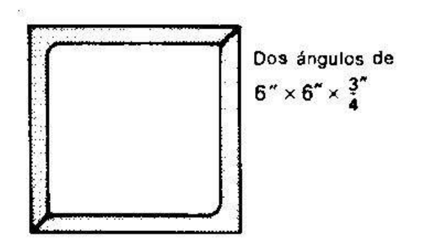


FIGURA P9.33

9.33 Una columna de 12 pies de longitud, empotrada en la parte superior y simplemente apoyada en la base, está formada con dos ángulos de 6 × 6 × ¾ plg en forma de caja, como se muestra en la Fig. P9.33. (a). Determinar la carga de compresión admisible P que puede aplicarse cuando los ángulos están soldados para actuar como una unidad. (b) ¿Cuál sería la carga de compresión admisible si los ángulos no estuvieran unidos, sino actuando independientemente?

9.34 Diseñar una columna de acero de patín ancho, de 10 pies de longitud, para que soporte una carga de 75 000 lb.

9.35 Diseñar una columna de acero de patín ancho, de 16 pies de longitud para soportar una carga de 140 klb. Supóngase que el extremo superior está empotrado y la base está articulada.

9.36 Diseñar un tubo estándar de acero, de 9 pies de longitud para soportar una carga de compresión de 96 klb.

9.37 Se va a usar un tubo estándar de acero como columna con su extremo superior libre y su base empotrada. La longitud del tubo es de 6 pies y la carga de compresión axial es de 48 000 lb. Diseñar la columna.

9.38 Se va a fabricar un miembro a compresión con un solo ángulo de lados iguales. Si la carga axial es de 42 klb y la longitud sin apoyo es de 6 pies, diseñar los ángulos suponiendo que: (a) ambos extremos están articulados, y (b) ambos extremos están empotrados.

9.39 Diseñar una columna que va a fabricarse con un solo ángulo de lados iguales. La carga axial es de 27 000 lb y la longitud sin apoyo es de 8 pies.

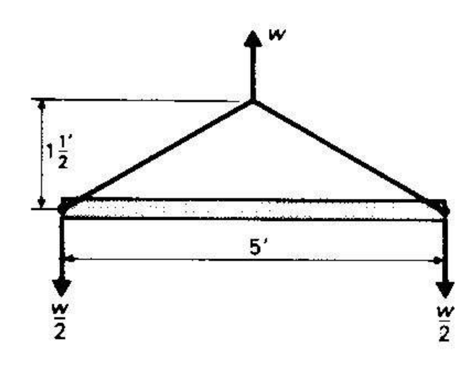


FIGURA P9.40

9.40 El miembro horizontal del mecanismo para izar mostrado en la Fig. P9.40 es un tubo estándar de acero de 3 plg. Si suponemos que el tubo gobierna el diseño, ¿cuál es el peso máximo que puede levantarse?

9.41 ¿Qué diámetro de tubo estándar de acero se necesita para que el mecanismo mostrado en la Fig. P9.40 pueda soportar 10 tons?

9.42 Un anuncio de 6 pies de alto y 10 pies de longitud está apoyado en su base mediante la acción de una articulación y los miembros *AB* y *CD* fabricados cada uno de ellos de dos ángulos de lados desiguales (Fig. P9.42). Diseñar estos ángulos, suponiendo que la presión del viento contra el anuncio es de 20 lb/pie².

En los problemas del **9.43** al **9.53**, úsese la fórmula de J. B. Johnson, ecuación (9.15), o la fórmula de Euler, ecuación (9.7). A menos que se especifique de otra manera, considérese que los extremos están articulados.

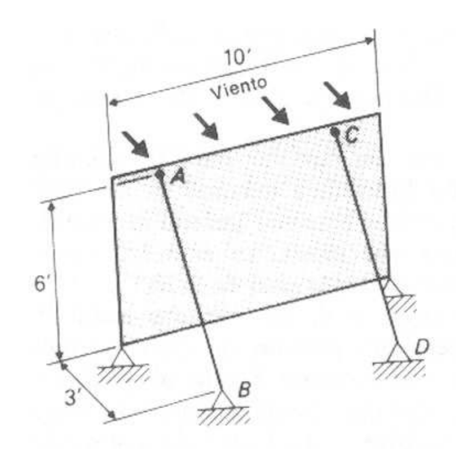


FIGURA P9.42

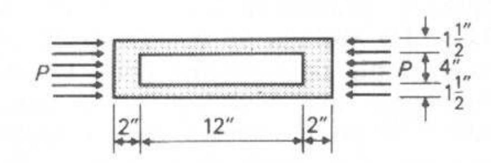


FIGURA P9.43

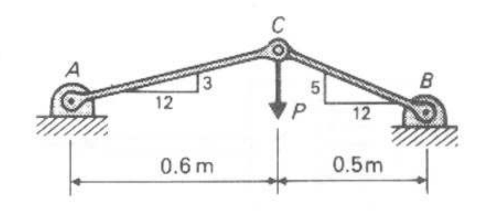


FIGURA P9.44

9.43 En la Fig. P9.43 se muestra un marco de ¾ plg de espesor que soporta una carga distribuida de compresión. El acero tiene un esfuerzo en el límite de fluencia de 60 000 lb/plg² y se usa un factor de seguridad de 2.75. Determinar la carga total que puede aplicarse en los extremos.

9.44 El mecanismo mostrado en la Fig. P9.44 se hace de barras de acero de sección transversal circular macizas, de 20 mm de diámetro. Determinar la carga máxima P que podría aplicarse si el acero tuviera un esfuerzo al límite de fluencia de 248 MPa.

9.45 El miembro BD del mecanismo de sujeción mostrado en la Fig. P9.45 está formado por dos tiras de metal de acero, de 1 plg. × ⅜ plg. Supóngase que el esfuerzo en el límite de fluencia del acero es de 36 000 lb/plg² y el factor de seguridad es de 2.5. Determinar la fuerza máxima P y la presión resultante Q que puede aplicarse cuando la resistencia del mecanismo está limitada por la resistencia de BD.

9.46 El mecanismo mostrado en la Fig. P9.45 debe ejercer una fuerza de sujeción de $Q = 3000$ lb. El miembro BD está formado por dos barras de 1½ plg de ancho; el esfuerzo al límite de fluencia del acero es de 36 000 lb/plg², y el factor de seguridad es de 2.5. Determinar el espesor necesario.

9.47 Diseñar una columna cuadrada de 0.6 m de longitud que soporta una carga de 40 kN. Usese un acero que tenga un esfuerzo al límite de fluencia de 410 MPa y un factor de seguridad de 3.

9.48 Una columna de 2 m de longitud soporta una carga de compresión axial de 20 kN. Diseñar una columna de sección transversal rectangular cuyo ancho es la mitad del espesor. Usese acero con un esfuerzo en el punto de fluencia de 320 MPa y un factor de seguridad de 2.5. La relación L/r no debe exceder de 200.

9.49 La parte BC del mecanismo mostrado en la Fig. P9.49 está formada por dos tiras de metal de acero, que actúan independientemente una de otra. El espesor de estas soleras es de 10 mm. Diseñarlas usando un acero que tenga un esfuerzo en el punto de fluencia de 248 MPa y un factor de seguridad de 2.

9.50 La palanca acodada mostrada en la Fig. P9.50 ejerce una fuerza $Q = 40$ kN. Determinar el espesor necesario de las barras si su ancho es de 140 mm. Usese un acero con un esfuerzo en el punto de fluencia de 320 MPa y un factor de seguridad de 2.

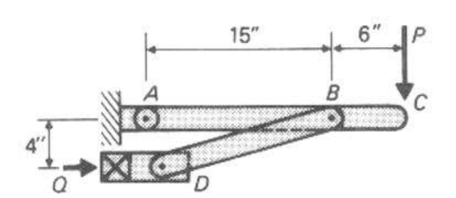


FIGURA P9.45

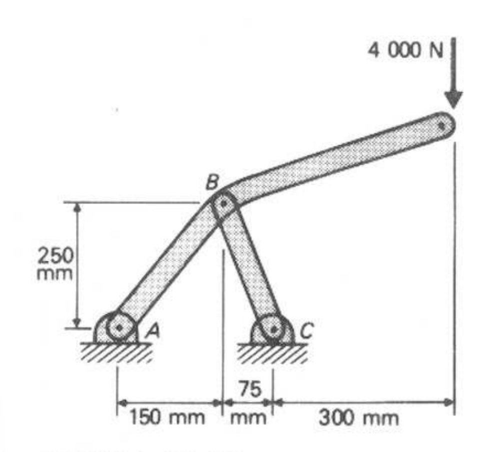


FIGURA P9.49

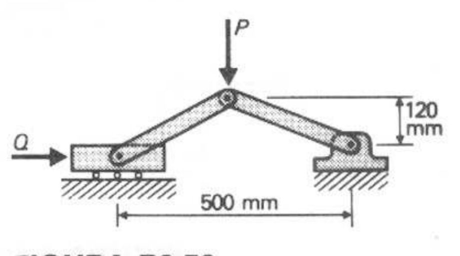


FIGURA P9.50

9.51 Determinar la fuerza máxima de sujeción Q que puede aplicarse mediante la palanca acodada de la Fig. P9.50. Las barras son de acero, de 50 mm × 12 mm, con un esfuerzo en el punto de fluencia de 248 MPa. Usese un factor de seguridad de 2.25.

9.52 Diseñar el vástago de un émbolo de sección circular para un cilindro hidráulico de 5 plg de diámetro, si la presión hidráulica máxima es de 1000 lb/plg². La longitud del vástago es de 48 plg, con el extremo guiado articulado y el otro extremo empotrado. Usese un acero que tenga un esfuerzo en el punto de fluencia de 72 000 lb/plg² y un factor de seguridad de 2.75.

9.53 Un vástago de émbolo de 27 plg de largo y de un cilindro hidráulico de 6 plg de diámetro (Fig. P9.53) ejerce una presión de 500 lb/plg². Supóngase que el vástago está empotrado en el extremo ligado al pistón y articulado en el extremo guiado. Diseñar el vástago. Usese acero que tenga un esfuerzo al límite de fluencia de 54 000 lb/plg² y un factor de seguridad de 2.5.

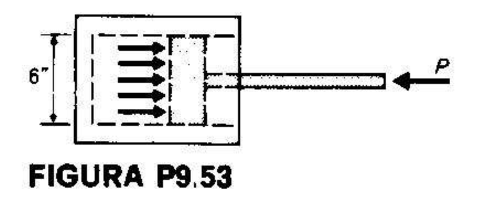


FIGURA P9.53

9.10 Columnas cargadas excéntricamente y columnas viga

En la discusión de esfuerzos combinados presentada en las secciones 6.1 a 6.4 supusimos que el momento secundario resultante de la deflexión era pequeño y podría despreciarse. Para miembros a tensión o para miembros a compresión cortos (con relación de esbeltez pequeña) que son los que se discutieron, esto era perfectamente aceptable. Sin embargo, cuando un miembro se hace relativamente flexible, las cargas axiales tienen un efecto más significativo.

Consideremos, por ejemplo, los miembros indicados en la Fig. 9.11. En esta figura, las líneas interrumpidas indican la deflexión producida por el momento flexionante, sólo, mientras que las líneas gruesas indican la posición deformada final, del miembro. En la Fig. 9.11 (a) la deflexión final (y por consiguiente, el momento flexionante y los esfuerzos) se reduce debido a la carga axial de tensión. Sin embargo, en la columna viga de la Fig. 9.11 (b) y en la columna cargada excéntricamente de la Fig. 9.11 (c), la deflexión final y los esfuerzos se incrementan debido a la carga axial.

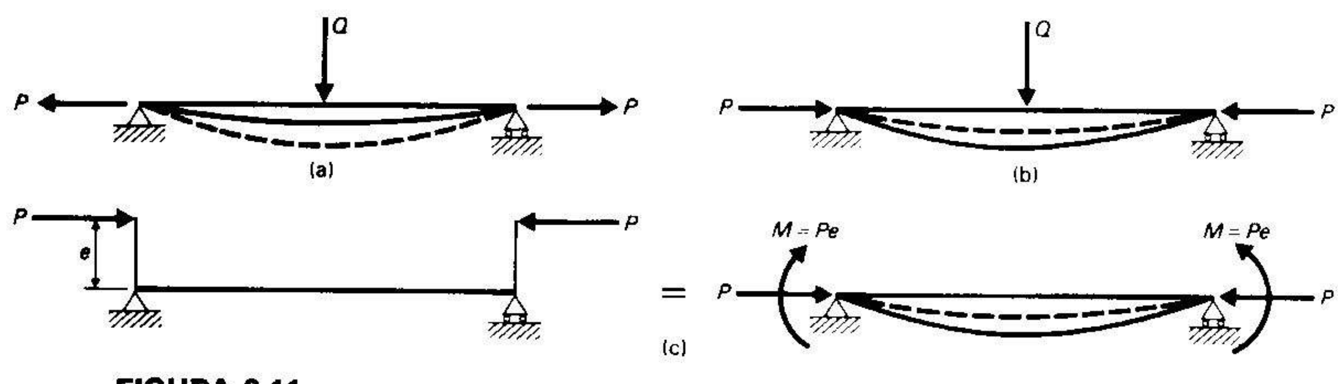


FIGURA 9.11

Si el momento secundario resultante de las fuerzas axiales y la deflexión son significativos, no se aplica el método de superposición. La teoría de esto queda más allá del alcance de este libro, ya que no incluimos aquí las relaciones no lineales que existen entre las cargas y las deflexiones. Sin embargo, aunque este tipo de problema es difícil de analizar teóricamente, las columnas viga o las columnas cargadas excéntricamente son relativamente fáciles de diseñar.

Hay dos enfoques generales para el diseño de columnas cargadas excéntricamente y para columnas viga, ambos utilizan el método de tanteos. El primer método es conservativo ya que se usa la relación básica $\sigma = P/A \pm Mc/I$. El esfuerzo admisible se toma como el esfuerzo admisible básico de la columna para la relación de esbeltez particular. El segundo método reconoce que las columnas y las vigas tienen esfuerzos admisibles diferentes, y estas diferencias se toman en cuenta al proporcionar la sección. Las especificaciones del AISC proporcionan fórmulas interactivas adecuadas que, entre otras cosas, incluyen el efecto del momento secundario resultante proveniente de la carga axial. Estas fórmulas no se presentan aquí, pero el lector interesado puede recurrir a las últimas especificaciones del AISC para conocer las fórmulas y sus limitaciones.

EJEMPLO 9.7 Diseñar una columna de acero de patín ancho, de 10 pies de longitud, para soportar una carga de 100 klb con una excentricidad de 3 plg en la dirección indicada en la Fig. 9.12. Usar el enfoque "conservativo" descrito anteriormente y los esfuerzos en las columnas proporcionados por las ecuaciones (9.12) ó (9.14), y el Apéndice F. Supóngase que los extremos están articulados.

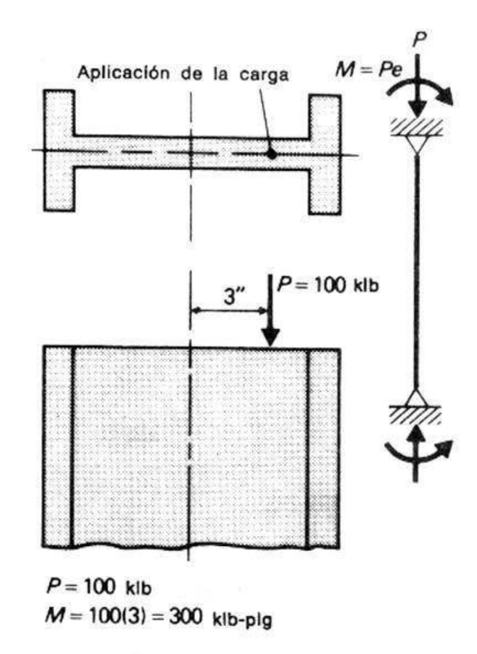


FIGURA 9.12

SOLUCION Como ya se describió anteriormente en este capítulo, este diseño se hace por tanteos.

PRIMER TANTEO

Probamos una viga W 8 × 35 ($A = 10.30$ plg², $S = I/c = 31.2$ plg³, $r_{mín} = 2.03$ plg.):

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} = -\frac{100}{10.30} - \frac{(300)}{31.2}$$

$$= -9.7 - 9.62 = -19.39 \text{ klb/plg}^2 \text{ (compresión)};$$

$$\frac{L}{r} = \frac{10 \times 12}{2.03} = 59; \qquad \sigma_a = -17.53 \text{ klb/plg}^2$$

El resultado no es satisfactorio, ya que

$$\sigma = 19.32 \text{ klb/plg}^2 > \sigma_a = 17.53 \text{ klb/plg}^2.$$

SEGUNDO TANTEO

Probamos una W 10 × 45 ($A = 13.3$ plg², $S = I/c = 49.1$ plg³, $r_{mín} = 2.01$ plg.).

Hallamos que

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} = -\frac{100}{13.24} - \frac{300}{49.1}$$
$$= -7.52 - 6.10 = 13.3 \text{ klb/plg}^2 \text{ (compresión)};$$
$$\frac{KL}{r} = \frac{10 \times 12}{2.01} = 59.7; \qquad \sigma_a = -17.43 \text{ klb/plg}^2.$$

Esta sección es aceptable, ya que

$$\sigma = 13.62 \text{ klb/plg}^2 < \sigma_a = 17.43 \text{ klb/plg}^2$$

Aunque este esfuerzo está dentro del rango admisible, deberíamos examinar otra sección para ver si existe otra solución más económica.

TERCER TANTEO

Probamos una W 12 × 40 ($A = 11.8$ plg², $S = I/c = 51.9$ plg³ $r_{mín} = 1.93$ plg.). Calculamos que:

$$\sigma = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} = -\frac{100}{11.8} - \frac{300}{51.9}$$
$$= -8.47 - 5.80 = 14.27 \text{ klb/plg}^2 \text{ (compresión)};$$
$$\frac{KL}{r} = \frac{10 \times 12}{1.93} = 62.2; \qquad \sigma_a = -17.22 \text{ klb/plg}^2.$$

Esta sección también es satisfactoria ya que

$$\sigma = 14.27 \text{ klb/plg}^2 < \sigma_a = 17.22 \text{ klb/plg}^2.$$

Parece ser que una viga W 12 × 40 tiene la sección más ligera que satisface los requisitos de esfuerzo dados aquí. ■

Problemas

9.54 Una columna W 8 × 31 de 10 pies de longitud soporta una carga aplicada a lo largo de un patín. Suponiendo los extremos articulados, determinar la carga admisible que puede aplicarse.

9.55 Una columna hecha de un tubo estándar de acero de 6 plg de diámetro y 8 pies de longitud soporta una carga excéntrica. ¿Cuál es la carga admisible para cada una de las excentricidades siguientes?

a) 0 plg, b) 2 plg, c) 4 plg

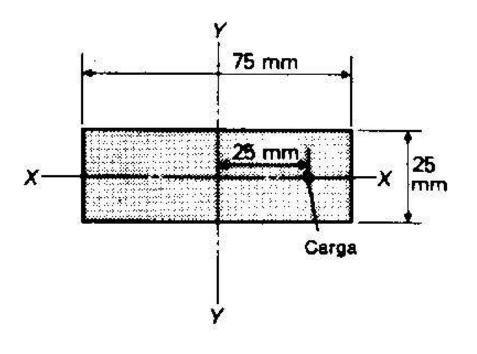


FIGURA P9.56

9.56 Una varilla de acero de 25 mm × 75 mm de sección transversal y de 500 mm de longitud soporta una carga aplicada con una excentricidad de 25 mm a lo largo del eje *X-X*, como se indica en la Fig. P9.56. Determinar la carga admisible. Supóngase que se impide el pandeo en la dirección más débil.

9.57 Una columna hecha de un tubo estándar de acero, de 7 pies de longitud soporta una carga de 25 klb, que se aplica con una excentricidad de 3 plg. Diseñar la columna.

9.58 Diseñar una columna de acero de patín ancho, de 8 pies de longitud para soportar una carga de 140 klb, con una excentricidad de 4 plg. Supóngase que los extremos están articulados.

9.59 Diseñar una columna de acero de patín ancho, de 10 pies de longitud para soportar una carga de 80 klb aplicada a lo largo del patín de la columna.

10

Otras aplicaciones del esfuerzo y la deformación

En los capítulos 2 y 3 discutimos la teoría y algunas aplicaciones del esfuerzo y la deformación en miembros cargados axialmente y en miembros sometidos a torsión. Esta teoría puede extenderse fácilmente para considerar aplicaciones adicionales. Este capítulo incorpora teoría básica sobre sistemas estáticamente indeterminados, esfuerzos causados por cambios de temperatura, y en recipientes a presión. Además, se discute la limitación de la teoría básica cuando ocurren cambios bruscos en la sección transversal de un miembro, o cuando se aplican cargas repetidas (que producen fatiga).

Este capítulo desarrolla soluciones basadas en la teoría elástica. En el Capítulo 12 se discuten situaciones inelásticas.

Sistemas estáticamente indeterminados para cargas axiales — SECCION A

10.1 Introducción

Consideremos un bloque soportado por un alambre, como se indica en la Fig. 10.1 (a). Este es un sistema estáticamente determinado, y el esfuerzo y la deformación en el alambre pueden calcularse en la forma ya explicada en el Capítulo 2. Si el peso se soporta mediante dos alambres, como se indica en la Fig. 10.1 (c), y si suponemos que ambos alambres son de la misma longitud, área y material, la fuerza soportada por cada alambre es igual. Como $P_A = P_B$, la carga en cada alambre sería la mitad del peso total.

Sin embargo, en la Fig. 10.1 (c), no podemos suponer que cada alambre soporta la misma fuerza, a menos que la longitud, el área de la sección transversal, y la elasticidad del material de los dos alambres sean idénticos. Cuando los dos alambres no son idénticos, no puede suponerse que P_A y P_B son iguales, y el sistema de fuerzas ya no puede calcularse solamente por estática. Ahora la estructura de apoyo de los alambres

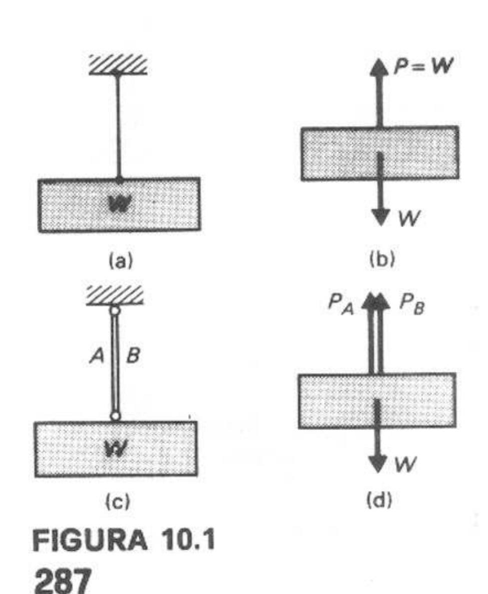


FIGURA 10.1

es estáticamente indeterminada, y deben establecerse suficientes relaciones adicionales para poder determinar las fuerzas. La sección 10.2 discute un método general para resolver problemas de este tipo.

10.2 Método general de solución

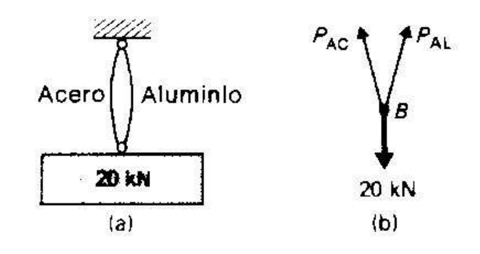
La solución de problemas estáticamente indeterminados que involucran esfuerzos axiales requiere que se satisfagan dos condiciones. Primero debemos obtener las relaciones entre las fuerzas por medio de la estática. segundo, se debe determinar la relación entre las deformaciones de los miembros sujetos a esfuerzos. Cada condición da una ecuación independiente en términos de las mismas incognitas Estas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para obtener las incógnitas.

Los pasos generales en la solución de este tipo de problemas son:

1. Se traza un diagrama de cuerpo libre y se determinan tantas relaciones válidas como sea posible, usando las leyes de la estática: $\Sigma F_H = 0$, $\Sigma F_V = 0$, $\Sigma M = 0$.
2. Se obtiene la relación entre las deformaciones de los miembros. En este punto, es muy conveniente dibujar una figura separada mostrando los cambios dimensionales.
3. Se resuelven las ecuaciones de los pasos 1 y 2 (simultáneamente, si es necesario).

Este procedimiento se ilustra en la solución de los ejemplos 10.1, 10.2 y 10.3. Es necesaria una llamada de precaución. La relación entre las deformaciones está basada en la fórmula $\delta = PL/AE$. Como ya se hizo notar en la sección 2.7, esta fórmula es válida solamente cuando los esfuerzos están por debajo del límite de proporcionalidad. Los esfuerzos finales deberán revisarse para comprobar que realmente sean menores que dicho esfuerzo. Si los esfuerzos finales son mayores que los correspondientes al límite de proporcionalidad del material, la teoría presentada anteriormente ya no es válida.

El capítulo 12 discute métodos de solución para este tipo de condición.



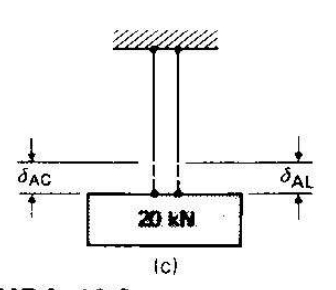


FIGURA 10.2

EJEMPLO 10.1 Un peso de 20 kN está suspendido de dos alambres, como se indica en la Fig. 10.2. La longitud de cada alambre es de 2 m. El alambre de acero tiene una área de 60×10^{-6} m² y el alambre de aluminio tiene una área de 120×10^{-6} m². Determinar el esfuerzo unitario en cada alambre.

SOLUCION En la Fig. 10.2 se indica un diagrama de cuerpo libre del punto de concurrencia de las fuerzas (punto B). A partir de esta figura, la única ecuación válida de estática es $\Sigma F_V = 0$, y a partir de ella calculamos:

$$P_{AC} + P_{AL} = 20. \qquad (1)$$

Como se tiene una ecuación con dos incógnitas, debemos obtener una segunda ecuación con las mismas dos incógnitas. Esto se logra considerando la relación entre las deformaciones, como se indica en la Fig. 10.2 (c). En

este paso es muy útil trazar un diagrama separado que indique las longitudes originales y los cambios de longitud de los miembros. En este ejemplo, el diagrama puede parecer innecesario, pero es aconsejable habituarse a trazarlo. La solución de problemas futuros se simplifica muchísimo mediante el uso de este tipo de diagrama.

$$\delta_{AC} = \delta_{AL}, \qquad \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AC} = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AL}$$

$$\frac{P_{AC}(2)}{(60 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)} = \frac{P_{AL}(2)}{(120 \times 10^{-6})(70 \times 10^9)}$$

$$P_{AC} = \frac{10}{7} P_{AL} \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) da por resultado

$$P_{AC} + P_{AL} = 20 \qquad (1)$$

$$-P_{AC} + \tfrac{10}{7} P_{AL} = 0 \qquad (2)$$

$$\tfrac{17}{7} P_{AL} = 20$$

$$P_{AL} = 8.24 \text{ kN}$$

$$P_{AC} = 11.76 \text{ kN}.$$

Los esfuerzos son, entonces:

Acero

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{11,760}{60 \times 10^{-6}} = 196 \text{ MPa};$$

Aluminio

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8,240}{120 \times 10^{-6}} = 68.7 \text{ MPa}. \blacksquare$$

EJEMPLO 10.2 Resolver el ejemplo 10.1 si la longitud inicial del alambre de acero es de 2.001 m. Todos los demás datos se conservan iguales.

SOLUCION La solución de este problema sigue la misma forma que la del ejemplo 10.1, excepto en lo referente a la relación de las deformaciones. En este caso es importante dibujar una figura clara que indique los cambios dimensionales, tal como la Fig. 10.3 (c).

Por estática:

$$\sum F_Y = 0: \qquad P_{AC} + P_{AL} = 20. \qquad (1)$$

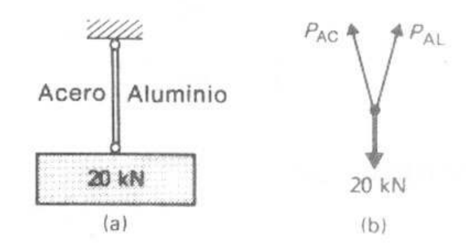
Según la Fig. 10.3 (c),

$$\delta_{AC} + 0.001 = \delta_{AL}, \qquad \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AC} + 0.001 = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AL}$$

$$\frac{P_{AC}(2)}{(60 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)} + 0.001 = \frac{P_{AL}(2)}{(120 \times 10^{-6})(70 \times 10^9)}$$

Reduciendo esta ecuación se llega a

$$1.43 P_{AL} - P_{AC} = 6. \qquad (2)$$



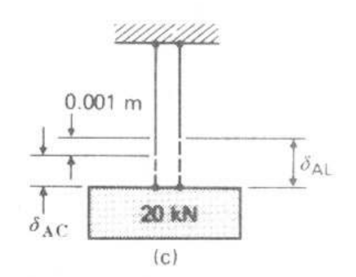
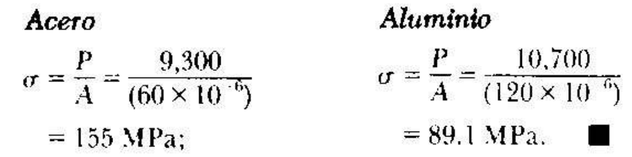


FIGURA 10.3

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), simultáneamente:

$$P_{AL} + P_{AC} = 20$$
$$1.43P_{AL} - P_{AC} = 6$$
$$\overline{\qquad 2.43P_{AL} = 26}$$
$$P_{AL} = 10.7 \text{ kN}$$
$$P_{AC} = 9.3 \text{ kN}.$$

Los esfuerzos son, entonces:



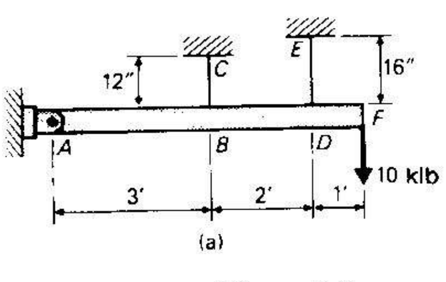
Acero

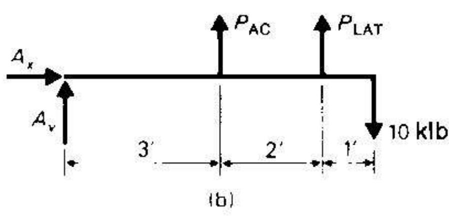
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{9{,}300}{(60 \times 10^{-6})} = 155 \text{ MPa};$$

Aluminio

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10{,}700}{(120 \times 10^{-6})} = 89.1 \text{ MPa}. \quad ■$$

EJEMPLO 10.3 La barra horizontal *ABDF* de la Fig. 10.4 soporta una carga vertical de 10 klb en el punto *F*. La barra está soportada por una articulación en *A*, un alambre de acero *BC* que tiene una área de 1 plg² y un alambre de latón *DE* que tiene una área de 2 plg². Determinar los esfuerzos en los alambres *BC* y *DE*. Supóngase que la barra *ABDF* es rígida, es decir, que no se flexiona. Los módulos de elasticidad son: $E_{AC} = 30 \times 10^3$ klb/plg² y $E_{LAT} = 15 \times 10^3$ klb/plg².





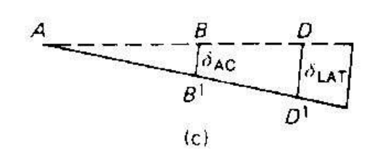


FIGURA 10.4

SOLUCION Pueden calcularse los momentos con respecto al punto *A* del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. 10.4 (b) para obtener una relación entre las fuerzas en los alambres. La segunda relación considera las característiscas de la deformación de la barra y de los alambres, como se muestra en la Fig. 10.4 (c).

A partir de la Fig. 10.4 (b),

$$\sum M_A = 0: \quad P_{AC}(3) + P_{LAT}(5) = 10(6)$$
$$3P_{AC} + 5P_{LAT} = 60. \tag{1}$$

A partir de los triángulos semejantes *ABB'* y *ADD'* de la Fig. 9.4 (c),

$$\frac{\delta_{AC}}{AB} = \frac{\delta_{LAT}}{AD}, \quad \frac{\delta_{AC}}{3} = \frac{\delta_{LAT}}{5}$$

$$5\delta_{AC} = 3\delta_{LAT}, \quad 5\left(\frac{PL}{AE}\right)_{AC} = 3\left(\frac{PL}{AE}\right)_{LAT}$$

$$\frac{5P_{AC}(12)}{(1)(30 \times 10^3)} = \frac{3P_{LAT}(16)}{2(15 \times 10^3)}$$

$$5P_{AC} = 4P_{LAT}. \tag{2}$$

Resolviendo las ecs. (1) y (2) simultáneamente se llega:

$$3P_{AC} + 5P_{LAT} = 60 \tag{1}$$
$$3(\tfrac{4}{5}P_{LAT}) + 5P_{LAT} = 60$$
$$P_{LAT} = 8.1 \text{ klb},$$

y

$$P_{AC} = \tfrac{4}{5}(8.1) = 6.5 \text{ klb}.$$

Los esfuerzos son:

Acero

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{6.5}{1} = 6.5 \text{ klb/plg}^2$$

Latón

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8.1}{2} = 4.05 \text{ klb/plg}^2.$$

■

Problemas

10.1 Un peso de 10 000 lb está soportado por un alambre de acero de 0.20 plg^2 de área y de 40 plg de longitud, y por un alambre de latón de 0.30 plg^2 de área y 40 plg de longitud. Determinar el esfuerzo en cada uno de los alambres. Los módulos de elasticidad son

$$E_{AC} = 29 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

$$E_{LAT} = 14.5 \times 10^6 \text{ lb/plg}^2$$

10.2 Resolver el problema 10.1, suponiendo que el alambre de latón tiene una longitud inical de 39.98 plg.

10.3 Un cilindro de latón está colocado concéntricamente dentro de un tubo de acero, como se muestra en la Fig. P10.3. Determinar los esfuerzos en el latón y en el acero debidos a una carga de 400 kN, cuando cada miembro tiene una longitud de 200 mm antes de la carga. El área del cilindro de latón es de 24×10^{-4} m² y el área del cilindro de acero es de 36×10^{-4} m². Aquí, $E_{AC} =$ 200 GPa y $E_{LAT} =$ 100 GPa.

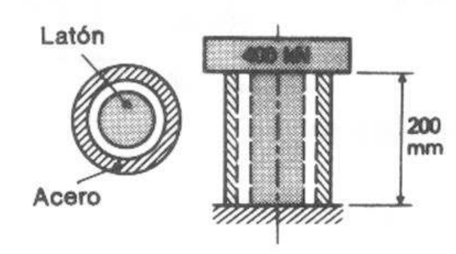


FIGURA P10.3

10.4 Resolver el problema 10.3, suponiendo que el cilindro de latón tiene una longitud inicial 0.2 mm más grande que la del cilindro de acero.

10.5 Una varilla de acero de 500 mm de longitud está empotrada en sus extremos, como se muestra en la Fig. P10.5. Se aplica 400 mm arriba de la base una carga axial de 100 kN. Determinar el esfuerzo en la varilla en las secciones A–A y B–B. El área de la sección transversal de la varilla es de 12×10^{-4} m² y

$$E = 200 \text{ GPa}.$$

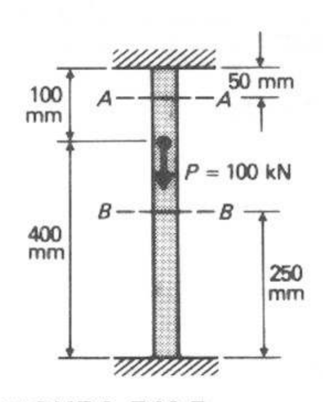


FIGURA P10.5

10.6 Resolver el problema 10.5, suponiendo que se aplica una carga adicional hacia abajo de 50 kN 100 mm arriba de la base.

10.7 Un poste de concreto está reforzado con acero como se muestra en la Fig. P10.7. El poste tiene 30 plg de altura y soporta una carga de 200 klb. Hallar: (a) el esfuerzo en el acero y en el concreto, (b) la variación total en longitud. Los datos son:

Acero	*Concreto*
$A = 4 \text{ plg}^2$	$A = 160 \text{ plg}^2$
$E = 30 \times 10^3 \text{ klb/plg}^2$	$E = 3 \times 10^3 \text{ klb/plg}^2$

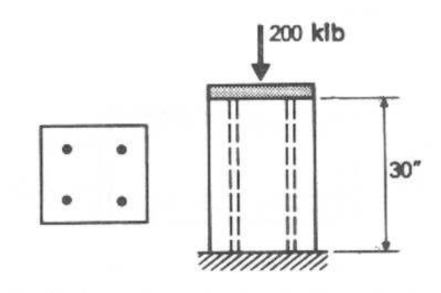


FIGURA P10.7

10.8 Un tubo corto de acero relleno de concretos soporta una carga de 240 klb. La longitud del tubo es de 15 plg. Hallar los esfuerzos en el acero y en el concreto y la variación total de longitud del tubo. Los datos son:

Acero	*Concreto*
$A = 12$ plg²	$A = 120$ plg²
$E = 30 \times 10^3$ klb/plg²	$E = 3 \times 10^3$ klb/plg²

10.9 Un cable de acero de 100 pies de longitud está compuesto de 50 alambres de acero y 100 hilos de manila. Cada uno de estos tiene una sección transversal de 0.02 plg². Las propiedades de estos materiales se enumeran a continuación:

Acero	*Manila*
$E = 30\,000\,000$ lb/plg²	$E = 1\,000\,000$ lb/plg²
$\sigma_u = 100\,000$ lb/plg²	$\sigma_u = 3\,000$ lb/plg²

Determinar

a) la elongación total, o alargamiento, de este cable, cuando soporta una carga de tensión de 6 000 lb,

b) la carga permisible máxima que podría aplicarse sin exceder el esfuerzo permisible ya sea en el acero o en la manila.

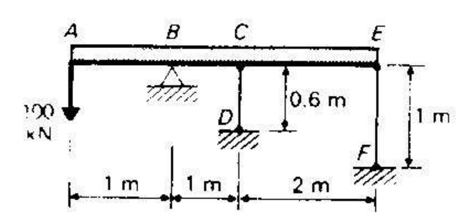


FIGURA P10.10

10.10 La barra horizontal *ABCE* de la Fig. P10.10 soporta una carga de 100 kN en el punto *A*. Si el miembro *CD* es un alambre de acero de 0.6 m de longitud y *EF* es un alambre de aluminio de 1 m de longitud, determinar los esfuerzos en *CD* y *EF*. Supóngase que la barra *ABCE* es rígida y que el área del alambre de acero es igual a la del alambre de aluminio.

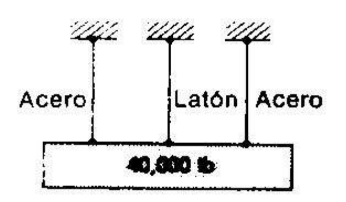


FIGURA P10.11

10.11 Un bloque rígido que pesa 40 000 lb está soportado por tres alambres (Fig. P10.11), y el área de la sección transversal de cada uno es de 0.50 plg². Los alambres exteriores son de acero, de 100 plg de longitud y el alambre interior es de latón, de 99.9 plg de longitud. Determinar los esfuerzos en cada alambre.

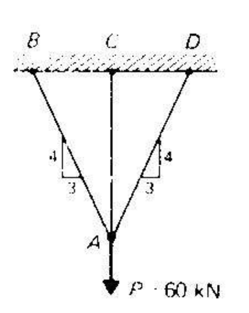


FIGURA P10.12

10.12 Tres alambres de acero están dispuestos en la forma mostrada en la Fig. P10.12. Cada alambre tiene una área en su sección transversal de 12×10^{-5} m², y al conjunto se le aplica una carga de 60 kN. Determinar el esfuerzo en cada uno de los alambres.

10.13 Después de determinar cuál de los alambres de la Fig. P10.12 soporta el mayor esfuerzo, determinar la fuerza *P* que debe aplicarse para que ese alambre quede sometido a un esfuerzo correspondiente al límite de fluencia, $\sigma_y = 248$ MPa.

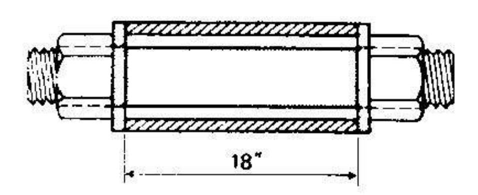


FIGURA P10.14

10.14 Un perno de acero de $\frac{3}{4}$ plg de diámetro está colocado dentro de un tubo redondo de aluminio como se muestra en la Fig. P10.14. El diámetro interior del tubo de aluminio es de $\frac{7}{8}$ plg y el diámetro exterior es de $1\frac{1}{8}$ plg. El paso de la rosca del perno es de $\frac{1}{10}$ plg (es decir, las tuercas avanzan $\frac{1}{10}$ plg por cada vuelta). Determinar el esfuerzo en el aluminio y en la parte no roscada del perno, suponiendo que la tuerca se gira $\frac{1}{3}$ de vuelta después de hacer un ajuste sin holgura.

10.15 Un bloque rígido está soportado por tres resortes, como se indica en la Fig. P10.15. La constante de resorte de los resortes *A* y *C* es de 200 lb/plg, mientras que la del resorte *B* es de 500 lb/plg. Determinar la fuerza en cada resorte y la deflexión total cuando $P = 400$ lb.

10.16 Un bloque de madera, de 6 plg × 6 plg, está colocado entre dos bloques de aluminio, de $\frac{1}{2}$ plg × 6 plg, como se indica en la Fig. P10.16. Determinar la carga máxima *P* que puede aplicarse sin exceder un esfuerzo de 900 lb/plg² en la madera, o un esfuerzo de 10 000 lb/plg² en el aluminio. El módulo de

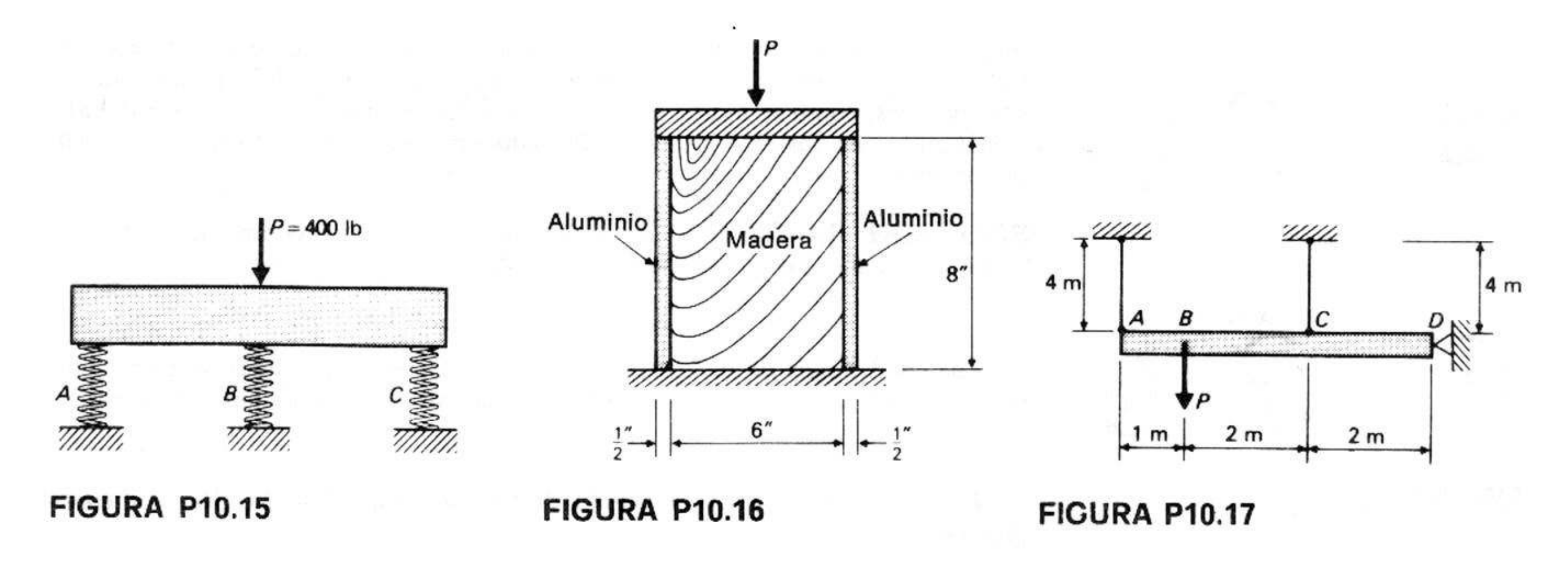


FIGURA P10.15 **FIGURA P10.16** **FIGURA P10.17**

elasticidad de la madera es de 1.76×10^6 lb/plg², y para el aluminio es de 10×10^6 lb/plg².

10.17 Determinar la deflexión del punto A para la estructura indicada en la Fig. P10.17. El alambre A tiene una área de 2×10^{-4} m², y $E = 70$ GPa; el alambre B tiene una área de 3×10^{-4} m², y $E = 200$ GPa. $P = 100$ kN.

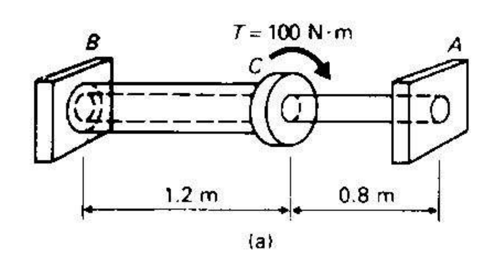
Sistemas estáticamente indeterminados para fuerzas de torsión — SECCION B

10.3 Método de Análisis

La solución de problemas estáticamente indeterminados de la sección A usó dos tipos de ecuaciones–uno, ecuaciones de equilibrio, y dos, ecuaciones de compatibilidad. En problemas estáticamente determinados, las ecuaciones de equilibrio son suficientes para determinar las reacciones. En problemas estáticamente indeterminados, las ecuaciones de equilibrio no son suficientes, y deben ser suplementadas con ecuaciones de compatibilidad. Es decir, las deformaciones de la estructura deben estar relacionadas y ser consistentes con su forma deformada.

Los problemas estáticamente indeterminados en torsión se resuelven de la misma manera. Es decir, se traza un diagrama de cuerpo libre, y se determinan las relaciones de equilibrio a la torsión. Después se determinan las relaciones entre las deformaciones. Los términos comunes en el conjunto de ecuaciones se resuelven simultáneamente. El ejemplo 10.4 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 10.4 Un eje circular ACB está compuesto por el eje AC, que es un eje macizo de acero, de 0.8 m de longitud y 100 mm de diámetro, y otro eje hueco, CB, de latón, de 1.2 m de longitud, con un diámetro exterior de 150



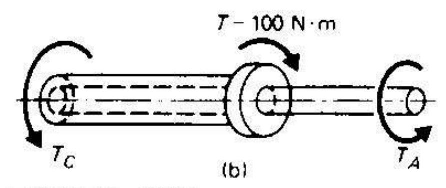


FIGURA 10.5

mm, y un diámetro interior de 100 mm. Los dos ejes están unidos en C y soportados por paredes rígidas, de tal manera que está impedida la rotación en esas paredes, como se indica en la Fig. 10.5. Determinar las reacciones debidas a la torsión, en los extremos A y B, para un momento de torsión $T = 100$ N · m en C.

SOLUCION La Fig. 10.5 (b) indica un diagrama de cuerpo libre del eje. Tomando momentos con respecto al eje, da:

$$\sum M_{eje} = 0: \qquad T_A + T_B = 100. \tag{a}$$

Las condiciones de compatibilidad reconocen que el ángulo de torsión del segmento AC debe ser igual al del segmento BC. Escrito algebraicamente:

$$\theta_{AC} = \theta_{BC}. \tag{b}$$

La ecuación (3.3) da el ángulo de torsión como $\theta = TL/JG$. Por consiguiente:

$$\frac{T_A L_{AC}}{J_{AC} G_{AC}} = \frac{T_B L_{BC}}{J_{BC} G_{BC}}; \tag{c}$$

$$\frac{T_A(0.8)}{\dfrac{\pi(100\times10^{-3})^4}{32}(80\times10^9)} = \frac{T_B(1.2)}{\dfrac{\pi(150\times10^{-3})^4 - \pi(100\times10^{-3})^4}{32}(38\times10^9)}$$

Reduciendo esta expresión, da

$$T_A = 0.777\, T_B. \tag{d}$$

Resolviendo las ecuaciones (a) y (b), simultáneamente, da por resultado

$$\begin{aligned} T_A + T_B &= 100 \\ T_A - 0.777\, T_B &= 0 \\ \hline 1.777\, T_B &= 100 \\ T_B &= 56.27 \text{ N}\cdot\text{m} \\ T_A &= 43.73 \text{ N}\cdot\text{m}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 10.5 Una flecha de acero de 100 mm de diámetro y de 1 m de longitud está empotrada en un extremo y soportada por un alambre de aluminio, DE, de 2 mm de diámetro, en el otro extremo, como se indica en la Fig. 10.6. Determinar el esfuerzo en el alambre DE cuando se aplica un par de torsión $T = 100$ N · m a 0.8 m del extremo empotrado. Supóngase que la barra CD es rígida.

SOLUCION En la Fig. 10.6 (b) se indica el diagrama de cuerpo libre de la flecha. Tomando momentos con respecto al eje de la flecha, nos da:

$$\sum M_{eje} = 0: \qquad T_A + 0.1P - 100 = 0 \tag{a}$$

La relación de compatibilidad considera la rotación neta en el extremo C. Viendo a lo largo del eje, desde C hacia A, θ_{C1} es el movimiento angular resultante del alargamiento del alambre a través de una distancia de 0.1 m (véase

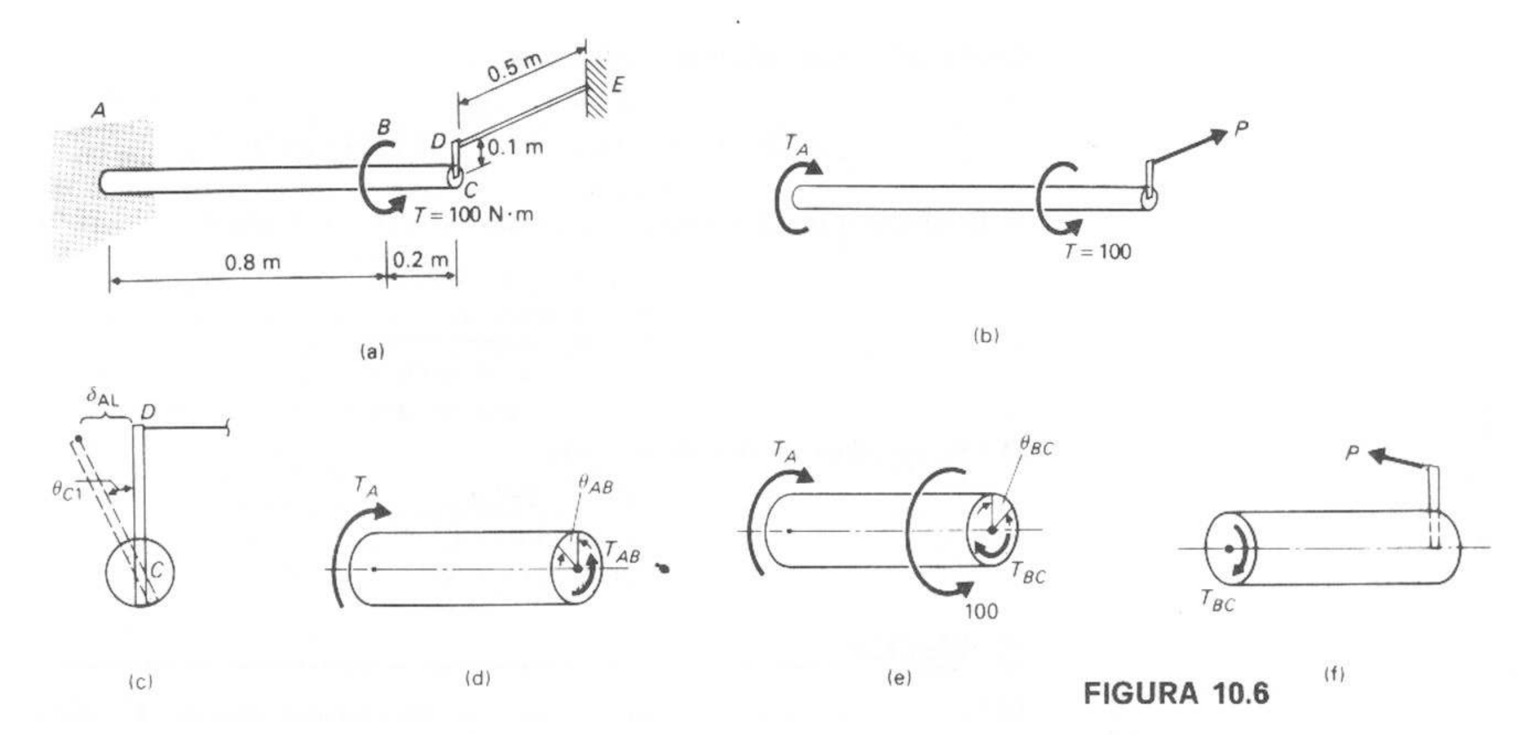


FIGURA 10.6

la Fig. 10.6c). Esta rotación debe ser igual al movimiento angular neto en el extremo C producido por los pares internos. Los valores de los ángulos son:

$$\theta_{C1} = \delta_{AL} L_{CD} = \frac{PL_{DE}}{AE} L_{CD}$$

$$\theta_{C1} = \frac{P(0.5)}{\frac{\pi}{4}(2 \times 10^{-3})^2 70 \times 10^9}(0.1)$$

$\theta_{C1} = 0.228 \times 10^{-6}\, P_{AL}$ (sentido contrario del giro de las manecillas del reloj); (b)

$$\theta_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}G_{AB}} = \frac{T_A(0.8)}{\frac{\pi}{32}(100 \times 10^{-3})^4(26 \times 10^9)}$$

$\theta_{AB} = 3.13 \times 10^{-6} T_A$ (contrario al movimiento de las manecillas del reloj); (c)

$$\theta_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}G_{BC}} = \frac{T_{BC}(0.2)}{\frac{\pi}{32}(100 \times 10^{-3})^4(80 \times 10^9)}$$

$\theta_{BC} = 0.254 \times 10^{-6} T_{BC}$.

Pero según la Fig. 10.6 (f),

$$\sum M_{\text{eje}} = 0: \qquad T_{BC} = P(L_{CD}) = 0.1P.$$

Por consiguiente,

$$\theta_{BC} = (0.254 \times 10^{-6})(0.1P)$$
$$\theta_{BC} = 0.0254 \times 10^{-6} P. \qquad \text{(d)}$$

Combinando estas rotaciones, obtenemos

$$\theta_{C1} = \theta_{AB} - \theta_{BC};$$

$$0.228 \times 10^{-6} P = 1.01 \times 10^{-6} T_A - 0.0253 \times 10^{-6} P$$

$$0.253 P = 1.01 T_A \qquad (e)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (*a*) y (*e*), nos da

$$T_A + 0.1 P = 100$$

$$1.01 T_A - 0.253 P = 0$$

$$T_A = 71.46 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$P = 285.4 \text{ N}$$

El esfuerzo en el alambre de aluminio es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{285.4 \text{ N}}{(\pi/4)[(2 \times 10^{-3})^2]}$$

$$\sigma = 90.84 \text{ MPa} \quad ■$$

Problemas

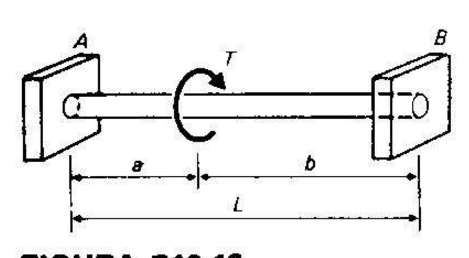


FIGURA P10.18

10.18 Una flecha circular maciza empotrada en ambos extremos está sujeta a un par de torsión T a una distancia a del extremo A, como se indica en la Fig. P10.18. Determinar la magnitud de los pares de torsión resistentes en A y B.

10.19 Una flecha circular de acero, de 2 m de longitud, ABC, empotrada en ambos extremos, está sujeta a un par de torsión T = 48 N · m en su punto medio, como se indica en la Fig. P10.19. La mitad de la flecha, desde A hasta B, es una sección maciza de 90 mm de diámetro, y la otra mitad, de B a C es hueca, con un diámetro exterior de 90 mm y un diámetro interior de 60 mm. Determinar los esfuerzos cortantes en las secciones AB y BC, y el ángulo de rotación en B.

10.20 Calcular el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión en el punto B, de la flecha maciza de latón, de 1½ plg de diámetro, sujeta a un par de Torsión de T = 5000 pie-lb, indicado en la Fig. P10.20.

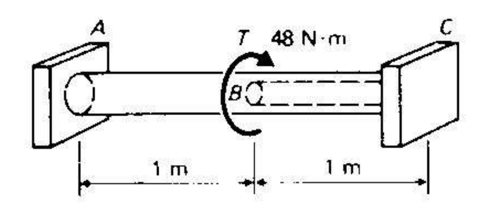


FIGURA P10.19

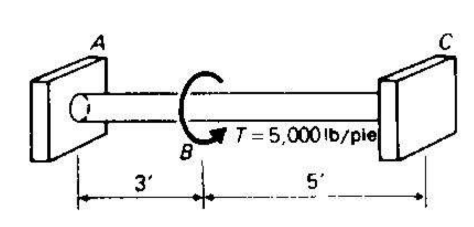


FIGURA P10.20

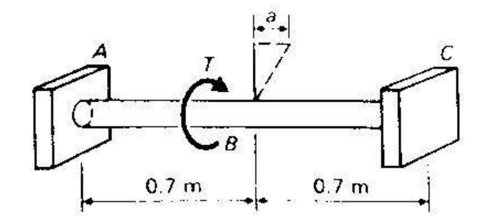


FIGURA P10.21

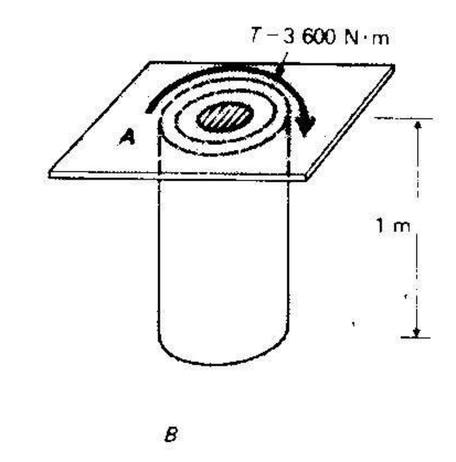


FIGURA P10.22

10.21 Una flecha maciza de aluminio de 30 mm de diámetro y de 1.4 m de longitud está sujeta a un par de torsión T desconocido en su punto medio, como se indica en la Fig. P10.21. El punto a, en el extremo de un apuntador de 60 mm de longitud, se mueve através de una distancia de 2 mm. Determinar la magnitud del par de torsión T.

10.22 Una flecha hueca de acero con un diámetro exterior de 120 mm y un diámetro interior de 80 mm se coloca en forma concéntrica sobre una flecha maciza de latón de 60 mm de diámetro. En A se sujetan rígidamente a una placa las flechas, como se indica en la Fig. P10.22. Ambas flechas están rígidamente unidas a un apoyo en B. Determinar el ángulo de torsión en A cuando el par de torsión es de $T = 3\,600$ N · m.

10.23 Determinar el par de torsión máximo, T, que puede aplicarse a la estructura de la Fig. P10.22 cuando el esfuerzo cortante admisible en el acero es de 54 MPa y el esfuerzo cortante admisible en el latón es de 27 MPa.

10.24 Una flecha maciza de acero, de 2 plg de diámetro está empotrada en su extremo A y apoyada en su extremo B mediante dos alambres flexibles de acero de 0.01 plg de diámetro, que están unidos a un brazo rígido soldado al extremo de la flecha, como se indica en la Fig. P10.24. Determinar el esfuerzo en los alambres de acero cuando se aplican fuerzas iguales de 500 lb, como se indica. (*Sugerencia*: Note que si un alambre se carga a compresión, su fuerza axial es cero).

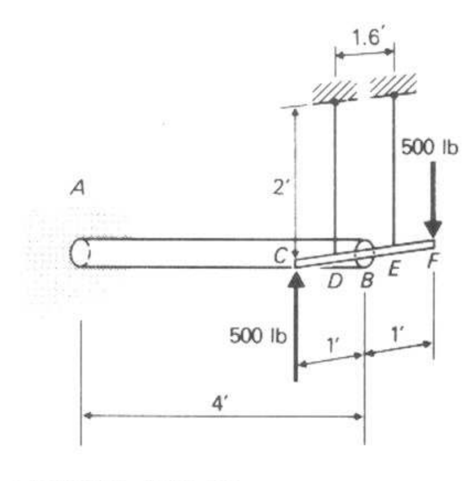


FIGURA P10.24

Esfuerzos por temperatura SECCION C

10.4 Movimiento térmico

En el material cubierto hasta ahora, el esfuerzo interno en los miembros ha sido causado por la aplicación de cargas exteriores. Sin embargo, hay otra forma de que un cuerpo pueda sujetarse a esfuerzos. Esto ocurre cuando la temperatura de un cuerpo cambia y el movimiento se restringe de alguna manera.

Para ilustrar esta acción, consideremos la barra indicada en la Fig. 10.7 (a). Esta barra está libre para alargarse o contraerse sin restricción. Si la temperatura de la barra cambia, la barra cambiará su longitud. Cuando la barra se calienta ocurre un alargamiento, y cuando se enfría, ocurre una contracción. Si el movimiento de la barra no se restringe, no habrá esfuerzos causados por este cambio de longitud. Sin embargo, si esta barra se coloca entre dos apoyos inmóviles, tales como los indicados en la Fig. 10.7 (b), y después cambia la temperatura, se desarrolla una situación completamente diferente.

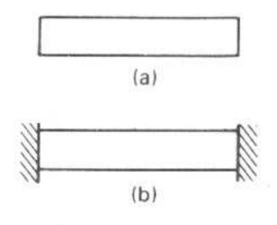


FIGURA 10.7

Consideremos la barra de la Fig. 10.7 (b). Supongamos que se coloca entre dos apoyos inmóviles cuando la temperatura es de 100°F. Si la temperatura desciende hasta 50°F, la barra tiende a contraerse pero los apoyos impiden esa contracción. Así se generan esfuerzos en la barra. Esta sección discute la teoría y los métodos de solución de este tipo de problema.

10.5 Principios básicos

En la sección 10.4 se estableció que cuando un cuerpo se somete a una elevación de temperatura, se alarga. Inversamente, cuando se somete a un descenso de temperatura, se contrae. Las variaciones de longitud se pueden calcular a partir de la siguiente relación:

$$\delta_t = \alpha L \Delta T, \qquad (10.1)$$

donde

δ_T = cambio de longitud debido a la variación de temperatura,
α = coeficiente de dilatación lineal,
L = longitud original,
ΔT = variación de temperatura = $T_{final} - T_{inicial}$.

El coeficiente de dilatación lineal es una constante para cualquier material. Se expresa en unidades de longitud por unidad de longitud, por grado Fahrenheit (plg/plg°F) o por grado Celsius (m/m/°C). En la Tabla 10.1 se da el coeficiente de dilatación térmica de varios materiales. Una lista más completa puede encontrarse en algunos manuales de ingeniería, tales como el *Kent's Mechanical Engineers' Handbook.*

TABLA 10.1

Material	Coeficiente Lineal de expresión α/°F	Coeficiente Lineal de expansión, α/°C
Acero	0.0000065	0.000012
Aluminio	0.0000125	0.000023
Latón	0.000010	0.000020
Bronce	0.000010	0.000020
Cobre	0.0000093	0.000017
Concreto	0.0000062	0.000011
Madera	0.000003	0.0000055

EJEMPLO 10.6 Determinar la variación de longitud de una varilla de latón de 10 pies de longitud si la temperatura en la varilla desciende desde 100°F hasta 50°F.

SOLUCION El coeficiente de dilatación térmico encontrado en la Tabla 10.1 es 0.000010 plg/plg°F. La variación de longitud es, entonces:

$$\delta_T = \alpha L\, \Delta L = (0.000010)(120)(50 - 100) = -0.06 \text{ plg}$$

Debe notarse que las dimensiones de δ y L y α y Δ T deben ser consistentes. ■

Problemas

10.25 Una cinta de acero para trabajos topográficos mide 100 pies de longitud a 70°F. Determinar su longitud cuando la temperatura desciende a 20°F.
10.26 Una barra de aluminio de 4 m de longitud se sujeta a una elevación de temperatura de 100°C. Determinar la variación de longitud de la barra.
10.27 Un tubo de latón de pared delgada y sección circular tiene un diámetro interior de 75 mm. Determinar el diámetro interior cuando el tubo se calienta a una temperatura de 150°C.
10.28 Un tubo de bronce de pared delgada y de 3.98 plg de diámetro interior se va a colocar sobre un cilindro de acero de 4.00 plg de diámetro. El cilindro de acero se va a conservar a 70°F. Determinar la temperatura a la cual el tubo de bronce deberá calentarse para que se deslice sobre el cilindro de acero.
10.29 Resolver el problema 10.28 suponiendo que tanto el cilindro de acero como el de bronce se calientan hasta la misma temperatura.
10.30 Un edificio de 300 pies de longitud tiene una armazón de acero estructural. Si la temperatura en el acero aumenta 60°F durante el día, ¿cuál es la variación de longitud del edificio? ¿qué efecto tendría esto sobre los muros de mampostería en los extremos del edificio? (Su respuesta explicará las razones para usar juntas de dilatación en estructuras largas.)

10.6 Método de solución para problemas estáticamente indeterminados

Los esfuerzos producidos por los cambios de temperatura ocurrirán en un miembro solamente cuando el movimiento del miembro se restringe de alguna manera. Este esfuerzo, cuando ocurre, es otro ejemplo de esfuerzo directo. El método general de solución para este tipo de problema sigue un patrón relativamente simple. Los pasos son:

1. Se quita uno de los apoyos y se deja que el miembro cambie de longitud sin ninguna restricción.
2. Se calcula la variación de longitud debida al cambio de temperatura a partir de $\delta_T = \alpha L \, \Delta T$.
3. Se aplica una carga axial al miembro para regresarlo a su posición final. La variación de longitud producida por la carga axial puede calcularse a partir de $\delta = PL/AE$.

EJEMPLO 10.7 Si la varilla de latón del ejemplo 10.6 se coloca entre dos apoyos fijos cuando su temperatura es de 100°F, determinar el esfuerzo en la varilla cuando su temperatura es de 50°F.

SOLUCION Quitando un apoyo, como se indica en la Fig. 10.8, la contracción debida al cambio de temperatura ya se calculó en el ejemplo 10.6 y fue de 0.06 plg. Debe aplicarse una fuerza axial de tensión para regresar al miembro a su posición inicial. Como los apoyos son fijos, P debe ser lo suficientemente grande para hacer que el miembro se alargue una cantidad δ, que en este caso debe ser igual a δ_T.

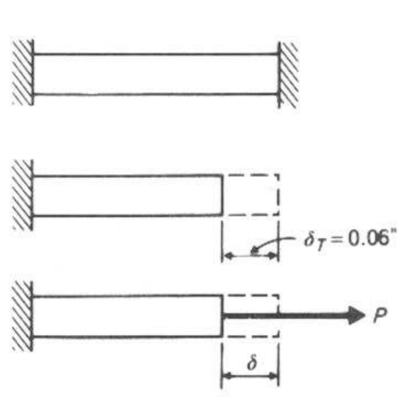


FIGURA 10.8

Igualando las variaciones de longitud, $\delta_T = \delta$, tenemos:

$$0.06 = \frac{PL}{AE} = \frac{P(120)}{A(15 \times 10^6)}$$

$$\frac{P}{A} = \sigma = \frac{(0.06)(15 \times 10^6)}{120}$$

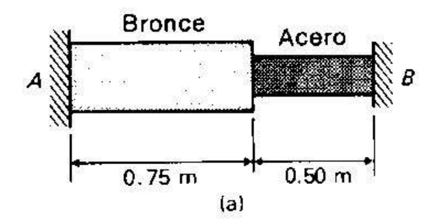
$$\sigma = 7{,}500 \text{ lb/plg}^2. \quad \blacksquare$$

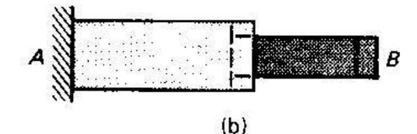
EJEMPLO 10.8 Una barra de bronce y una barra de acero se colocan entre dos apoyos fijos A y B, como se muestra en la Fig. 10.9. Determinar los esfuerzos en el acero y en el bronce cuando la temperatura desciende 50°C. Los datos y las constantes físicas son:

Acero	*Bronce*
$L = 0.5$ m	$L = 0.75$ m
$A = 6 \times 10^{-4}$ m^2	$A = 12 \times 10^{-4}$ m^2
$\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C	$\alpha = 20 \times 10^{-6}$/°C
$E = 200$ GPa;	$E = 100$ GPa.

SOLUCION Se quita un apoyo, como se indica en la Fig. 10.9 (b), y se permite que la estructura se deforme. El cambio total de longitud, debido a la variación de temperatura, se calcula como:

$$\begin{aligned} \delta_T &= \alpha_{BR} L_{BR} \Delta T + \alpha_{AC} L_{AC} \Delta T \\ &= (20 \times 10^{-6})(0.75)(-50) + (12 \times 10^{-6})(0.5)(-50) \\ &= -75 \times 10^{-6} - 300 \times 10^{-6} \\ &= -1{,}050 \times 10^{-6} \text{ m (más corto)}. \end{aligned}$$





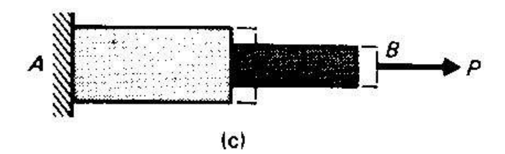


FIGURA 10.9

Después se aplica una fuerza P, lo suficientemente grande para regresar el extremo B a su posición original. La magnitud de la fuerza se calcula como:

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BR} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AC}$$

$$1.050 \times 10^{-6} = \frac{P(0.75)}{(12 \times 10^{-4})(100 \times 10^{9})} + \frac{P(0.5)}{(6 \times 10^{-4})(200 \times 10^{9})}$$

$$P = 100.8 \text{ kN}.$$

Los esfuerzos unitarios son:

Acero

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100\,800}{6 \times 10^{-4}}$$

$= 168$ MPa **(tensión)**;

Bronce

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100\,800}{12 \times 10^{-4}}$$

$= 84$ MPa **(tensión)**. ■

EJEMPLO 10.9 Una barra de aluminio de 60 plg de longitud se coloca entre dos apoyos A y B, como se muestra en la Fig. 10.10. Si, después de que la barra se ha colocado entre los apoyos, la temperatura desciende 200°F, y el apoyo B cede 0.05 plg, ¿cuál es el esfuerzo en la barra?

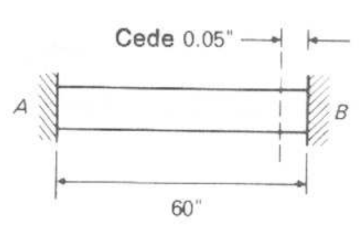


FIGURA 10.10

SOLUCION Se quita el apoyo B y se permite a la barra contraerse. Tenemos entonces:

$$\delta_T = \alpha L\,\Delta T = (12.5 \times 10^{-6})(60)(-200)$$

$= -0.15$ plg **(más corta)**

Después se aplica una fuerza P para jalar el extremo B hasta su posición adecuada. El alargamiento total será la contracción total menos lo que cede el apoyo:

$$\delta_{\text{necesaria}} = 0.15 - 0.05 = 0.10 \text{ plg}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}; \qquad 0.10 = \frac{P(60)}{A(10 \times 10^{6})} = \frac{\sigma(60)}{(10 \times 10^{6})}$$

$\sigma = 16{,}700$ lb/plg^2 **(tensión)**. ■

Problemas

10.31 Una barra de acero se coloca entre dos apoyos fijos colocados a 2m de separación. Determinar el esfuerzo en el acero cuando la temperatura desciende 120°C.

10.32 Resolver el problema 10.31 cuando los apoyos ceden 0.6 mm.

10.33 Una barra de aluminio de 12 plg de longitud se coloca entre dos apoyos fijos. Determinar el esfuerzo unitario en la barra cuando la temperatura asciende 150°F.

10.34 Resolver el problema 10.33 suponiendo que los apoyos ceden 0.015 plg.

10.35 Una barra de acero y una barra de latón se colocan entre dos apoyos fijos, como se muestra en la Fig. P10.35. Si la temperatura desciende 80°C, ¿cuál es el esfuerzo unitario en cada barra?

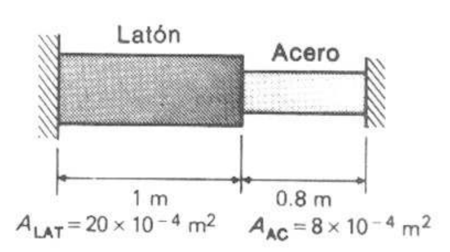


FIGURA P10.35

10.36 Resolver el problema 10.35 suponiendo que un apoyo cede 0.25 mm.
10.37 Un alambre de acero colocado entre dos apoyos rígidos separados 3 m se somete a un esfuerzo de 138 MPa. Determinar la variación de temperatura necesaria para reducir a cero el esfuerzo en el alambre.
10.38 Un anillo de bronce de ⅛ plg de espesor a una temperatura de 170 °F es ajusta sobre una flecha de acero de 3.00 plg de diámetro. Si la flecha de acero tiene una temperatura inicial de 70°F, determinar el esfuerzo en el anillo de bronce cuando tanto el anillo como la flecha de acero alcanzan una temperatura de 70°F.
10.39 Un anillo delgado de latón con un diámetro interior de 9.98 plg va a ser ajustado sobre una flecha de acero, de 10 plg de diámetro. Suponiendo que la temperatura del acero permanece en 70°F, determinar.

a) la temperatura a la que debe calentarse el anillo para ajustarse sobre la flecha de acero.
b) el esfuerzo en el anillo de latón cuando se enfría hasta 70°F.

10.7 Combinación de problemas estáticamente indeterminados y esfuerzos por temperatura

En algunos casos ocurre una combinación de esfuerzos estáticamente indeterminados y esfuerzos por temperatura. Los problemas de este tipo pueden resolverse usando una combinación de los métodos descritos en este capítulo. La solución de problemas de este tipo puede obtenerse a partir del siguiente procedimiento:

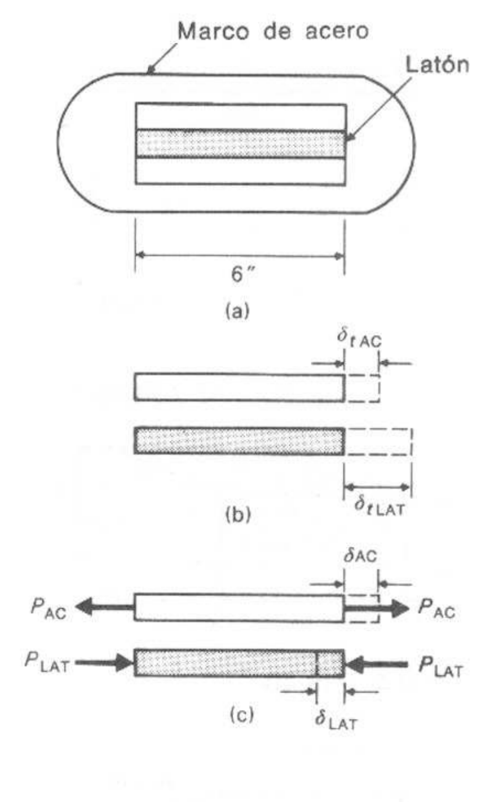
1. Se quitan suficientes apoyos para permitir que los miembros se muevan libremente con las variaciones de temperatura, y se calculan esas deformaciones a partir de $\delta_T = \alpha L \, \Delta T$.
2. Se aplican las fuerzas axiales producidas por los apoyos, y se calculan las variaciones de longitud debidas a esas fuerzas, a partir de $\delta = PL/AE$.
3. Se combinan las deformaciones de los pasos 1 y 2 para obtener una relación entre las cargas en los materiales.
4. Se aplican las ecuaciones de estática adecuadas para obtener una segunda relación entre las cargas.
5. Se resuelven simultánemente las ecuaciones de los pasos 3 y 4.

Debe notarse que en estos problemas, más difíciles, es muy importante usar en la solución un conjunto de diagramas claros. El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 10.10 Una barra de latón se coloca en un marco de acero, como se muestra en la Fig. 10.11 (a). Suponiendo que la barra de latón ajusta perfectamente dentro del marco de acero cuando la temperatura es de 70°F, de-

terminar los esfuerzos en la barra de latón y en el marco de acero cuando la temperatura se eleva hasta 170°F. Los datos son:

Latón	*Acero*
$A = 2$ plg²	A de cada pata $= \frac{1}{2}$ plg²
$E = 15 \times 10^6$ lb/plg²	$E = 30 \times 10^6$ lb/plg²
$\alpha = 10 \times 10^{-6}$ plg/plg/°F;	$\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$ plg/plg/°F;



SOLUCION Como el marco es simétrico, el área total de acero de 1 plg² puede analizarse como una unidad. Si se quitaran los apoyos, los materiales podrían alargarse libremente, como se muestra en la Fig. 10.11 (b). Si no se impidiera el movimiento, el incremento de longitud de las barras sería:

$$\delta_{T\,LAT} = \alpha L\,\Delta T = (10 \times 10^{-6})(6)(100)$$
$$= 0.0060 \text{ plg (más larga)}$$
$$\delta_{T\,AC} = \alpha L\,\Delta T = (6.5 \times 10^{-6})(6)(100)$$
$$= 0.0039 \text{ plg (más larga)}.$$

Sin embargo, como puede verse a partir de la Fig. 10.11 (a), el movimiento está restringido. Como la barra de latón está tratando de alargarse más que la de acero, ejerce una fuerza en el extremo del marco, produciendo esfuerzos de tensión en el acero y esfuerzos de compresión en el latón. Las variaciones de longitud debidas a esos esfuerzos axiales se muestran en la Fig. 10.11 (c), y pueden calcularse como:

$$\delta_{AC} = \frac{PL}{AE} = \frac{P_{AC}(6)}{(1)(30 \times 10^6)}; \qquad \delta_{AC} = 2P_{AC} \times 10^{-7};$$
$$\delta_{LAT} = \frac{PL}{AE} = \frac{P_{LAT}(6)}{(2)(15 \times 10^6)}; \qquad \delta_{LAT} = 2P_{LAT} \times 10^{-7}.$$

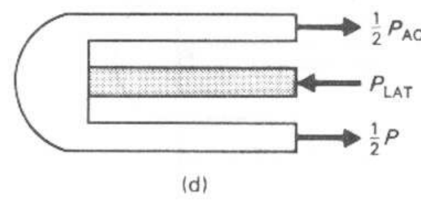


FIGURA 10.11

De la Fig. 10.11 (a) se puede ver que la longitud final de las barras de latón y de acero deben ser iguales. La variación de longitud de la barra de latón involucra dos cantidades, la debida a la dilatación por temperatura y la debida a los esfuerzos de compresión. Análogamente, la longitud final de las barras de acero es la suma del incremento debido a la elevación de la temperatura y el incremento debido a los esfuerzos de tensión. Establecido matemáticamente:
Establecido matemáticamente:

$$\delta_{LAT\,(final)} = \delta_{AC\,final)}$$
$$\delta_{T\,LAT} - \delta_{LAT} = \delta_{T\,AC} + \delta_{AC}$$
$$0.006 - 2 \times 10^{-7} P_{LAT} = 0.0039 + 2 \times 10^{-7} P_{AC}$$

Reduciendo esta expresión algebraicamente, tenemos

$$P_{AC} + P_{LAT} = 10{,}500. \qquad (1)$$

Como la ec. (1) contiene dos incógnitas, debe obtenerse una segunda ecuación conteniendo las mismas incógnitas. Esto se logra aplicando la estática al diagrama de cuerpo libre de la Fig. 10.11 (d).

$$\sum F_x = 0: \qquad P_{AC} = P_{LAT}. \qquad (2)$$

Resolviendo las ecs. (1) y (2) simultáneamente se llega a:

$$P_{AC} = 5\,250 \text{ lb}, \qquad P_{LAT} = 5\,250 \text{ lb}.$$

Entonces, los esfuerzos son:

Acero	*Latón*
$\sigma_{AC} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{5\,250}{1}$	$\sigma_{LAT} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{5\,250}{2}$
$= 5\,250 \text{ lb/plg}^2$	$= 2\,625 \text{ lb/plg}^2$ ■

Problemas

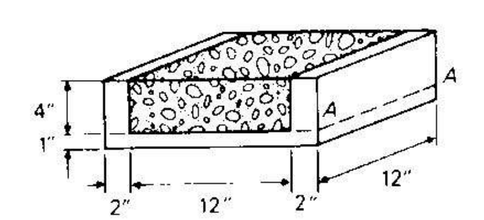


FIGURA P10.40

10.40 Un bloque de concreto se cuela en una artesa de madera, como se muestra en la Fig. P10.40. Si la temperatura se eleva 100°F, determinar los esfuerzos cortantes promedios en la madera a lo largo del plano A–A. $E_{concreto} = 3 \times 10^6$ lb/plg².

10.41 Una barra de acero se coloca en un marco de latón, como se indica en la Fig. P10.41. Si la barra de acero ajusta perfectamente dentro del marco de latón cuando la temperatura es de 30°C, determinar los esfuerzos en el acero y en el latón cuando la temperatura desciende hasta −20°C. Los datos son:

Latón	*Acero*
A de cada pata $= 3 \times 10^{-4}$ m²	$A = 12 \times 10^{-4}$ m²,
$E = 100$ GPa	$E = 200$ GPa,
$\alpha = 20 \times 10^{-6}$/°C;	$\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C.

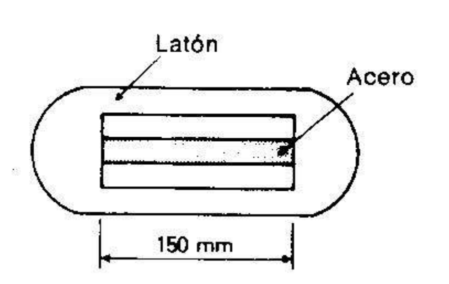


FIGURA P10.41

10.42 Un perno de acero se coloca dentro de un manguito de latón (Fig. P10.42), y las tuercas se aprietan de modo que quedan ajustadas sin holgura a una temperatura de 70°F. Determinar los esfuerzos en el acero y en el latón cuando la temperatura se eleva hasta 170°F. El área del manguito de latón es de 0.75 plg² y la del acero es de 1.50 plg².

10.43 Dos alambres de acero y un alambre de cobre soportan una barra rígida que pesa 3000 N, como se muestra en la Fig. P10.43. Suponiendo que todos los alambres son de la misma longitud y que cada uno tiene una área de 6×10^{-6} m², determinar:

a) el esfuerzo inicial en cada alambre cuando se acaba de construir el sistema.
b) el esfuerzo en cada alambre después de que la temperatura se ha incrementado en 150°C sobre la correspondiente a las condiciones del inciso (a).

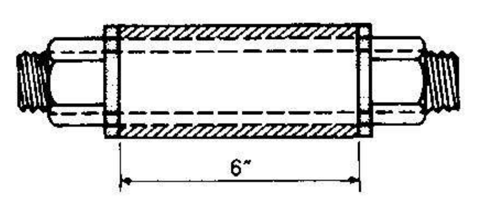


FIGURA P10.42

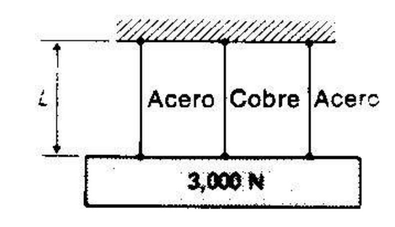


FIGURA P10.43

10.44 Una barra de aluminio de 16 plg, que tiene una sección transversal rectangular de ½ plg de espesor por 2 plg de ancho está apoyada mediante una articulación en *C* y mediante varillas de aluminio de ⅛ plg × ½ plg × 24 plg de longitud, como se indica en la Fig. P10.44. Determinar

a) El esfuerzo máximo en la barra de aluminio, *BCD*, cuando la temperatura desciende 50°F.

b) El esfuerzo en las varillas de aluminio si la viga *BCD* fuera rígida, en vez de flexible.

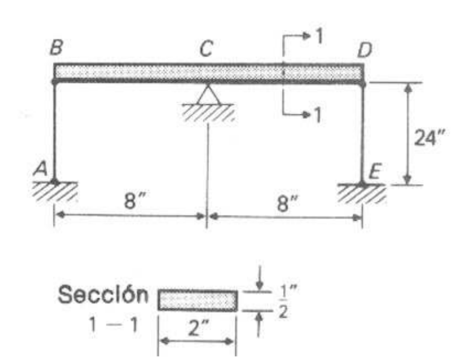


FIGURA P10.44

10.45 Un tubo de acero estándar, de 1 plg de diámetro se usa como viga en un claro de 2 pies. Un alambre de acero se tensa fuertemente entre la viga y un apoyo rígido, *D*, como se indica en la Fig. P10.45. ¿Cuál es el esfuerzo en la viga y en el alambre si la temperatura desciende 120°F? El área de la sección transversal del alambre de acero es de 0.05 plg².

10.46 Una barra de aluminio de 40 mm de ancho y 10 mm de espesor es empleada como viga en voladizo de 0.2 m de longitud. Un alambre de acero de 1 mm de diámetro se tensa desde el extremo de la viga hasta un apoyo rígido situado a 0.5 m debajo del extremo fijo de la viga, como se indica en la Fig. P10.46. ¿Cuál es el esfuerzo en el alambre de acero y el esfuerzo máximo en la barra cuando la temperatura desciende 60°C? ¿Cuál es la deflexión de *B*?

10.47 Una flecha vertical de latón, *AB*, que tiene un diámetro exterior de 30 mm y un diámetro interior de 25 mm está empotrada en *A*. Un brazo rígido en *B* se une a dos barras horizontales de latón, cada una de 5 mm de diámetro y 1 m de longitud, como se indica en la Fig. P10.47. ¿Cuál es el esfuerzo cortante en la flecha *AB* cuando la temperatura desciende 80°C?

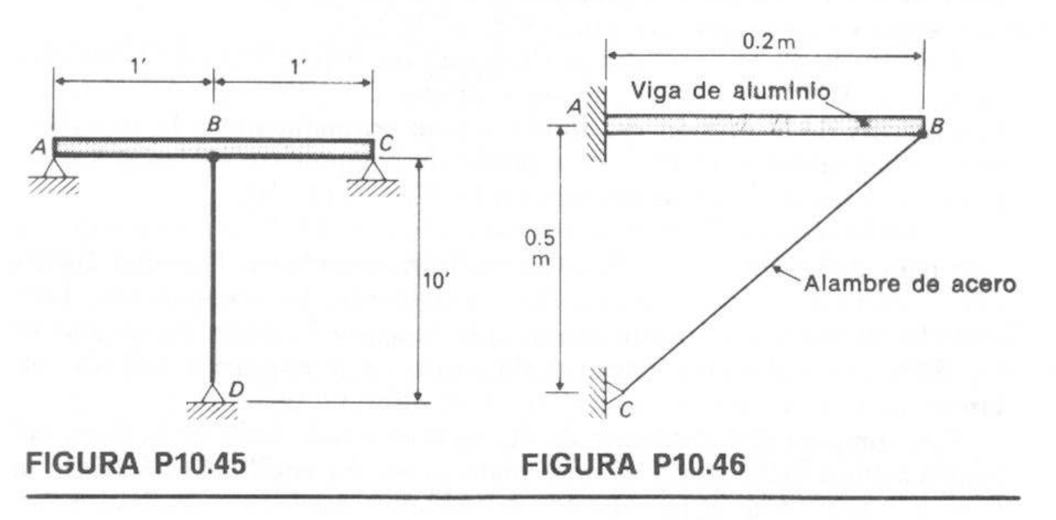


FIGURA P10.45 FIGURA P10.46

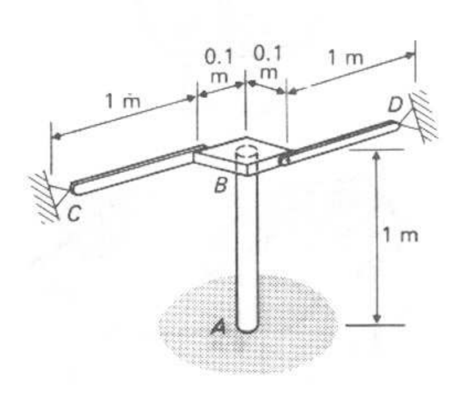


FIGURA P10.47

Recipientes a presión SECCION D

10.8 Presiones en fluidos

Un recipiente a presión es un recipiente que contiene un fluido a presión. Las calderas, torres para agua, extinguidores contra incendio y tuberías,

son unos cuantos de los ejemplos más comunes de recipientes a presión. En esta sección solamente se considerarán recipientes a presión cilíndricos y esféricos. Afortunadamente, estas son las formas comunes en la aplicación industrial y son, por consiguiente, de utilidad práctica.

La presión de un fluido en un recipiente cerrado produce esfuerzos de tensión en las paredes del recipiente. Estos esfuerzos son simplemente una aplicación más del esfuerzo normal tal como se describió en el capítulo 2. Las leyes básicas de la estática y la definición de esfuerzo unitario son las herramientas necesarias para analizar las fuerzas y esfuerzos en los recipientes a presión cilíndricos y esféricos.

10.9 Fuerzas en recipientes cilíndricos

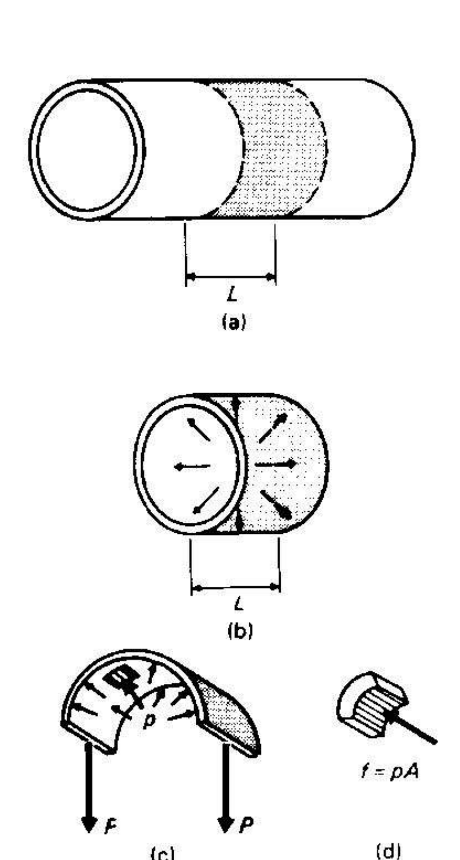


FIGURA 10.12

Supongamos que el recipiente cilíndrico de la Fig. 10.12 (a) contiene un fluido a una presión p lb/plg². El fluido puede ser líquido o gaseoso, y su peso es despreciable, a menos que la densidad del fluido sea muy alta y el cilindro sea relativamente grande.

Del cilindro se corta una sección de longitud L, como se muestra en la Fig. 10.12 (b). Para investigar las fuerzas en la pared del cilindro, se corta por un plano diametral. En la Fig. 10.12 (c) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la mitad superior de la sección.

Como las leyes de la estática relacionan fuerzas, la presión interna p debe convertirse en la fuerza correspondiente. Se determina la fuerza producida por una presión multiplicando la presión por el área sobre la que actúa como se muestra en la Fig. 10.12 (d).

La Fig. 10.13 (a) muestra el diagrama de cuerpo libre de la sección de la Fig. 10.12 (c), con las fuerzas producidas por la presión interna. Las fuerzas de la presión del fluido actúan normalmente a la superficie interior del cilindro. Cada fuerza puede descomponerse en componentes $f \cos \theta$ y f sen θ, como se muestra en la Fig. 10.13 (b).

Considerando las fuerzas mostradas en la Fig. 10.13 (a), se puede ver que para cada fuerza a la derecha de la línea central, hay una fuerza correspondiente a la izquierda. Por consiguiente, las componentes horizontales, $f \cos \theta$, de las fuerzas a cada lado de la línea del centro se equilibran una con otra. Esto significa que no se requieren fuerzas cortantes en la sección para mantener el equilibrio.

Las componentes verticales de las fuerzas a cada lado de la línea del centro actúan hacia arriba. Deben mantenerse en equilibrio mediante la fuerza P que actúa en las paredes del cilindro. La fuerza resultante vertical F puede encontrarse sumando las componentes verticales f sen θ desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 180°$. La parte matemática no se indica aquí, pero la resultante F resulta ser el producto de la presión interna p y el área proyectada de la sección, como se muestra en la Fig. 10.13 (c). Escrito algebraicamente:

$$F = pDL,$$

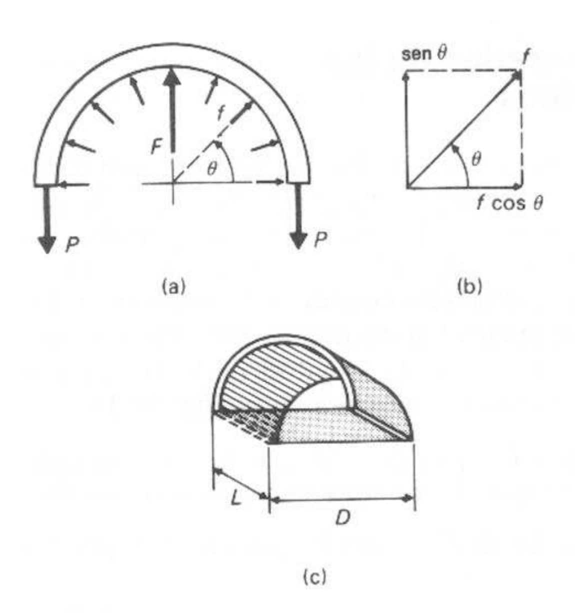


FIGURA 10.13

F = fuerza resultante de la presión del fluido, lb o N,
p = presión interna del fluido, lb/plg² o N/m²,
D = diámetro del cilindro, plg o m,
L = longitud de la sección considerada, plg o m.

Conociendo la magnitud de la fuerza resultante de la presión del fluido, podemos aplicar las leyes de estática al diagrama de cuerpo libre de la Fig. 10.13 (a) para obtener:

$$\sum F_Y = 0: \qquad 2P = F = pDL,$$

$$P = pDL/2.$$

La fuerza P es la fuerza interna en las paredes del cilindro.

EJEMPLO 10.11 Determinar la fuerza en las paredes del recipiente cilíndrico de 20 plg de diámetro, mostrado en la Fig. 10.14. La presión interna del fluido es de 60 lb/plg².

SOLUCION Puede tomarse cualquier longitud L. En este caso, por conveniencia, se considera $L = 1$ plg.

A partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 10.14 (c),

$$\sum F_Y = 0: \qquad 2P = F = pDL,$$

$$2P = (60)(20)(1)$$

y, por consiguiente, P es de 600 lb para cada sección de 1 plg de cilindro. ■

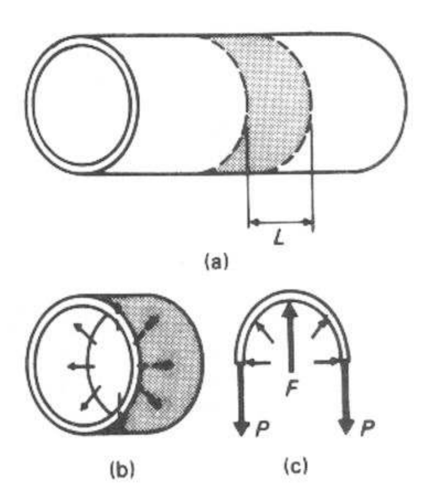


FIGURA 10.14

10.10 Esfuerzos en las paredes de los recipientes cilíndricos



FIGURA 10.15

Aunque la fuerza que actúa en las paredes de los recipientes cilíndricos puede determinarse mediante los procedimientos presentados en la sección 10.9, es más conveniente considerar el esfuerzo en las paredes. La fuerza P es la resultante de las fuerzas de cada sección, y pasa a través del centroide del área considerada. Por consiguiente, el esfuerzo en las paredes del cilindro puede determinarse mediante $\sigma = P/A$. En este caso, el área sobre la que actúa la fuerza es la longitud multiplicada por el espesor de la pared del cilindro, como se muestra en la Fig. 10.15.

EJEMPLO 10.12 Suponiendo que las paredes del cilindro del ejemplo 10.11 son de ¼ plg de espesor, determinar el esfuerzo unitario en esas paredes.

SOLUCION A partir del ejemplo 10.10 $P = 600$ lb para $L = 1$ plg. El esfuerzo unitario es de:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{tL} = \frac{600}{(\frac{1}{4})(1)}, \qquad \sigma = 2\,400 \text{ lb/plg}^2$$

Si la longitud se hubiera tomado de 2 plg en vez de 1 plg, el esfuerzo unitario sería el mismo, como se muestra a continuación. Para $L = 2$,

$$2P = pDL = (60)(20 \times 2),$$

$$P = 1\,200 \text{ lb} \quad \text{para cada sección de 2 plg del cilindro,}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{tL} = \frac{1\,200}{(\frac{1}{4})(2)}, \qquad \sigma = 2\,400 \text{ lb/plg}^2$$

Esto indica que la longitud de la sección considerada no tiene efecto sobre el esfuerzo unitario en las paredes del cilindro. ■

Problemas

10.49 Determinar el esfuerzo circunferencial en las paredes de un cilindro que tiene un diámetro de 1 m y un espesor de las paredes de 8 mm. La presión interna es de 500 KPa.

10.50 Determinar el esfuerzo circunferencial en las paredes de una torre para agua, a 12 plg arriba de la base. El diámetro de la torre es de 12 pies, su altura es de 25 pies, y el espesor de la placa en la sección considerada es de ¾ plg.

10.51 Determinar el espesor necesario para un cilindro a presión cuyo diámetro es de 0.8 m. La presión interna es de 840 KPa, y el esfuerzo admisible es de 69 MPa.

10.52 Determinar el espesor necesario para la placa de la torre para agua del problema 10.50. El esfuerzo admisible es de 12 000 lb/plg^2.

10.53 Se compra un cilindro que se va a usar como recipiente a presión. Determinar la presión interna admisible si el diámetro es de 0.6 m, el espesor de la placa es de 6 mm, y el esfuerzo circunferencial admisible es de 69 MPa.

10.54 Determinar el diámetro máximo admisible de un cilindro que contiene un fluido a una presión de 90 lb/plg^2; el espesor de la placa es de $\frac{5}{16}$ plg y el esfuerzo admisible es de 12 000 lb/plg^2.

10.55 Una tubería para agua de 20 plg de diámetro, fabricada con duelas de madera se conserva unida mediante flejes de acero que tienen una sección transversal de 1½ plg × $\frac{1}{16}$ plg. El esfuerzo admisible de tensión en los flejes es de 15 000 lb/plg². Determinar el espaciamiento necesario de los flejes para una presión del agua de 10 lb/plg².

10.11 Fuerzas longitudinales en recipientes cilíndricos

Cuando un cilindro que contiene un fluido a presión tiene cerrados los extremos, además de las fuerzas circunferenciales descritas en la sección 10.9, actúan en las paredes del cilindro fuerzas longitudinales. La Fig. 10.16 muestra un cilindro cerrado sometido a una presión interna de fluido que tiende a empujar los extremos hacia afuera. Este empuje hacia afuera es resistido por las fuerzas longitudinales en las paredes del cilindro.

La ley de Pascal establece que la presión de un fluido confinado es la misma en todas direcciones. Por consiguiente, a presión del fluido en los extremos del cilindro es también p lb/plg². La fuerza resultante de la presión del fluido que actúa contra el extremo del cilindro de la Fig. 10.16 (b) es F', y es igual a la presión multiplicada por el área sobre la que actúa. Expresado algebraicamente,

$$F' = pA = p\frac{\pi D^2}{4}.$$

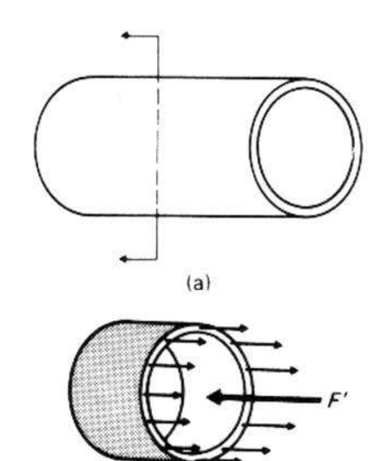


FIGURA 10.16

Como el diagrama del cuerpo libre de la Fig. 10.16 (b) está en equilibrio, las paredes del cilindro deben ejercer fuerzas longitudinales hacia la derecha, resistiendo a F'. Por estática obtenemos:

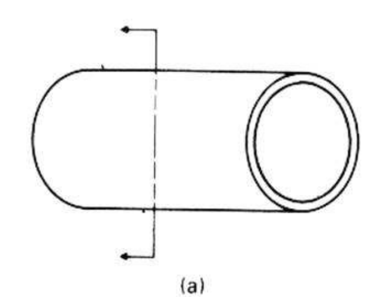
$$\sum F_x = 0: \qquad P' = F',$$

donde

P' = fuerza resultante en las paredes del cilindro,
F' = fuerza sobre el extremo del cilindro producida por la presión interna del fluido.

Conociendo P', podemos determinar el esfuerzo unitario longitudinal a partir de $\sigma = P'/A$. En este caso, A es el área de la sección transversal de las paredes del cilindro, y puede expresarse como la circunferencia multiplicada por el espesor, o sea, $A = \pi Dt$.

Debe notarse que los esfuerzos longitudinales descritos aquí están en la dirección del esfuerzo, es decir, a lo largo del cilindro. Los esfuerzos circunferenciales están dirigidos tangencialmente a la circunferencia del cilindro.



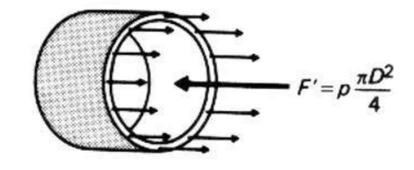


FIGURA 10.17

EJEMPLO 10.13 Determinar el esfuerzo longitudinal en las paredes del cilindro cerrado mostrado en la Fig. 10.17. El diámetro del cilindro es de 30

plg, el espesor de sus paredes es de 3/8 plg y la presión interna del fluido es de 60 lb/plg².

SOLUCION

$$\sum F_x = 0: \qquad P' = F' = p\frac{\pi D^2}{4} = (60)\frac{\pi}{4}(30)^2$$

$$P' = 42\,500 \text{ lb};$$

$$\sigma = \frac{P'}{A} = \frac{P'}{\pi Dt} = \frac{42\,500}{\pi(30)(3/8)} = 1\,200 \text{ lb/plg}^2. \quad \blacksquare$$

10.12 Esfuerzos circunferenciales y longitudinales

En las secciones 10.9 y 10.10, se encontró que $2P = pDL$, y que $\sigma = P/A = P/tL$. Combinando estas expresiones para eliminar la fuerza P se llega a:

$$P = \frac{pDL}{2}; \qquad P = \sigma A = \sigma tL,$$

$$\sigma tL = \frac{pDL}{2},$$

$$\sigma = \frac{pD}{2t}. \tag{10.2}$$

La ec. (10.2) determina el esfuerzo circunferencial en un cilindro en términos de la presión interna del fuido, del diámetro y del espesor de la pared.

En el caso de esfuerzos longitudinales, pueden combinarse las ecuaciones de la sección 10.11 de una manera semejante eliminando P' de las ecuaciones correspondientes, así;

$$P' = F' = p\frac{\pi D^2}{4}; \qquad P' = \sigma A = \sigma\pi Dt,$$

$$\sigma\pi Dt = p\frac{\pi D^2}{4},$$

$$\sigma = \frac{pD}{4t}. \tag{10.3}$$

La ec. (10.3) da el esfuerzo longitudinal en un cilindro en términos de la presión interna del fluido, del diámetro y del espesor de la pared.

Debe notarse que en un recipiente cilíndrico cerrado, tanto el esfuerzo circunferencial como el esfuerzo longitudinal actúan simultáneamente. También, que el esfuerzo circunferencial es el doble en magnitud que el esfuerzo longitudinal. Por consiguiente, en el diseño del cilindro, el esfuerzo circunferencial dado por la ec. (10.2) gobernaría.

10.13 Recipientes esféricos

El análisis de recipientes esféricos a presión es semejante al descrito para los esfuerzos longitudinales en la sección 10.11. El procedimiento en este caso consiste en cortar la esfera según un círculo máximo, como en la Fig. 10.18, y analizar, el diagrama de cuerpo libre por estática.

La fuerza resultante F' producida por la presión del fluido es igual a la magnitud de la presión del fluido multiplicada por el área proyectada del hemisferio. Expresado algebraicamente:

$$F' = pA_{\text{proyectada}} = p\,\frac{\pi D^2}{4}.$$

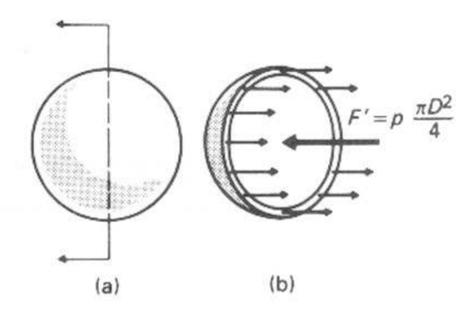


FIGURA 10.18

Aplicando la estática, tenemos

$$\sum F_x = 0: \qquad P' = F' = p\,\frac{\pi D^2}{4}.$$

El esfuerzo en las paredes del recipiente esférico puede encontrarse nuevamente por medio de $\sigma = P'/A$. El área en este caso es $\pi\ Dt$.

Se obtiene una expresión algebraica para este esfuerzo eliminando la fuerza P':

$$P' = \sigma A = \sigma \pi D t,$$

$$= F' = p\,\frac{\pi D^2}{4},$$

$$\sigma \pi D t = p\,\frac{\pi D^2}{4},$$

$$\sigma = \frac{pD}{4t}. \qquad (10.4)$$

Nótese que la magnitud del esfuerzo unitario en un recipiente esférico cerrado es igual a la del esfuerzo longitudinal en un recipiente cilíndrico cerrado.

Problemas

10.56 Suponiendo que el cilindro descrito en el problema 10.49 está cerrado, determinar el esfuerzo longitudinal en las paredes.
10.57 Un cilindro cerrado que contiene un fluido a una presión de 250 lb/plg² tiene 6 plg de diámetro y 0.10 plg de espesor. Determinar los esfuerzos circunferencial y longitudinal en el cilindro.
10.58 Un recipiente esférico para gas de 30 pies de diámetro contiene fluido a una presión de 48 lb/plg², ¿cuál es el esfuerzo en las paredes si el espesor de la placa es de ⅜ plg?
10.59 Determinar el espesor mínimo de la placa para un recipiente esférico de 9 m de diámetro si contiene un gas a una presión de 240 kPa. El esfuerzo admisible es de 82 MPa.
10.60 Determinar el diámetro máximo permisible de un recipiente esférico si el espesor de la placa es de 6 mm, la presión del gas es de 420 KPa. y el esfuerzo de tensión admisible es de 69 MPa.

10.61 Determinar el esfuerzo cortante máximo para el cilindro del Problema 10.57. Esto implica la combinación de esfuerzos descrita en el Capítulo 9.
10.62 Determinar el esfuerzo cortante máximo para el recipiente esférico del problema 10.58. Esto implica la combinación de esfuerzos descrita en el Capítulo 9.

10.14 Cilindros de pared gruesa

La teoría y el análisis descritos en las secciones 10.8 a 10.13 se aplican solamente a cilindros "de pared delgada". La teoría de los cilindros y esferas de pared delgada se basa en la suposición de que la distribución de esfuerzos es uniforme a través del espesor de las paredes. La Fig. 10.19 muestra la distribución real y la distribución supuesta en las paredes del cilindro.

Como se muestra en la Fig. 10.19 (a) el esfuerzo real no está uniformemente distribuido, sino que es mayor en la cara interior que en la cara exterior. Si la diferencia entre los dos esfuerzos es pequeña, y por consiguiente, el esfuerzo promedio no es mucho menor que el esfuerzo máximo, puede suponerse que está uniformemente distribuido, como en la Fig. 10.19 (b). Conforme el espesor de la pared se incrementa, esta diferencia entre el esfuerzo promedio y el esfuerzo máximo se vuelve más significativa.

Usamos lo siguiente como guía para diferenciar entre cilindros de pared delgada y de pared gruesa. Si el espesor de la pared es $\frac{1}{10}$ del diámetro, el esfuerzo máximo será aproximadamente 10% mayor que el esfuerzo real. Para un espesor mayor esta diferencia crece rapidamente. Por consiguiente, una relación del espesor de la pared al diámetro de aproximadamente $\frac{1}{10}$, representa una línea divisoria conveniente entre los cilindros de pared delgada descritos en esta sección y los cilindros de pared gruesa.

En el análisis de cilindros de pared delgada, relativamente no tiene importancia si se usa en los cálculos el diámetro interior, el diámetro me

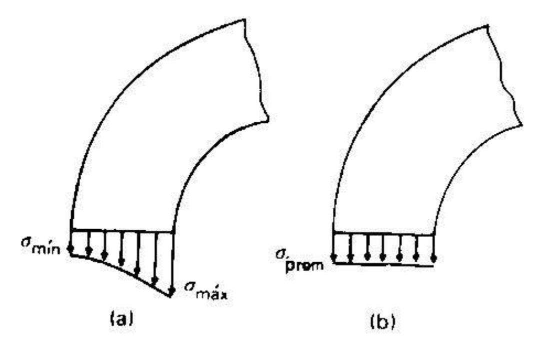


FIGURA 10.19 (a) Distribución real del esfuerzo, (b) distribución supuesta del esfuerzo.

dio o el exterior. Considerando la deducción de la fuerza resultante debida a la presión, descrita en la sección 10.10, probablemente deberíamos usar el diámetro interior, pero el error es pequeño cuando se usa otro diámetro.

Concentraciones de esfuerzos y fatiga SECCION E

10.15 Concentraciones de esfuerzo

En la sección 2.2 se presentó la fórmula $\sigma = P/A$, donde σ representa la intensidad del esfuerzo sobre el área de una sección tranversal dada. En realidad esta fórmula da el esfuerzo promedio en la sección tranversal. Si la sección es uniforme y no tiene cambios bruscos de sección transversal, este esfuerzo promedio representa el esfuerzo real. Sin embargo, si en un miembro ocurren cambios bruscos en la sección transversal, el esfuerzo máximo en esa sección será considerablemente mayor que el esfuerzo promedio dado por $\sigma = P/A$.

Por ejemplo, las secciones *A-A* y *D-D* de la Fig. 10.20 no tienen cambios repentinos de sección transversal. Se considera que los esfuerzos en estas secciones son uniformes y se pueden calcular a partir de $\sigma = P/A$. Sin embargo, en las otras secciones indicadas en la Fig. 10.20, $\sigma = P/A$ da solamente la intensidad media del esfuerzo. El esfuerzo máximo puede ser considerablemente mayor que el esfuerzo promedio. Las intensidades altas de esfuerzo que ocurren, se llaman concentraciones de esfuerzos. Dependiendo del tipo de material usado y de las cargas a las cuales será sometido, estas concentraciones de esfuerzos pueden o no ser significativas para el diseño.

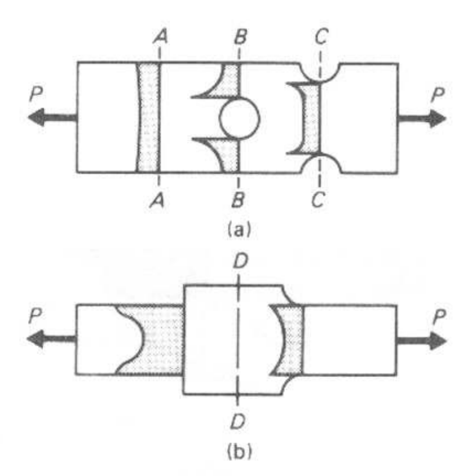


FIGURA 10.20

Las concentraciones de esfuerzos en un material frágil, tal como el que tenga un diagrama esfuerzo-deformación unitaria semejante al mostrado en la Fig. 10.21 (a), deben considerarse en el diseño. La razón de esto es que si el esfuerzo último se alcanza en unas cuantas fibras grandemente cargadas, esas fibras se romperán, aunque la intensidad del esfuerzo promedio quede bien abajo del esfuerzo último. Las pocas fibras rotas forman una grieta diminuta que reduce aún más el área neta de la sección. Esta reducción de área hace que más fibras se sobrecarguen hasta fallar. Una grieta progresiva se desarrolla rápidamente haciendo que se fracture todo el miembro.

Por otro lado, si el material es dúctil y está sujeto a cargas estáticas, las concentraciones de esfuerzos no son significativas. Por ejemplo, si algunas fibras de un miembro fabricado con un material dúctil que tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria semejante al mostrado en la Fig. 9.19 (b) se esfuerzan hasta el límite elástico del material, las fibras no se romperán. En vez de eso, soportarán esa carga y continuarán deformándose. Esto da por resultado una redistribución de esfuerzos que,

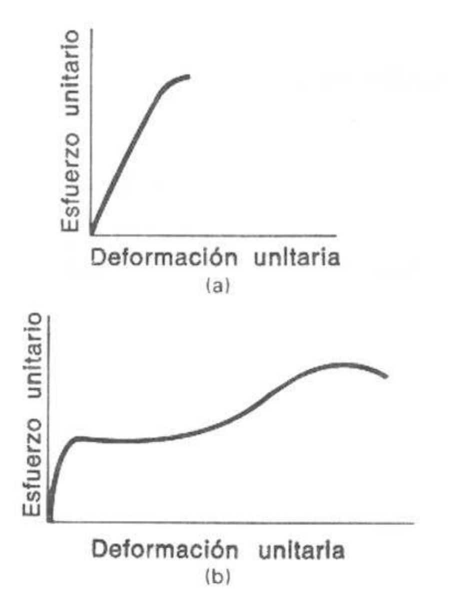


FIGURA 10.21 (a) Material frágil, (b) material dúctil.

para cargas estáticas, es aceptable y no debe causar una preocupación excesiva.

Sin embargo, si el material es dúctil pero las cargas se aplican un gran número de veces, tal como pasa en una parte móvil de una máquina o en un miembro de un puente, las concentraciones de esfuerzos deben investigarse más a fondo. Si unas cuantas fibras se cargan repetidamente hasta una alta intensidad y después se descargan, el material llega a fatigarse y esas fibras pueden fracturarse. La fractura de unas cuantas fibras en la sección transversal reduce el área, y como consecuencia más fibras se sobrecargan hasta la alta intensidad. Finalmente estas fibras se fracturan y conforme el proceso continúa se desarrolla una grieta progresiva. Esta grieta diminuta llega a ser lo suficientemente grande hasta causar que el miembro se fracture de una manera semejante a la fractura de un material frágil.

10.16 Concentraciones de esfuerzos en el diseño

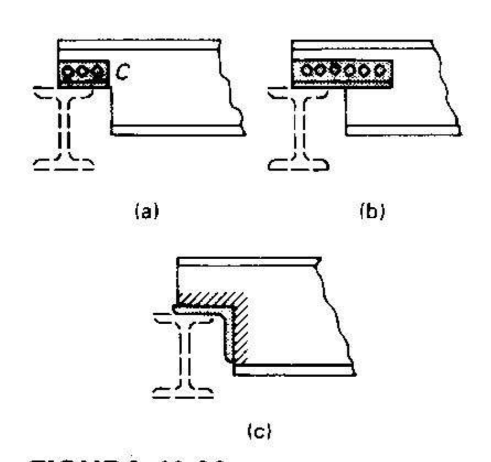


FIGURA 10.22

Las concentraciones de esfuerzos pueden considerarse en diseño de varias maneras diferentes. En algunos casos puede ser suficiente el conocimiento de su existencia y alguna acción correctiva en los detalles de construcción. Por ejemplo, considere la viga de la Fig. 10.22. Suponga que esta viga está conectada al patín superior de una viga principal a un nivel tal que necesite coronamiento, o hacer un corte en la parte inferior de la viga. Ocurrirán concentraciones de esfuerzos en la esquina interior C. Si la conexión se hace como se muestra en la Fig. 10.22 (a), estas concentraciones de esfuerzos harán que la conexión sea considerablemente más débil que las mostradas en la Fig. 10.22 (b) y (c). Estos últimos diseños serían más aceptables porque la esquina queda reforzada y se hace innecesario el cálculo del máximo esfuerzo real.

Una segunda manera de tratar las concentraciones de esfuerzos consiste en reducir el esfuerzo admisible en el diseño de los miembros principales y las conexiones. Esta es una práctica común cuando se espera fatiga en el material debida a carga repetida o cíclica. Las especificaciones de diseño limitan el esfuerzo admisible, dependiendo del número de repeticiones esperadas de la carga durante la vida útil del miembro y las inversiones de esfuerzos que puedan ocurrir.

Un tercer tratamiento consiste en calcular la intensidad del esfuerzo máximo y diseñar con base en ese valor. Como las concentraciones de esfuerzos ocurren en miembros sujetos a cualquier clase de carga, la intensidad máxima del esfuerzo puede determinarse multiplicando el esfuerzo calculado a partir de fórmulas elementales por un factor de concentración de esfuerzos adecuado. Por ejemplo, el esfuerzo máximo en un miembro cargado axialmente, tal como el mostrado en la Fig. 10.20, puede calcularse como

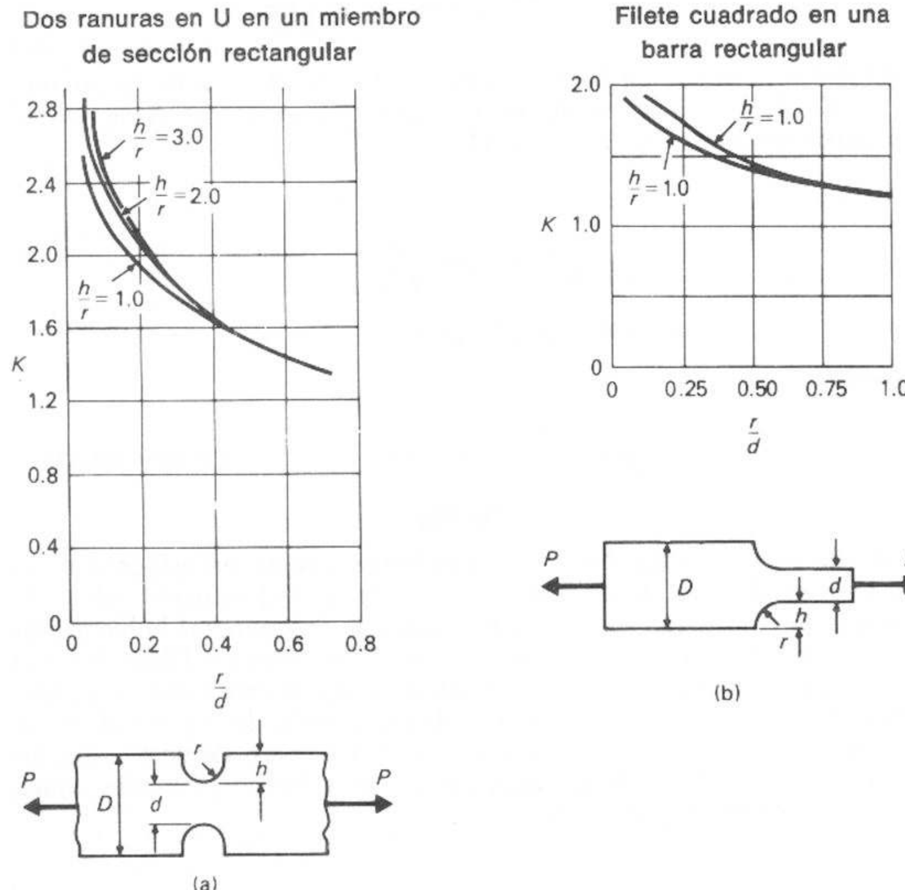
$$\sigma_{\text{máx}} = K\left(\frac{P}{A}\right). \tag{10.5}$$

donde K es el factor de concentración de esfuerzos.

Los factores de concentración de esfuerzos se pueden determinar tanto teórica como empíricamente. Dependen de la geometría y dimensiones de los cambios en la sección transversal así como del tipo de carga a que el miembro está sujeto.

La Fig. 10.23 ilustra el uso de factores de concentración de esfuerzos típicos, mostrando tres curvas que relacionan la geometría de un miembro cargado axialmente con el factor de concentración de esfuerzos. El ejemplo 10.14 ilustra el uso de estas curvas.

Debido a la amplia variedad de condiciones de carga y dimensiones geométricas, estas curvas y ejemplos se dan solamente con la intención de ilustrar el método general de solución. Curvas más completas, fórmulas y tablas se encuentran en varios manuales de ingeniería, libros de texto sobre diseño de máquinas, y los libros más avanzados sobre resistencia o mecánica de materiales.



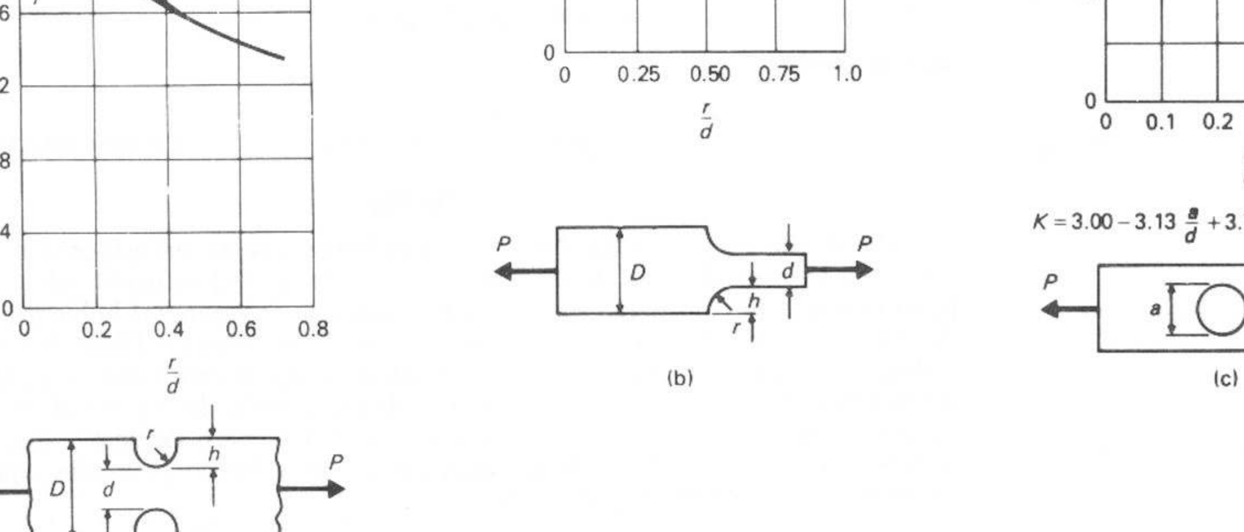


FIGURA 10.23 Estas curvas están tomadas de *Formulas for Stress and Strain,* 3a. ed., Por R. J. Roark (Con permiso de McGraw-Hill Book Co. Inc. Nueva York 1954).

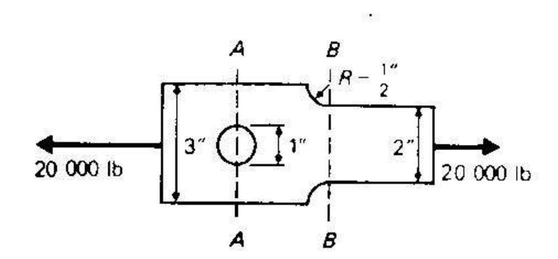


FIGURA 10. 24

EJEMPLO 10.14 Una placa plana de acero de 3 plg × ½ plg tiene un agujero circular de 1 plg de diámetro en la sección A–A y dos filetes de transición semicirculares de ½ plg de radio en la sección B–B de la Fig. 10.24. Determinar el esfuerzo promedio y el esfuerzo máximo que ocurren en esas secciones debidos a una fuerza axial de tensión de 20 000 lb.

SOLUCION El esfuerzo promedio en las dos secciones es el mismo:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{20\,000}{(3-1)(\frac{1}{2})} = 20\,000 \text{ lb/plg}^2$$

Los esfuerzos máximos en las secciones A–A y B–B se determinan mediante $\sigma = K\ (P/A)$. El factor de concentración de esfuerzos K se puede obtener a partir de la Fig. 10.23 (c) y (b).

Sección A–A:

$$\sigma = K\frac{P}{A} = 2.3(20\,000)$$

$$\sigma = 46\,000 \text{ lb/plg}^2.$$

Sección B–B:

$$\sigma = K\frac{P}{A} = 1.6(20\,000)$$

$$\sigma = 32\,000 \text{ lb/plg}^2$$

Nótese que en la sección A–A, el acero debería tener un esfuerzo en el punto de fluencia de más de 46 000 lb/plg² para que el esfuerzo calculado fuera correcto. Si el esfuerzo en el punto de fluencia del material hubiera sido de 36 000 lb/plg² y si el material hubiera sido dúctil, algunas fibras habrían cedido. Si el miembro soportara cargas estáticas, este esfuerzo sería aceptable, suponiendo que el esfuerzo permisible, basado en factores de seguridad, no se excediera. Sin embargo, si la carga se aplicara gran número de veces, aún un material dúctil finalmente se fracturaría, aunque el esfuerzo promedio nunca se excediera de 20 000 lb/plg². ■

Problemas

10.63-10.67 Calcular las intensidades máximas y promedio del esfuerzo en las secciones indicadas en las Figs. P10.63 a P1067.

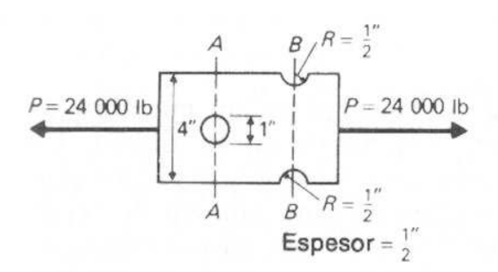


FIGURA P10.63

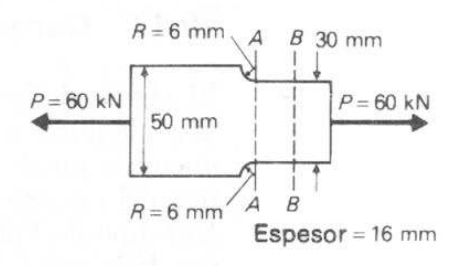


FIGURA P10.64

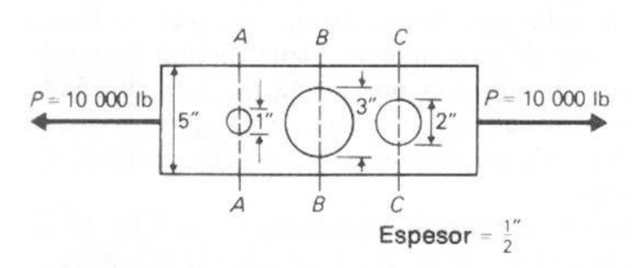


FIGURA P10.65

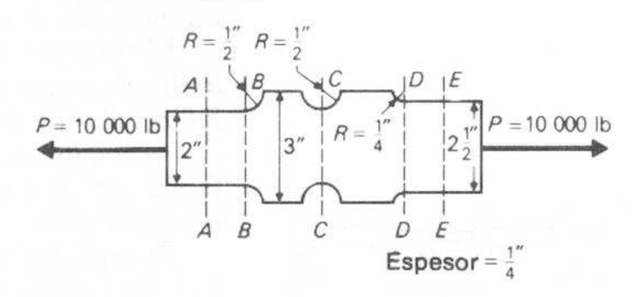
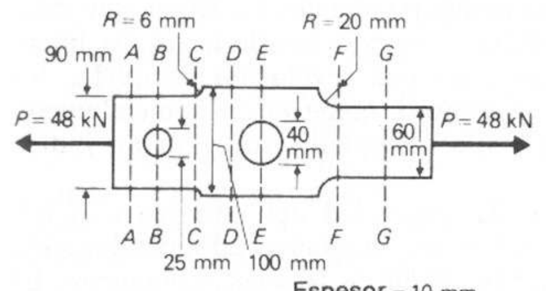


FIGURA P10.66



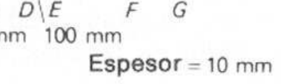


FIGURA P10.67

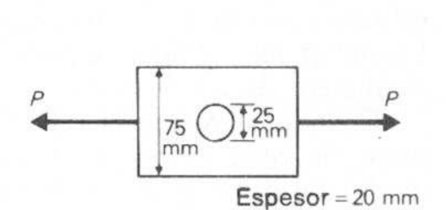


FIGURA P10.68

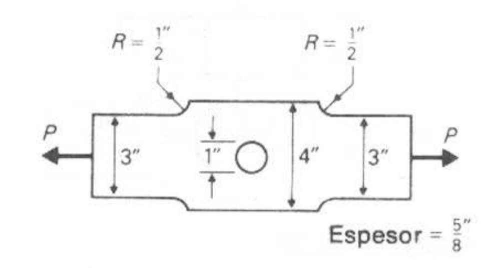


FIGURA P10.69

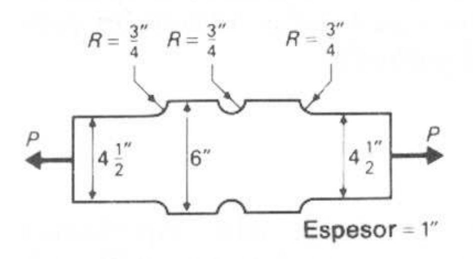


FIGURA P10.70

FIGURA P10.71

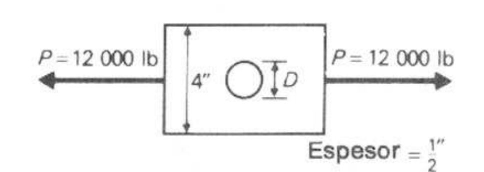


FIGURA P10.72

10.68-10.71 Determinar la carga máxima que puede aplicarse a los miembros indicados en las Figs. P10.68 a P10.71 cuando el esfuerzo en cualquier punto debe ser menor de 18 000 lb/plg², o de 124 MPa.

10.72 Suponiendo que la intensidad máxima del esfuerzo (Fig. P10.72) no debe exceder de 16 000 lb/plg², determinar el diámetro máximo del agujero permitido en la placa.

10.73 Determinar el radio mínimo permisible de los filetes de transición para la placa mostrada en la Fig. P10.73. La intensidad máxima del esfuerzo no debe exceder de 110 MPa.

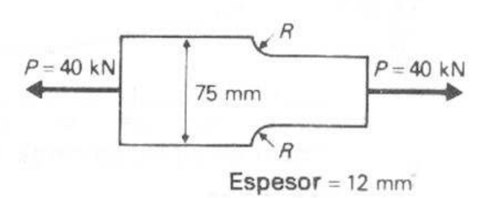
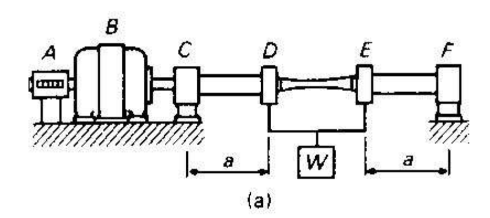


FIGURA P10.73

10.17 Carga de fatiga

El efecto de las aplicaciones repetidas de la carga en un miembro de una máquina u otra estructura es muy importante en su diseño. Un miembro puede fallar (fracturarse) a esfuerzos inferiores al límite elástico del material, si estos esfuerzos se repiten un gran número de veces. Este tipo de falla se llama una *falla por fatiga*. El mecanismo exacto de una falla por fatiga no se comprende completamente por ahora; sin embargo, cierto número de factores que afectan la resistencia a la fatiga de un miembro se conocen y pueden utilizarse en el diseño.

El esfuerzo asociado con la falla por fatiga de un material se llama *límite de resistencia*. Se determina de una manera experimental trazando los resultados de cierto número de pruebas por fatiga. Se han diseñado varias máquinas para someter a un miembro a una carga que produzca fatiga. En la Fig. 10.25 se muestra un esquema de un tipo común de máquina para pruebas de fatiga.



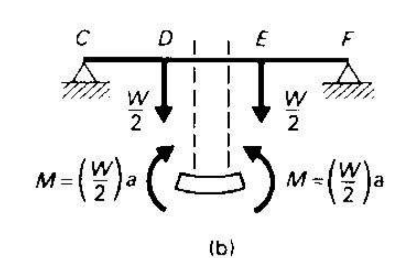


FIGURA 10.25

El espécimen DE se coloca en la máquina mostrada en la Fig. 10.25 (a). Se somete a la flexión pura (Fig. 10.25 b) y se calcula el esfuerzo por la ec. $\sigma = Mc/I$. El momento, y por consiguiente, los esfuerzos, pueden variarse cambiando los pesos W.

A medida que el espécimen gira media revolución, las fibras que estaban a tensión van quedando sometidas a un esfuerzo de la misma intensidad, pero en compresión. Después de una revolución completa, los esfuerzos son de la misma clase y magnitud, como lo eran inicialmente. Un motor hace girar el espécimen a alta velocidad y un contador indica el número de revoluciones.

Cuando se rompe el espécimen, la intensidad del esfuerzo y el número de revoluciones se trazan sobre un diagrama esfuerzo-duración (σ–N), tal como el mostrado en la Fig. 10.26 de la sección siguiente. El número de ciclos de carga hasta la falla y el esfuerzo correspondiente proporcionan las coordenadas de un punto sobre la gráfica. Después se repite el ensayo hasta obtener suficientes coordenadas adicionales para trazar la curva de falla para ese material particular.

10.18 Esfuerzos por fatiga

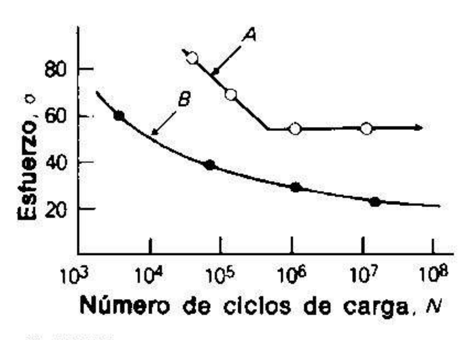


FIGURA 10.26

Los resultados de una serie de ensayos por fatiga sobre especímenes idénticos de un mismo material pueden trazarse sobre una gráfica de esfuerzos contra ciclos de carga al momento de la falla. A partir de la curva A o B de la Fig. 10.26 puede verse que conforme se aumenta el esfuerzo, se disminuye el número de repeticiones de ese esfuerzo necesario para producir la fractura. La curva para algunos materiales, tal como la curva A de la Fig. 10.26, exhibe un quiebre brusco en algún valor del esfuerzo y se vuelve horizontal para mayor número de ciclos de carga. El esfuerzo correspondiente a esa condición se llama el *límite de resistencia* del material. Significa que si un material se somete a un

esfuerzo menor o igual al límite de resistencia, puede soportar un número ilimitado de repeticiones de ese esfuerzo.

La curva para otros materiales, tal como la curva B de la Fig. 10.26, puede no exhibir el quiebre brusco en un esfuerzo particular. En estos materiales, el límite de resistencia no está bien definido. En casos como éste, es práctica común considerar el límite de resistencia como el esfuerzo a un número arbitrario de repeticiones de la carga. El valor del límite de resistencia se toma generalmente a 500 millones de ciclos de carga.

El mecanismo de falla por fatiga no se comprende completamente, pero aparentemente uno de los factores más significativos que influye es la concentración de esfuerzos. Es probable que el esfuerzo sobre algunas regiones pequeñas del material pueda ser extremadamente alto. Si los esfuerzos sobre algunas fibras alcanzan el valor último para el material, esas fibras se romperán. La repetición de la carga hace que comience una grieta diminuta en esos puntos de gran esfuerzo y que progresivamente se desarrolle a través de toda la sección. Esto da por resultado una fractura similar a la de los materiales frágiles, aunque el material sea dúctil.

El diseño de un miembro sujeto a un gran número de aplicaciones repetidas de carga durante su vida útil debe considerar este fenómeno de fatiga. Como las grietas se desarrollan en los puntos donde se presentan grandes esfuerzos, el proyectista debe de tratar de reducir la intensidad de esas concentraciones de esfuerzos siempre que sea posible. Las discontinuidades accidentales en la sección transversal, tal como las que se presentan en superficies ásperas dañadas por melladuras y rayaduras, pueden eliminarse mediante esmerilado o pulido. Las discontinuidades intensionales pueden hacerse menos serias efectuando gradual y no bruscamente los cambios de dimensiones. Por ejemplo, la esquina abrupta de la Fig. 10.27 (a) produce concentraciones mucho mayores de esfuerzos que las esquinas redondeadas de la Fig. 10.27 (b).

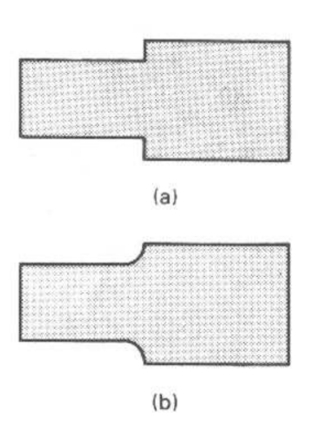


FIGURA 10.27

11

Tópicos avanzados en flexión

11.1 Introducción

La ecuación $\sigma = Mc/I$ tiene validez y aplicación amplia en situaciones donde una viga se ajusta a ciertos requisitos necesarios. Entre estos se incluye la necesidad de que la carga se aplique paralelamente a un eje principal y tenga su línea de acción intersectando el centro de cortante. La teoría del capítulo 5 supuso esta situación, y los problemas de ese capítulo se estructuraron de manera tal que se aseguraba el cumplimiento de esa condición. Obviamente, la situación usual de diseño y fabricación tiene una validez teórica muy firme.

Sin embargo, ¿qué significa *flexión asimétrica y centro de cortante*? ¿Cómo reconocemos las situaciones en que existen, y cómo las analizamos? Este capítulo cubre la teoría relacionada con estos tópicos de modo que puedan reconocerse las situaciones donde existen problemas potenciales y puedan llevarse a cabo soluciones de diseño adecuadas.

11.2 Flexión asimétrica

La influencia de la simetría en el diseño estructural y de máquinas es importante. La ecuación $\sigma = Mc/I$ no puede usarse indiscriminadamente en ciertas situaciones. Cuando una sección simétrica está cargada asimétricamente o cuando se usa una sección transversal asimétrica, el proyectista debería estar alerta para los problemas analíticos potenciales.

Los ejes principales, mayor y menor, son aquellos ejes con respecto a los cuales ocurren los momentos de inercia máximo y mínimo. Los ejes de simetría siempre son ejes principales. Las Secciones A.21 a la A.24 del Apéndice discuten el procedimiento para determinar la localización de los ejes principales y la magnitud de los momentos principales de inercia.

La superposición de esfuerzos ofrece una solución directa al problema de la flexión asimétrica. Una carga aplicada o su momento flexionante resultante puede descomponerse en componentes paralelas a cada uno

de los ejes principales. El esfuerzo en cualquier lugar puede calcularse mediante

$$\sigma = \pm\frac{M_X c}{I_X} \pm \frac{M_Y c}{I_Y}. \tag{11.1}$$

Los subíndices X y Y de la ecuación (11.1) se usan generalmente para designar dos ejes rectangulares cualesquiera. A menudo se usan los subíndices U y V para designar los ejes principales. En la práctica, no se mantiene uniformidad en nomenclatura de modo que se recomienda al estudiante reconocer el significado de los ejes que se están considerando.

EJEMPLO 11.1 Una viga en voladizo que tiene una sección transversal de 100 mm × 150 mm (tamaño real), como se indica en la Fig. 11.1, soporta una fuerza de 1 300 N en su extremo libre. La línea de acción de la fuerza pasa a través del centro de la sección transversal según una pendiente de 12 a 5. Determinar

a) El esfuerzo en las cuatro esquinas adyacentes al apoyo.
b) La distribución de esfuerzos a lo largo de las cuatro aristas adyacentes al apoyo.
c) La posición del eje neutro en ese lugar.

SOLUCION La fuerza oblicua se descompone en fuerzas a lo largo de los ejes X y Y. El momento flexionante $M_X = 2\,400$ N · m produce esfuerzos de tensión a lo largo de la cara AB y esfuerzos de compresión a lo largo de la cara CD, mientras que el momento $M_Y = 1\,000$ N · m produce esfuerzos de tensión a lo largo de la cara BC y esfuerzos de compresión a lo largo de la cara AD. Los esfuerzos que provienen de estos momentos se superponen:

$$M_X = M_U = (1\,200)(2) = 2\,400 \text{ N}\cdot\text{m};$$
$$M_Y = M_V = (500)(2) = 1{,}000 \text{ N}\cdot\text{m};$$
$$I_X = I_U = (\tfrac{1}{12})(100\times10^{-3})(150\times10^{-3})^3 = 28.1\times10^{-6}\text{ m}^4;$$
$$I_Y = I_V = (\tfrac{1}{12})(150\times10^{-3})(100\times10^{-3})^3 = 12.5\times10^{-6}\text{ m}^4.$$

Sustituyendo estos en la ecuación (11.1), tenemos

$$\sigma = \pm\frac{M_X c}{I_X} \pm \frac{M_Y c}{I_Y}$$
$$\sigma_A = +\frac{(2\,400)(75\times10^{-3})}{28.1\times10^{-6}} - \frac{(1\,000)(50\times10^{-3})}{12.5\times10^{-6}},$$
$$= 6.4 \text{ MPa} - 4 \text{ MPa}.$$

y por lo tanto

$$\sigma_A = +2.4 \text{ MPa (tensión)},$$
$$\sigma_B = +6.4 + 4 = +10.4 \text{ MPa (tensión)},$$
$$\sigma_C = -6.4 + 4 = -2.4 \text{ MPa (compresión)},$$
$$\sigma_D = -6.4 - 4 = -10.4 \text{ MPa (compresión)}.$$

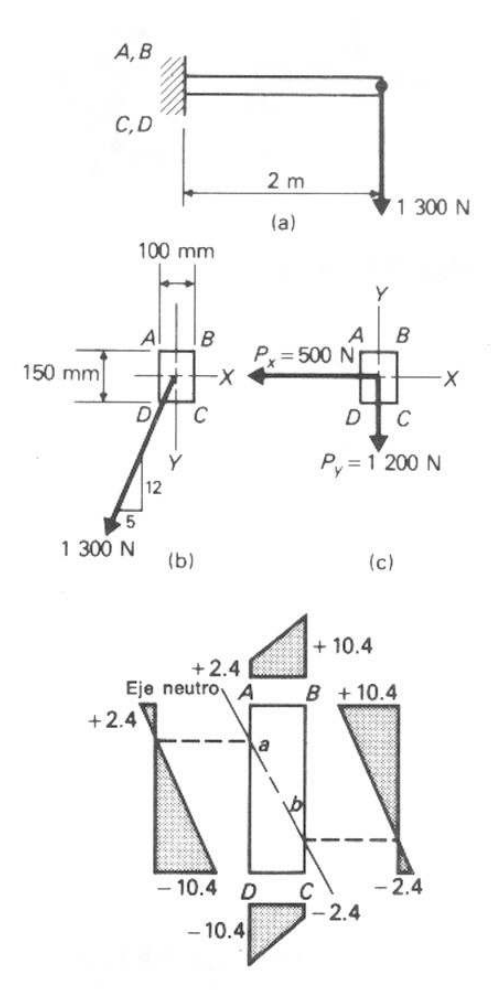


FIGURA 11.1

Las distancias variables en la ecuación (11.1) están elevadas a la primera potencia. Por consiguiente, la distribución de esfuerzos determinada por la ecuación (11.1) es lineal. Ya que conocemos los esfuerzos en las cuatro esquinas, la distribución de esfuerzos a lo largo de las caras será como se indica en la Fig. 11.1 (d). El eje neutro es la recta a la largo de la cual el esfuerzo es cero. Será una recta cuyas extremidades están en los puntos *a* y *b* de la Fig. 11.1 (d). ■

Problemas

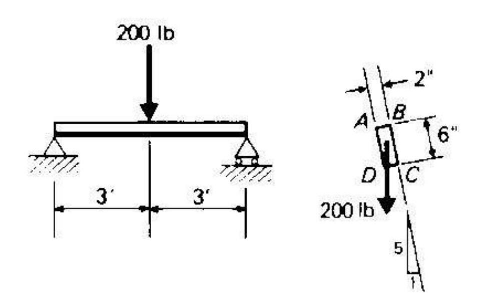


FIGURA P11.1

11.1 Una carga de 200 lb actúa verticalmente a través del centro de una viga libremente apoyada de 6 pies de longitud, como se indica en la Fig. P11.1. La viga es de 2 plg × 6 plg (tamaño nominal) y la cara de 6 plg está inclinada según una pendiente de 5 a 1. Determinar, para la sección de momento máximo,

a) Los esfuerzos en las cuatro esquinas.

b) La distribución de esfuerzos a lo largo de las cuatro aristas.

c) La posición del eje neutro.

11.2 Una viga en voladizo que tiene una sección transversal cuadrada está cargada como se indica en la Fig. P11.2. Determinar

a) Los esfuerzos en las cuatro esquinas del apoyo,

b) La distribución de esfuerzos a lo largo de las cuatro aristas del apoyo.

c) La posición del eje neutro en el apoyo.

11.3 Una viga en voladizo de 4 plg × 6 plg (tamaño nominal), de 5 pies de longitud soporta una carga concentrada *P* con una pendiente de 4 a 1, como se indica en la Fig. P11.3. El esfuerzo admisible es de 1 500 lb/plg². Determinar la carga máxima *P* que puede aplicarse.

11.4 Una viga W 12 × 31, de 16 pies de longitud (véase la Fig. P11.4) soporta cargas verticales concentradas de 2 klb en los puntos cuartos. Si el alma de la viga está inclinada según una pendiente de 12 a 5, ¿cuál es el esfuerzo máximo y sobre cuáles esquinas (*A*, *B*, *C*, o *D*) ocurren éstos?

11.5 En la Fig. P11.5 se indica una viga W 10 × 29, de 12 pies de longitud que soporta una carga uniformemente distribuida, *w*. El alma de la viga está inclinada según una pendiente de 12 a 3, y el esfuerzo permisible es de 22 000 lb/plg². Determinar el valor de *w*.

11.6 Una viga en voladizo, de 1 m de longitud está hecha de una sección circular de 100 mm de diámetro, y soporta una carga *P* en su extremo libre

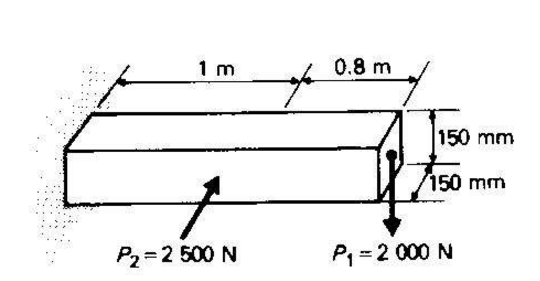


FIGURA P11.2

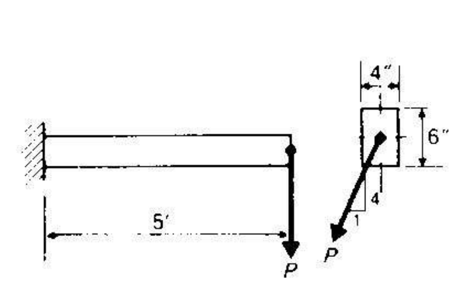


FIGURA P11.3

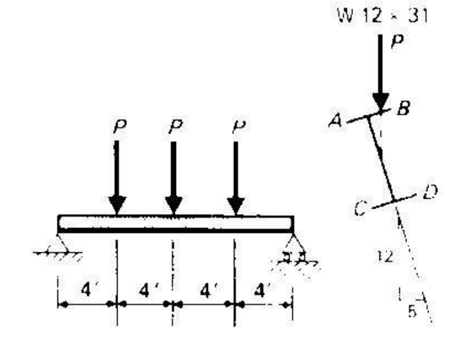


FIGURA P11.4

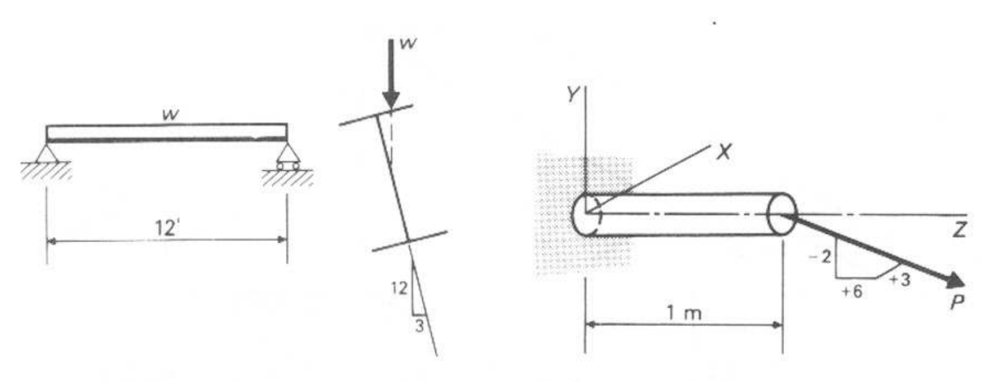


FIGURA P11.5

FIGURA P11.6

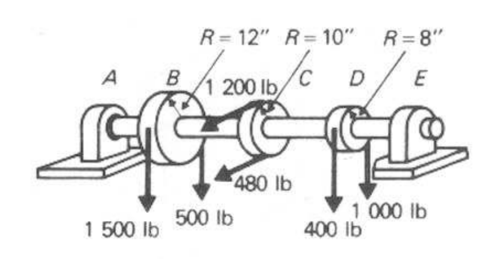


FIGURA P11.8

(véase la Fig. P11.6). Las coordenadas de la pendiente de la fuerza son $x = +\ 3$, $y = -\ 2$, $z = +\ 6$. Determinar los esfuerzos máximos en la viga para $P = 24$ kN.

11.7 Si el esfuerzo admisible en la viga descrita en el problema 11.6 es de 138 MPa, ¿cuál es el valor máximo de P?

11.8 Una flecha circular de 3 plg de diámetro y 8 pies de longitud soporta tres poleas, cada una de las cuales pesa 100 lb. Suponiendo que las fuerzas en las bandas son las indicadas en la Fig. P11.8, determinar el esfuerzo máximo en la flecha debido solamente a las cargas de flexión. (La combinación de los esfuerzos normales y cortantes se cubrió en el capítulo 6.)

11.3 Secciones transversales asimétricas

Ocurrirá flexión asimétrica siempre que las cargas se apliquen en una dirección diferente a la de un eje principal. Consideremos la sección transversal asimétrica indicada en la Fig. 11.2. Supongamos que la carga es un par aplicado en el plano del eje Y-Y. Este sistema de carga tiene un valor de M_X ya que produce momento flexionante con respecto al eje X.

La fuerza en cada fibra puede determinarse a partir de $P = \sigma\, dA$. La fuerza P_i de la Fig. 11.2 produce momento tanto con respecto al eje X como con respecto al eje Y. Análogamente, la fuerza P_j produce momento con respecto a ambos ejes. Sumando momentos con respecto al eje centroidal X da por resultado:

$$M_X = \int P_i y_i + \int P_j y_j. \qquad \text{(a)}$$

Sumando momentos con respecto al eje centroidal Y da por resultado

$$M_Y = \int P_i x_i + \int P_j x_j. \qquad \text{(b)}$$

El momento M_X es el momento resistente interno, y es el que esperamos con una carga aplicada en el plano Y debido a que la carga exterior está en este plano. Sin embargo, esta carga también produce un momento interno, M_y. En otras palabras, la sección transversal asimétrica respon-

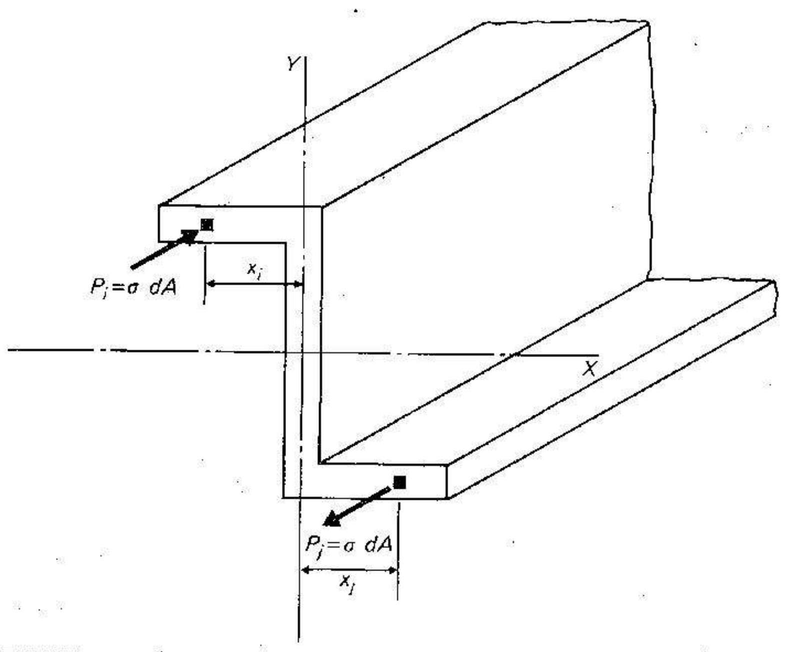


FIGURA 11.2

derá flexionándose en una dirección comprendida entre los dos ejes debido a que existen momentos con respecto a ambos ejes, X y Y.

La Fig. 11.3 indica tres secciones transversales de viga donde se aplican cargas paralelamente al eje Y que no producirá dos momentos internos debido a que hay un eje de simetría. Las fuerzas P_i y P_j son simétricas con respecto a un eje, por lo menos, y por lo tanto no ocurre flexión asimétrica. Las cargas aplicadas que son paralelas a uno de los ejes indicados darán por resultado deflexiones a lo largo de ese eje, solamente.

Nótese que los ejes de la Fig. 11.3 son ejes principales. Una carga aplicada paralelamente a uno de los ejes principales producirá momentos resistentes internos paralelos a ese plano solamente, y es válida la ecuación $\sigma = Mc/I$. Además, las cargas deben intersecar al centro de cortante. En las secciones 11.4 a 11.6 se discute el centro de cortante de una viga.

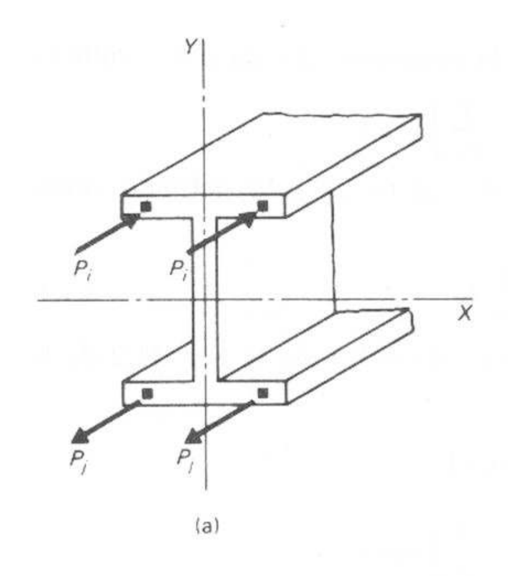
Puede determinarse la relación entre M_X y M_Y para una sección asimétrica, tal como la de la Fig. 11.2. La Fig. 11.4 indica una porción de una curva elástica de una viga asimétrica flexionada alrededor del eje X-X. L_O es la longitud del segmento del eje neutro; δ es el cambio de longitud de cualquier fibra situada a una distancia y del eje neutro, y ρ_X es el radio de curvatura.

Por triángulos semejantes,

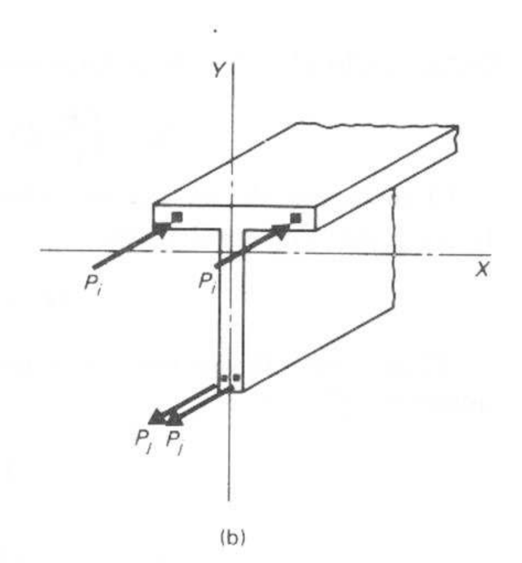
$$\frac{\delta}{y} = \frac{L_0}{\rho_X}; \qquad \frac{\delta}{L_0} = \frac{y}{\rho_X}. \tag{c}$$

Pero,

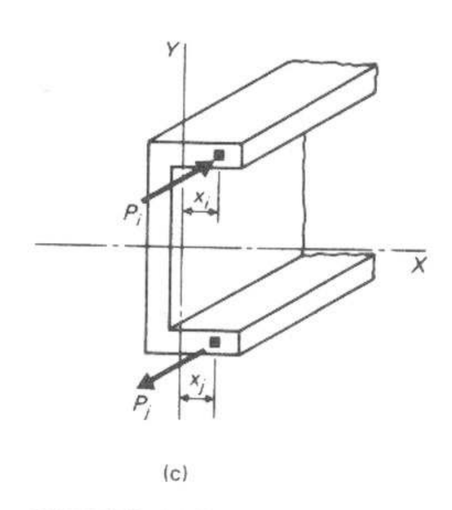
$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0}, \tag{2.2}$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 11.3

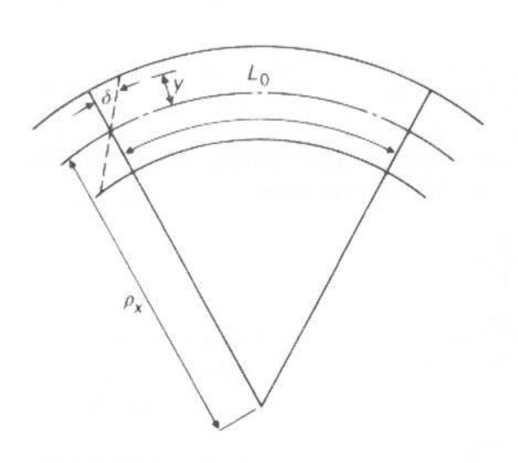


FIGURA 11.4

y

$$\sigma = E\epsilon. \tag{2.3}$$

Por consiguiente, la ecuación (c) puede escribirse como

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho_x};$$

$$\sigma = \frac{yE}{\rho_x}. \tag{d}$$

El momento flexionante con respecto al eje X se obtiene a partir de la ecuación (a) como

$$M_x = \int (\sigma \, dA) y.$$

Sustituyendo el valor de σ dado por la ecuación (d) da por resultado

$$M_X = \int \frac{Ey}{\rho_X} dA\, y = \frac{E}{\rho_X} \int y^2\, dA.$$

El momento de inercia con respecto al eje X está definido como $I_X = \int y^2\, dA$. Por consiguiente,

$$M_X = \frac{E}{\rho_X} I_X \tag{11.2}$$

El momento flexionante con respecto al eje Y-Y de la Fig. 11.2 da la siguiente relación:

$$M_Y = \int \sigma x\, dA;$$

$$M_Y = \int \frac{yE}{\rho_X} x\, dA = \frac{E}{\rho_X} \int xy\, dA. \tag{e}$$

La integral $\int xy\, dA$ está definida como el producto de inercia, P_{XY}. Por consiguiente,

$$M_Y = \frac{E}{\rho_X} P_{XY}. \tag{11.3}$$

Los momentos M_X y M_Y están relacionados. Igualando los términos comunes en las ecuaciones (11.2) y (11.3), obtenemos

$$\frac{E}{\rho_X} = \frac{M_X}{I_X};$$

$$\frac{E}{\rho_X} = \frac{M_Y}{P_{XY}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{M_X}{I_X} = \frac{M_Y}{P_{XY}}$$

$$M_Y = M_X \frac{P_{XY}}{I_X} \tag{11.4}$$

Esto significa que en una sección transversal asimétrica, un momento aplicado con respecto a un solo eje producirá momentos resistentes internos con respecto a ambos ejes. Esto produce deflexiones fuera del plano de carga.

La ecuación $\sigma = Mc/I$ puede usarse exclusivamente sólo cuando las cargas se aplican paralelamente a un eje principal. Esto ocurre solamente cuando $P_{XY} = 0$.

Cuando se usa una sección transversal asimétrica como viga, se conocen I_X, I_Y, y P_{XY}. Por consiguiente, pueden determinarse I_U, I_V, y α. Si la carga de una viga produce un momento flexionante a lo largo de un plano dado, esa carga o ese momento pueden descomponerse en pares M_U y M_V alrededor de los ejes principales U y V. El problema vuelve a ser idéntico al tipo descrito en la sección 11.2.

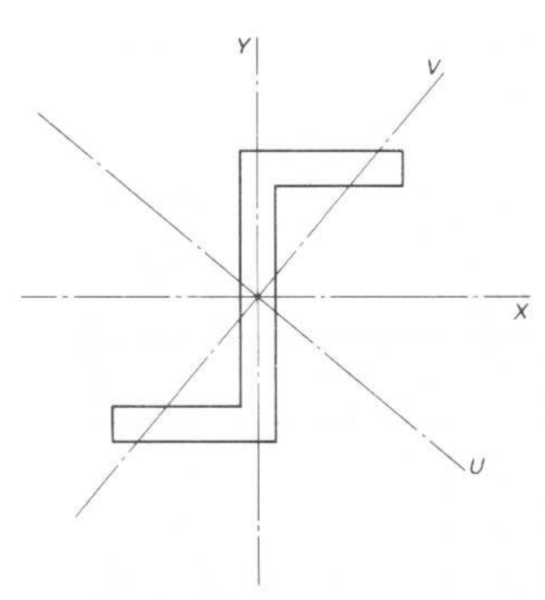


FIGURA 11.5

La Fig. 11.5 indica una sección transversal con ejes centroides X y Y. Los ejes principales, U y V, y el ángulo α que los localiza pueden determinarse por el método descrito en la Sección A.24 del Apéndice. La ecuación (11.1) puede entonces reescribirse en la forma generalizada siguiente

$$\sigma = \pm\frac{M_U v}{I_U} \pm \frac{M_V u}{I_V}. \qquad (11.5)$$

Los términos u y v designan las distancias coordenadas desde los ejes principales U y V hasta la fibra en la cual se están calculando los esfuerzos.

EJEMPLO 11.2 Una viga que tiene una sección transversal en forma de Z, indicada en la Fig. 11.6, está sujeta a un par flexionante de 2,400 N · m que actúa en el plano vertical. Determinar el esfuerzo en el punto a.

SOLUCION Por inspección se encuentra que el centroide de la sección transversal está en el punto O. El procedimiento para calcular los esfuerzos en a requiere los datos siguientes:

a) El cálculo de I_X, I_Y, y P_{XY} con respecto al centroide.
b) La determinación de los ejes principales y de los correspondientes momentos de inercia principales.
c) La determinación de las distancias coordenadas u y v, del punto a, medida a partir de los ejes principales.
d) La descomposición del momento aplicado en componentes paralelas a los ejes principales.
e) El cálculo del esfuerzo en el lugar deseado, aplicando la ecuación (11.5).

Nótese que este problema es idéntico, en cuanto al concepto y al proceso se refiere, al del ejemplo 11.1.

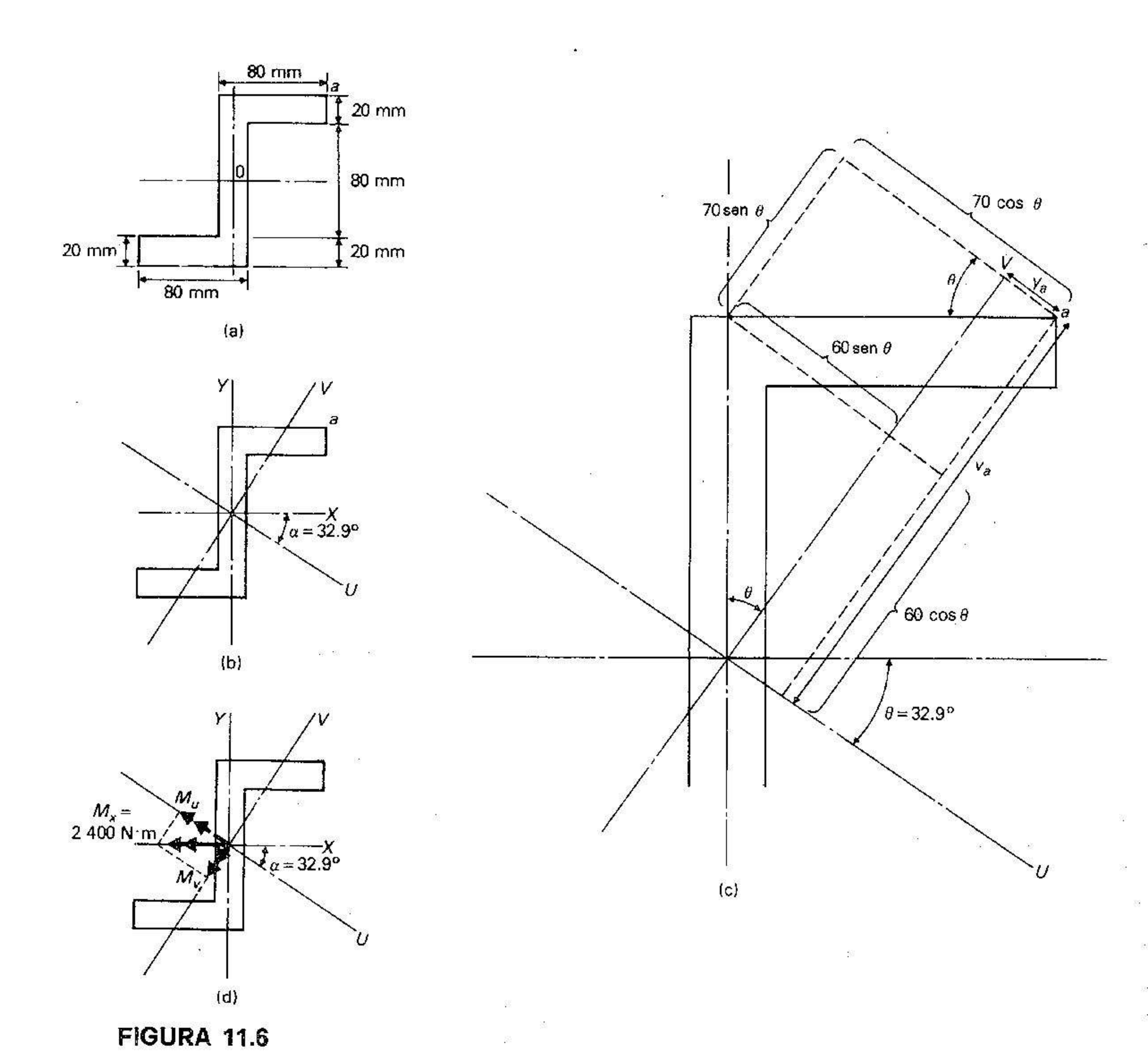


FIGURA 11.6

a) Cálculo de I_X, I_Y, y P_{XY}. Estos valores se calcularon en el Ejemplo A.32 del Apéndice. Los resultados son

$$I_X = 8.96 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_Y = 4.64 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$P_{XY} = +4.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

b) Los ejes principales y los momentos de inercia principales correspondientes pueden determinarse a partir de un análisis con el Círculo de Mohr.

Los resultados, según el Ejemplo A.32 del Apéndice son

$$I_{máx} = 12.06 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4,$$
$$I_{mín} = 1.54 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4,$$
$$\alpha = 32.9°.$$

c) Las coordenadas para el punto a se obtienen a partir de la Fig. 11.6 (b), como sigue:

$$u_a = 60 \cos\theta + 70 \operatorname{sen}\theta,$$
$$u_a = 50.38 + 38.02,$$
$$u_a = 88.40\ \mathrm{mm};$$

$$v_a = 70 \cos\theta - 60 \operatorname{sen}\theta,$$
$$v_a = 58.77 - 32.59,$$
$$v_a = 26.18\ \mathrm{mm}.$$

d) El par aplicado debe descomponerse en componentes respecto a los ejes U y V. Esto se hace en la forma más conveniente describiendo el par mediante la regla vectorial de la mano derecha. Es decir, el pulgar apunta en la dirección del vector, y los dedos se doblan en la dirección del par. Así, en la Fig. 11.6 (d), el par original, $M_X = 2\,400$ N · m se indica a lo largo del eje X. Sus componentes son

$$M_U = M_X \cos 32.9° = 2\,015\ \mathrm{N \cdot m},$$
$$M_V = M_X \operatorname{sen} 32.9° = 1\,303\ \mathrm{N \cdot m}.$$

e) Aplicando al punto a la ecuación (11.5), obtenemos

$$\sigma_a = \pm\frac{M_U v}{I_U} \pm \frac{M_V u}{I_V}$$
$$\sigma_a = -\frac{(2\,015)(88.40 \times 10^{-3})}{12.06 \times 10^{-6}} + \frac{(1\,303)(26.18 \times 10^{-3})}{1.54 \times 10^{-6}}$$
$$\sigma_a = -14.77\ \mathrm{MPa} + 22.15\ \mathrm{MPa},$$
$$\sigma_a = +7.38\ \mathrm{MPa}. \quad ■$$

Problemas

Nota: En la sección 11.6 pueden encontrarse problemas adicionales que involucran flexión asimétrica.

11.9 La sección Z indica en la Fig. P11.9 cómo se usa una viga en voladizo. Determinar el esfuerzo máximo en la viga debido a una carga vertical P = 4 klb.

11.10 Determinar la carga admisible, P, para la viga del problema 11.9, suponiendo un esfuerzo admisible de 22 klb/plg^2.

11.11 Una viga simplemente apoyada soporta una carga uniformemente distribuida w = 2 kN/m, como se indica en la Fig. P11.11. Determinar el esfuerzo máximo en la viga.

11.12 Determinar el valor admisible de w para la viga del problema 11.11. suponiendo que el esfuerzo admisible es de 150 MPa.

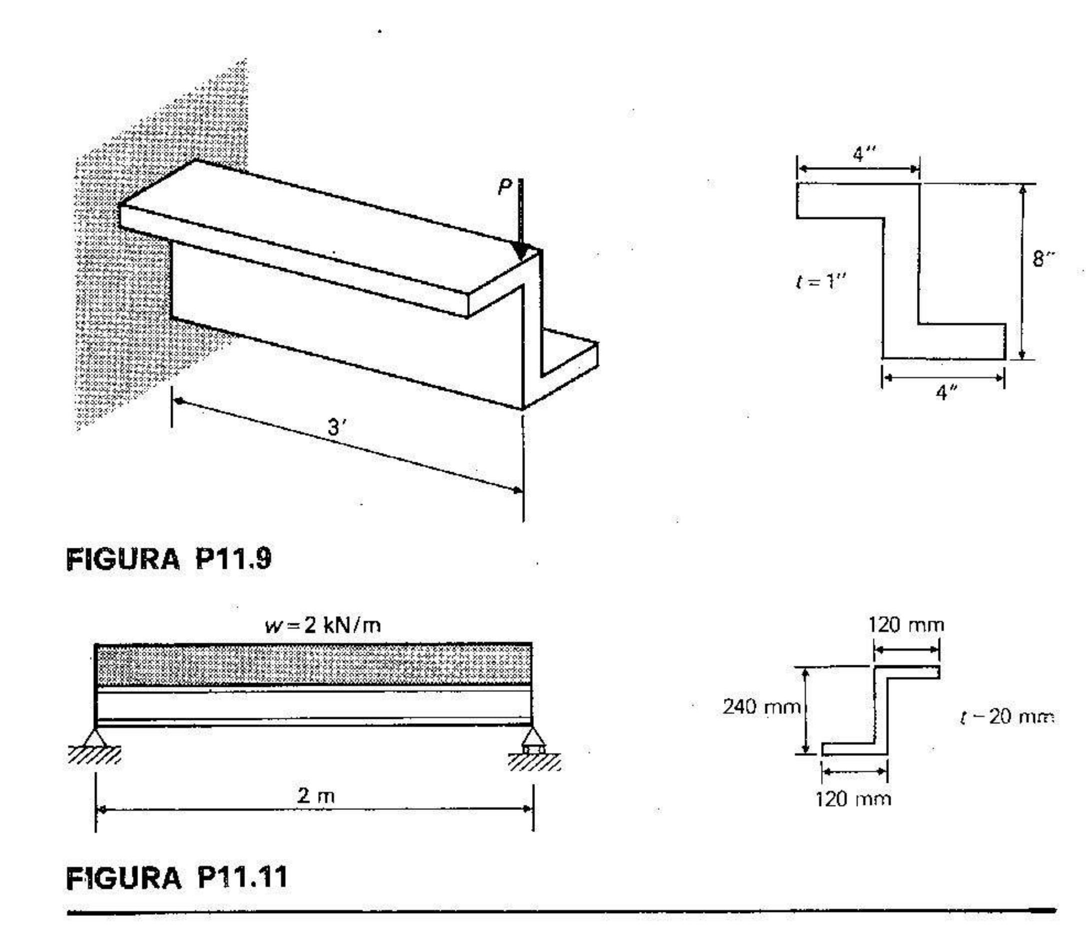


FIGURA P11.9

FIGURA P11.11

11.4 Centro de cortante

Generalmente las vigas se diseñan buscando economía del material. Consecuentemente, las secciones transversales de una viga se componen frecuentemente de placas delgadas dispuestas de tal forma que sean muy resistentes a la flexión. Por ejemplo, los perfiles de patín ancho y las secciones canal, se diseñan con la mayor parte del material en los patines, a la mayor distancia del eje neutro. Esto es eficiente debido a que se utiliza más material en los lugares donde el esfuerzo es grande, y menos material en los lugares donde el esfuerzo de flexión es bajo, que son los más cercanos al eje neutro. El alma soporta el cortante y mantiene los patines en posición.

La sección transversal de una viga compuesta de partes hechas de placas delgadas que tiene una forma abierta es muy resistente a la flexión, pero extremadamente débil a la torsión. Un perfil abierto es una sección transversal que no tiene celdas cerradas. La Fig. 11.7 (a), (b) y (c) ilustra perfiles abiertos, mientras que la Fig. 11.7 (d) y (e) ilustra perfiles cerrados.

Si una viga no se tuerce al flexionarse, es válida la ecuación $\sigma = Mc/I$. Sin embargo, cuando ocurren cargas de torsión, se desarrollan esfuerzos

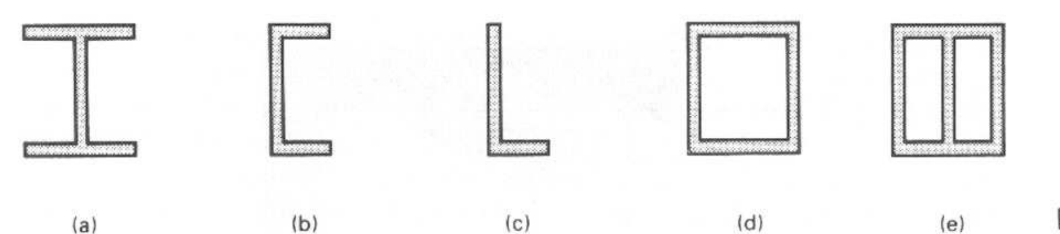


FIGURA 11.7

de torsión extraordinariamente altos. Para tener flexión sin torsión, la línea de acción de las cargas de flexión deben intersectar un eje longitudinal llamado el eje de flexión de la viga. El centro de cortante define este eje de flexión.

El centro de cortante para la sección transversal de una viga que tiene dos ejes de simetría coincide con el centroide de la sección. El centro de cortante para secciones transversales que son asimétricas con respecto a uno o ambos ejes debe determinarse por medio de cálculo, u observación.

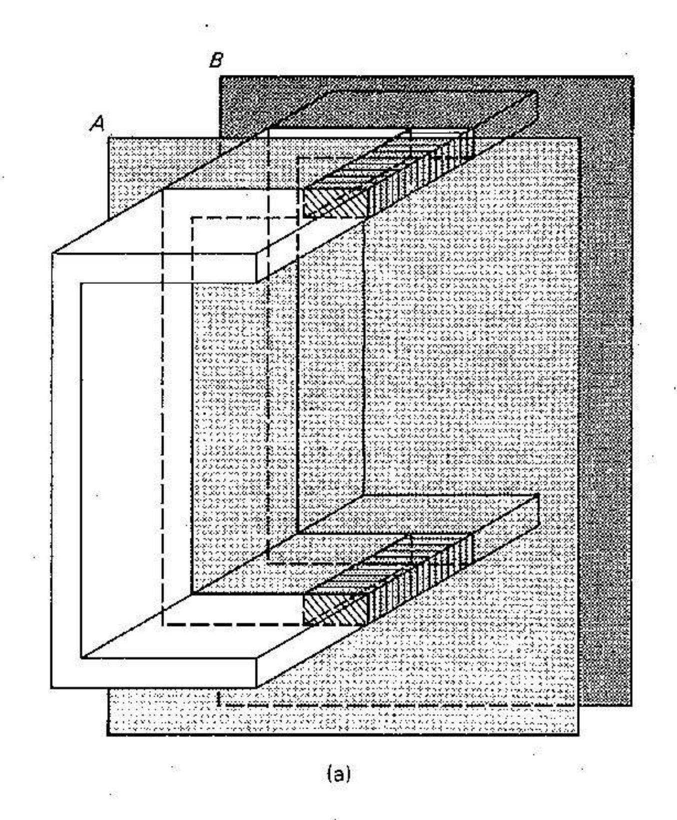
En la sección 5.6 se dedujo la ecuación $\tau = VQ/Ib$ para el esfuerzo cortante en una viga. En la deducción se aisló una porción de la viga y se determinó que la fuerza cortante está dada por la diferencia entre las fuerzas debidas a los esfuerzos de flexión sobre planos que están separados una distancia dx. Queremos extender el examen de los esfuerzos cortantes para la sección transversal de una viga que está compuesta de placas delgadas.

Consideremos la sección canal de la viga indicada en la Fig. 11.8 (a). Supongamos que las cargas flexionantes se aplican a través del centro de cortante y, por consiguiente, que es válida la ecuación $\sigma = Mc/I$. Adicionalmente supongamos que el momento sobre el plano B es mayor que el momento sobre el plano A. Bajo estas condiciones, veamos las direcciones según las cuales actúan los esfuerzos cortantes.

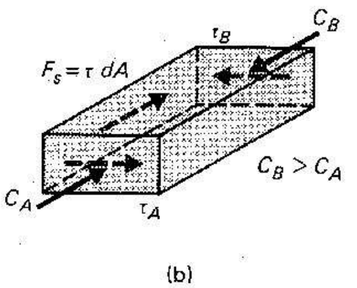
Se aisla un pequeño segmento del patín superior y su diagrama de cuerpo libre se indica en la Fig. 11.8(b). Cuando $C_B > C_A$ la fuerza cortante F_s sobre la cara posterior (sombreada) debe estar en la dirección indicada para mantener el cuerpo en equilibrio. Consecuentemente, los esfuerzos cortantes sobre las caras A y B deben estar en la dirección indicada en la Fig. 11.8 (b) para mantener el equilibrio rotacional con respecto a un eje vertical.

En la Fig. 11.8 (c) se indica un diagrama de cuerpo libre para un segmento del patín inferior. Cuando $T_B > T_A$, la fuerza cortante sobre la cara posterior (sombreada) debe estar en la dirección indicada para mantener el equilibrio. Por consiguiénte, los esfuezos cortantes τ_A y τ_B se indican en sus direcciones correctas. De manera semejante puede establecerse la dirección del esfuerzo cortante en el alma.

La Fig. 11.9 (a) indica los esfuerzos cortantes descritos anteriormente para el plano que coincide con la cara A. Nótese que el flujo de cortante tiene la dirección cabeza-cola. Un análisis semejante de otras formas, tales como las de la Fig. 11.9 (b) y (c), establecerían la dirección del flujo de cortante en un patrón semejante de tipo cabeza-cola.



(a)

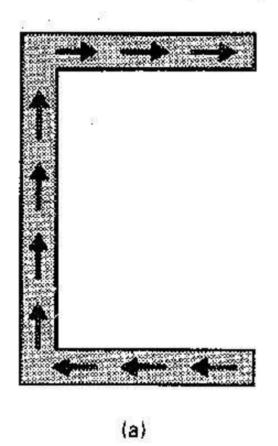


(b)

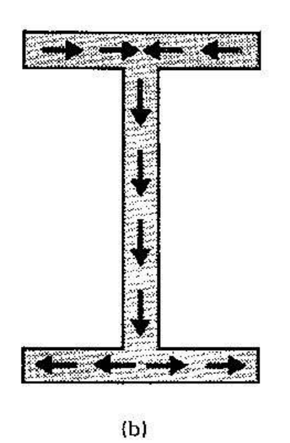
$F_s = \tau\, dA$
T_B
τ_B
τ_A
$T_B > T_A$
T_A

(c)

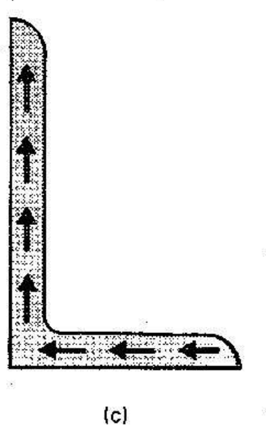
FIGURA 11.8



(a)



(b)



(c)

FIGURA 11.9

Una fuerza cortante en cualquier segmento de una sección transversal puede determinarse a partir de $F = \tau\, dA$. En la Fig. 11.10 se indican las fuerzas cortantes en los patines de la sección canal de la Fig. 11.8. Estas fuerzas internas tienden a hacer que la sección se tuerza en el sentido del giro de las manecillas del reloj. Para mantener el equilibrio, la carga exterior V debe aplicarse a través de un punto situado a una distancia e del alma de la sección canal. El punto a través del cual debe pasar la carga exterior V para impedir que la viga se tuerza se define como el centro de cortante. El eje longitudinal que pasa por el centro de cortante es el eje de flexión de la viga.

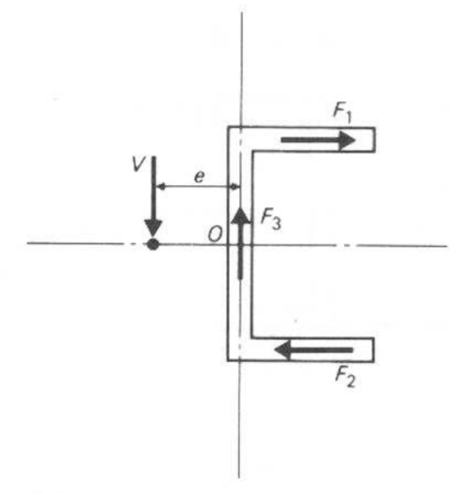


FIGURA 11.10

11.5 Determinación del centro de cortante

La determinación del centro de cortante para una sección asimétrica puede calcularse por medio de la estática. El procedimiento es como sigue:

a) Se determina el esfuerzo cortante para cada segmento de la sección transversal a partir de $\tau = VQ/Ib$.
b) Se convierten los esfuerzos del inciso (a) en fuerzas cortantes, mediante $F = \int \tau\, dA$.
c) Se indican las fuerzas cortantes en la sección según el patrón cabeza-cola.
d) Se observa la dirección de la rotación de las fuerzas cortantes y se coloca una fuerza cortante exterior V con una excentricidad e medida a partir de algún lugar conveniente, de modo que la dirección de la rotación del momento V_e sea opuesta a la de las fuerzas cortantes internas.
e) Se suman momentos con respecto al lugar a partir del cual se midió la excentricidad e. El momento obtenido al multiplicar la carga externa V por la excentricidad e debe ser igual al momento producido por las fuerzas de corte internas.
f) Partiendo de la condición anterior se despeja la excentricidad e.

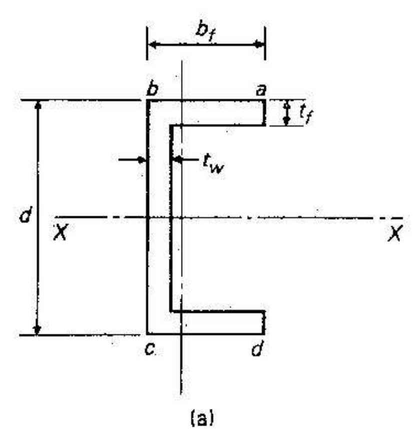
EJEMPLO 11.3 Localizar el centro de cortante para la sección canal indicada en la Fig. 11.11.

SOLUCION El esfuerzo cortante en el patín ab puede calcularse a partir de $\tau = VQ/Ib$. El momento estático Q se determina para un segmento cualquiera del patín (véase la Fig. 11.11b) como $Q = Ay = (t_f x)y_f$. El esfuerzo cortante en ab es,

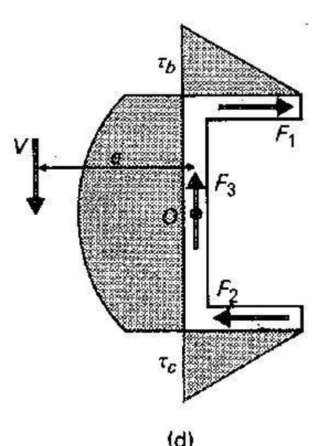
$$\tau_{ab} = \frac{VQ}{It} = \frac{V[(t_f x)y_f]}{It_f} = \frac{Vy_f}{I}x. \qquad \text{(a)}$$

La variable x de la ecuación (a) está elevada a la primera potencia. Por consiguiente, la ecuación (a) es la ecuación de una línea recta.

El esfuerzo cortante en el alma puede determinarse de manera semejante.

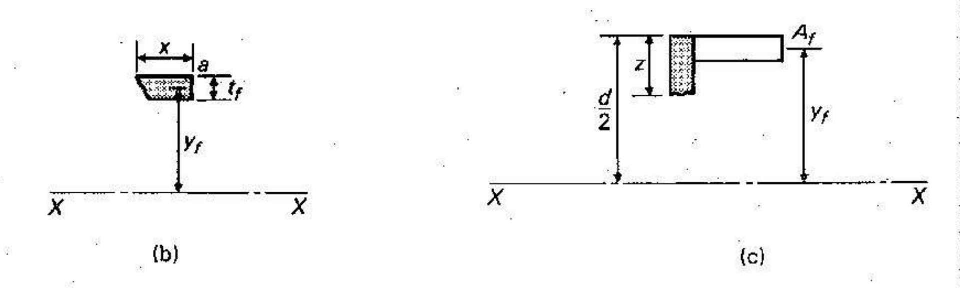


(a)



(d)

FIGURA 11.11



(b) (c)

La Fig. 11.11 (c) indica el segmento a partir del cual se determina el momento estático. El esfuerzo cortante en el alma bc es,

$$\tau_{bc} = \frac{VQ}{It_w} = \frac{V}{It_w}\left[A_f y_f + (t_w z)\left(\frac{d}{2} - \frac{z}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{V}{It_w}\left[A_f y_f + \frac{t_w\,dz}{2} - \frac{t_w z^2}{4}\right] \tag{b}$$

La ecuación (b) indica que la distribución del esfuerzo cortante en el alma es parabólica, ya que la variable z está al cuadrado.

Los esfuerzos cortantes en el patín cd son semejantes a los del patín ab debido a la simetría.

La Fig. 11.11 (d) indica la distribución de los esfuerzos cortantes obtenida a partir de las ecuaciones (a) y (b). Las fuerzas cortantes F_1, F_2 y F_3 pueden calcularse a partir de $F = \tau_{\text{med.}} A$.

Escogemos como centro de momentos el punto O, de modo que el brazo de palanca de F_3 sea cero. Por consiguiente, no necesitamos calcular la fuerza F_3. La fuerza F_1 es

$$F_1 = \tau_{\text{med.}} A_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{V(d/2)b}{I}\right)(bt_f)$$

$$F_1 = \frac{Vb^2\,dt_f}{4I}.$$

Según la Fig. 11.11 (d),

$$\sum F_X = 0: \qquad F_1 = F_2.$$

La fuerza exterior V debe aplicarse a una distancia e medida desde O, de modo que $\Sigma M_O = 0$. Esto nos da

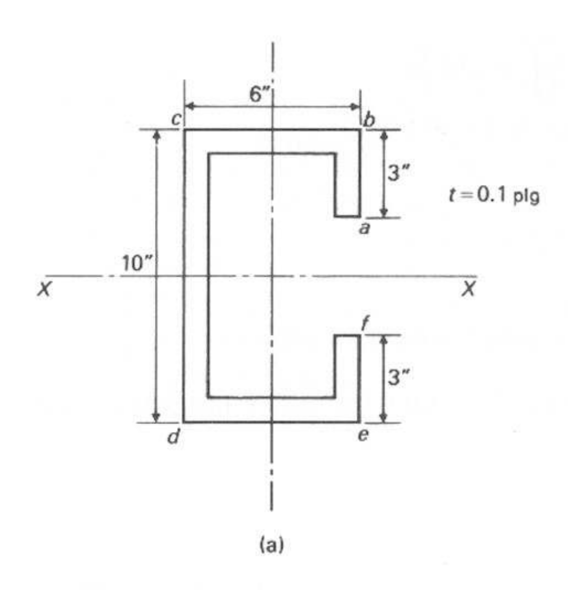
$$\sum M_O = 0: \qquad Ve = F_1\left(\frac{d}{2}\right) + F_2\left(\frac{d}{2}\right),$$

$$Ve = \frac{Vb^2\,dt_f}{4I}\frac{d}{2} \times 2,$$

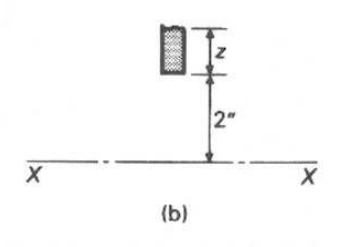
$$e = \frac{b^2 d^2 t_f}{4I}. \quad ■$$

EJEMPLO 11.4 Determinar el centro de cortante para la sección transversal de la viga indicada en la Fig. 11.12.

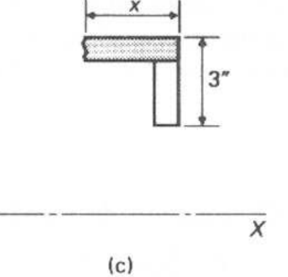
SOLUCION El esfuerzo cortante para los segmentos resulta como sigue:



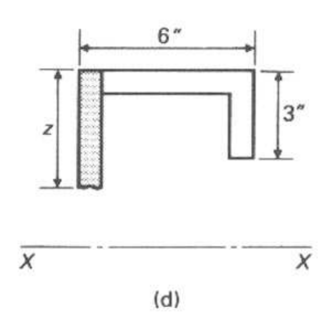
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 11.12

Segmento ab (Según la Fig. 11.12 b)

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{It}\left[(tz)\left(2 + \frac{z}{2}\right)\right],$$

$$\tau = \frac{V}{I}\left(2z + \frac{z^2}{2}\right), \qquad \text{(a)}$$

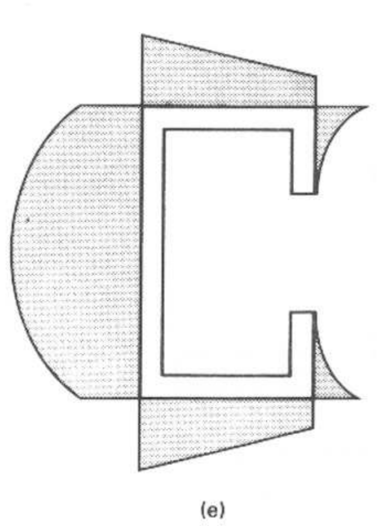
$$\tau_b = \frac{V}{I}\left[2(3) + \frac{3^2}{2}\right] = \frac{10.5\,V}{I}. \qquad \text{(b)}$$

Segmento bc (Según la Fig. 11.12 c)

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{It}[(3)(t)(3.5) + (xt)(5)],$$

$$\tau = \frac{V}{I}[10.5 + 5x] \qquad \text{(c)}$$

$$\tau_c = \frac{V}{I}[10.5 + 5(6)] = \frac{40.5\,V}{I} \qquad \text{(d)}$$


(e)

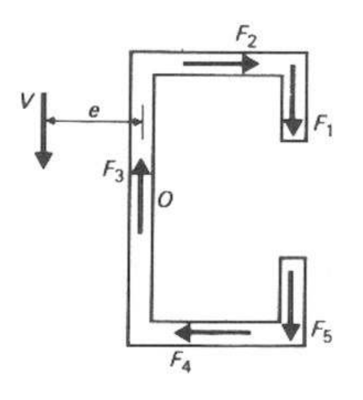
Segmento cd:

A partir de la Fig. 11.12 (d) podemos determinar que la ecuación para el esfuerzo cortante en el alma *cd* es parabólica. Sin embargo, si elegimos el punto O (véase la Fig. 11.12 f) como centro de momentos, no necesitamos calcular la fuerza F_3. Si eligieramos algún otro punto como centro de momentos (por ejemplo, el centroide), tendríamos que calcular la fuerza F_3.

A partir de la simetría, $F_1 = F_5$, y $F_2 = F_4$,

$$F_1 = \int_a^b \tau\, dA = \int_a^b \tau t\, dz,$$

$$F_1 = \int_2^5 \frac{V}{I}\left(2z + \frac{z^2}{2}\right) t\, dz = \frac{Vt}{I}\int_2^5 \left(2z + \frac{z^2}{2}\right) dz$$



(f)

$$= \frac{V(0.1)}{I}\left[z^2 + \frac{z^3}{6}\right]_2^5 = 4.05\frac{V}{I}$$

$$F_2 = \tau_{med} A_{bc} = \left[\frac{10.5\,V/I + 40.5\,V/I}{2}\right](6)(0.1)$$

$$= 15.3\frac{V}{I}.$$

A partir de la Fig. 11.12 (f),

$$\sum M_O = 0: \qquad Ve = F_1(6) + F_2(5) + F_3(0) + F_4(5) + F_5(6),$$

$$Ve = 4.05\frac{V}{I}(6) + 15.3\frac{V}{I}(5) + 0 + 15.3\frac{V}{I}(5) + 4.05\frac{V}{I}(6),$$

$$e = \frac{201.6}{I}.$$

El momento de inercia es

$$I = \sum(\bar{I} + Ad^2) = [\tfrac{1}{12}(0.1)(3)^3 + (0.1)(3)(4.5)^2]2 + [(6)(0.1)(5)^2]2 + \tfrac{1}{12}(0.1)(10)^3,$$

$$= 50.9 \text{ plg}^4.$$

Por consiguiente,

$$e = \frac{201.6}{50.9}$$

$$= 3.96 \text{ plg}.$$

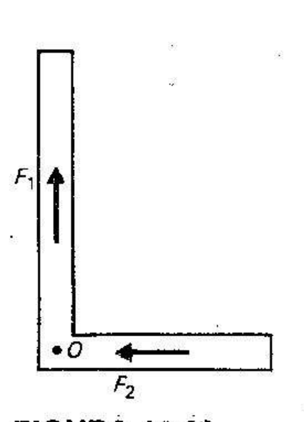


FIGURA 11.13

EJEMPLO 11.5 Determinar el centro de cortante para un ángulo de 6 plg × 4 plg × 1 plg.

SOLUCION La Fig. 11.13 indica el ángulo y sus fuerzas cortantes internas F_1 y F_2. Si elegimos la unión de los patines como centro de momentos, los brazos de palanca de F_1 y de F_2 son cero. La carga exterior debe intersecar el punto O. Por consiguiente, el punto O es el centro de cortante. ■

11.6 Centro de cortante y flexión asimétrica en el diseño

El diseño de vigas requiere que la línea de acción de todas las cargas interseque el centro de cortante y sea paralela a un eje principal. Si la carga no pasa por el centro de cortante, ocurre una torsión de las secciones transversales no circulares. El análisis de tales situaciones es muy complejo y queda fuera del alcance de este libro. Sin embargo, anotamos que si ocurre torsión, las secciones abiertas son considerablemente más vulnerables al efecto de la torsión que las secciones cerradas.

Cuando la carga no se aplica paralelamente a un eje principal, ocurre la flexión asimétrica. El esfuerzo en cualquier lugar puede determinarse a partir de la ecuación (11.5), después de que se han descompuesto las cargas en componentes paralelas a los ejes principales.

La Fig. 11.14 ilustra una aplicación de los conceptos descritos anteriormente. Se aplica una carga P a través del centro de cortante de la sección ángulo de la Fig. 11.4 (a). Por consiguiente, no se presentará torsión. Sin embargo, se presenta flexión asimétrica debido a que la fuerza P no es paralela a alguno de los ejes principales. Consecuentemente, la fuerza debe descomponerse en componentes paralelas a los ejes principales, como se indica en la Fig. 11.14 (b). Se usa la ecuación (11.5) para calcular el esfuerzo en los lugares deseados.

Cuando se aplica una carga paralelamente a un eje centroidal, como en la Fig. 11.14 (c), el problema se complica. No solamente se presenta torsión debido a que la fuerza no interseca el centro de cortante, sino

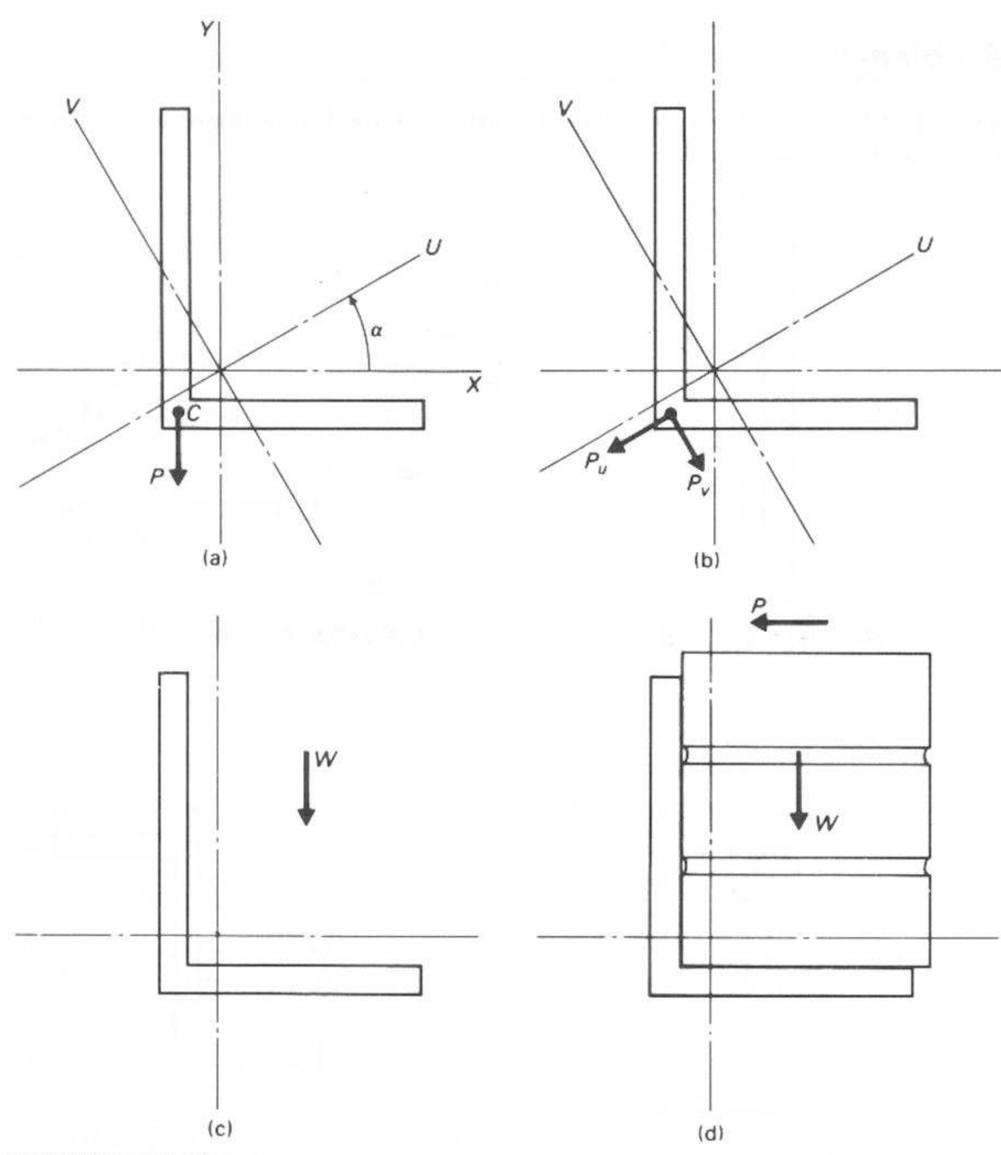


FIGURA 11.14

que también ocurre flexión asimétrica. La ecuación $\sigma = Mc/I$ no es válida.

Este tipo de situación ocurre en el diseño de dinteles. Un dintel es una pequeña viga que se usa para soportar el muro arriba de una abertura tal como una puerta o una ventana. A menudo se usan secciones ángulo para soportar el tabique arriba de una abertura, tal como la representada en la Fig. 11.14 (d). Se usa la ecuación $\sigma = Mc/I$ para diseñar el dintel. Esto es aceptable solamente debido a que los amarres usados en la construcción ejercen una fuerza horizontal que resiste la tendencia a rotar del ángulo. La naturaleza de la construcción obliga a que el dintel se mantenga en posición vertical. Si las restricciones constructivas no están presentes, no es válida la ecuación $\sigma = Mc/I$, y ocurrirá la falla bajo una carga de magnitud comparativamente baja.

Problemas

11.13-11.21 Determinar el centro de cortante para las secciones indicadas en las Figs. P11.13 a P11.21.

4"
8"
$t = 0.1$ plg

FIGURA P11.13

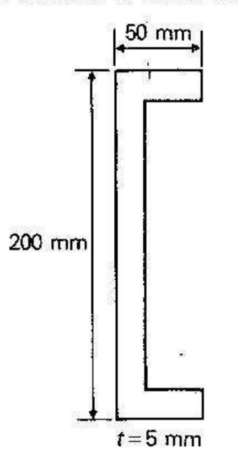


FIGURA P11.14

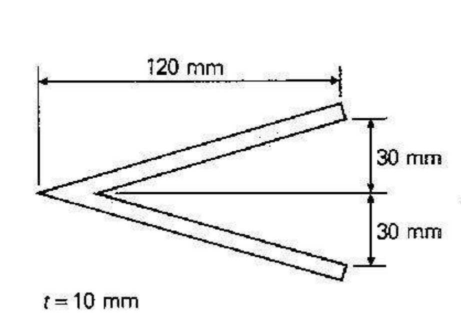


FIGURA P11.15

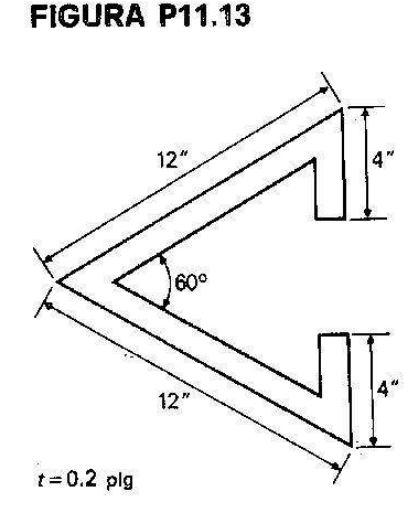


FIGURA P11.16

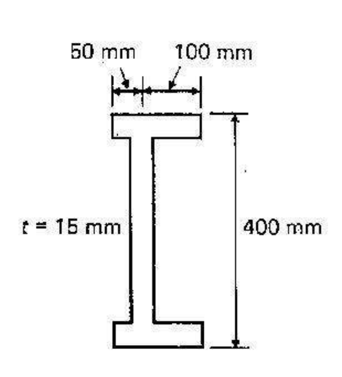


FIGURA P11.17

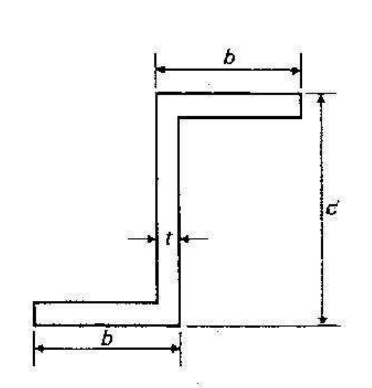


FIGURA P11.18

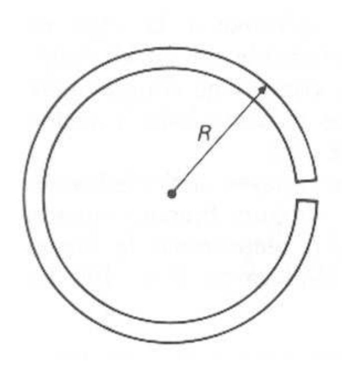


FIGURA P11.19

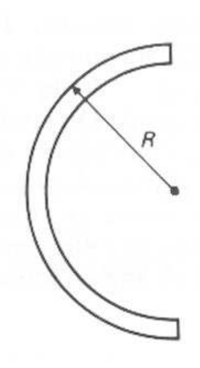


FIGURA P11.20

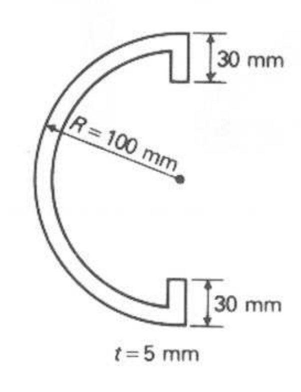


FIGURA P11.21

11.22-11.23 Determinar los esfuerzos máximos para las vigas en voladizo indicadas en las Figs. P11.22 y P11.23.

11.24 Determinar la carga máxima P que puede aplicarse a la viga en voladizo de la Fig. P11.22 suponiendo un esfuerzo admisible de 18 klb/plg².

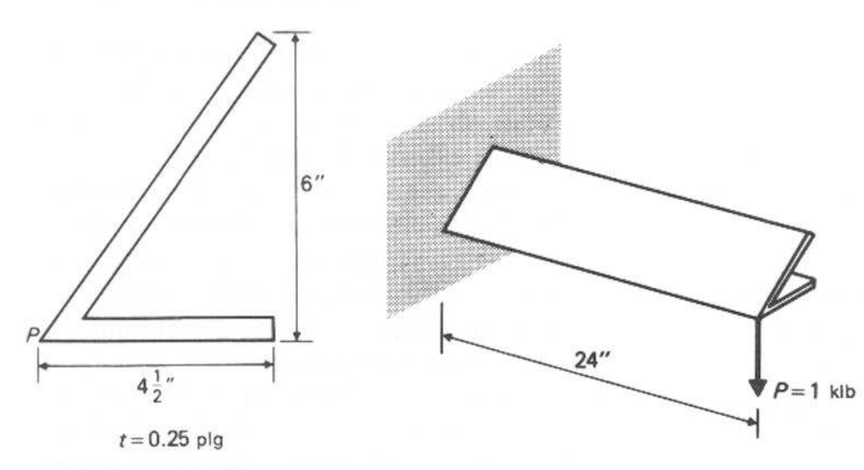


FIGURA P11.22

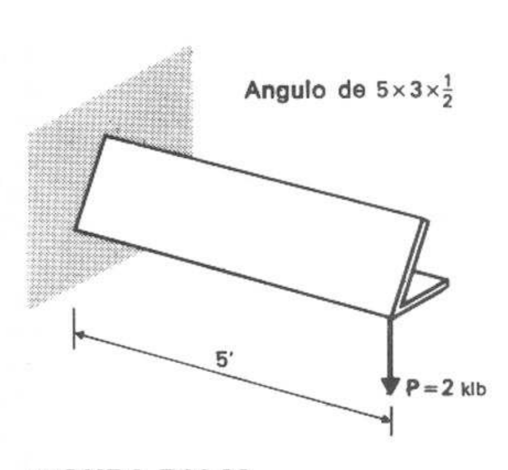
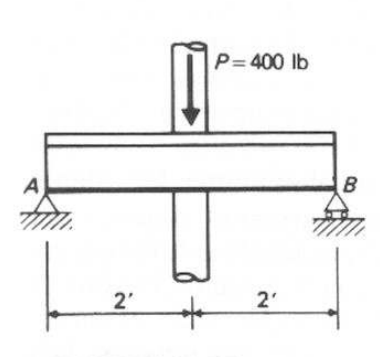


FIGURA P11:23



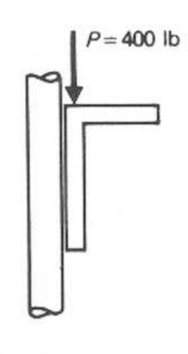


FIGURA P11.27

11.25 Determinar la carga máxima P que puede aplicarse a la viga en voladizo de la Fig. P11.23, suponiendo un esfuerzo admisible de 22 klb/plg^2.

11.26 Un ángulo de 6 plg $\times$ 4 plg $\times$ ½ plg se usa como viga simplemente apoyada, de 8 pies de longitud. Determinar el esfuerzo máximo bajo la acción de una fuerza $P = 2$ klb, colocada en el centro de la viga.

11.27 Un ángulo de 6 plg $\times$ 4 plg $\times$ ½ plg tiene apoyos articulados en A y B. Sobre el ángulo se apoya un tubo (sin ejercer ninguna fuerza) cuando la viga está sin carga, como se indica en la Fig. P11.27. Determinar la fuerza que ejerce el tubo sobre el ángulo cuando se aplica una carga $P = 400$ lb, en el centro.

12

Comportamiento inelástico

12.1 Introducción

El principal objetivo de este libro es proporcionar información que ayudará al estudiante a comprender la teoría y el comportamiento de los materiales bajo la influencia de una amplia variedad de situaciones de carga. Hasta ahora, el estudio se ha basado en la teoría elástica. En la cobertura de estas situaciones, las fibras interiores de cualquier miembro cargado cumplieron con una relación lineal entre esfuerzo y deformación, y se aplicó la ley de Hooke.

Ahora surgen las preguntas: ¿cómo predecimos el comportamiento de los materiales que no exhiben un segmento de recta bien definido como diagrama esfuerzo-deformación? ¿cómo predecimos el comportamiento de materiales que quedan sujetos a esfuerzos en el rango inelástico? Este capítulo introduce la teoría del comportamiento inelástico en los materiales. El estudio cubre los tres tipos principales de carga. La sección A describe la acción inelástica en miembros cargados axialmente. La sección B discute la acción inelástica bajo cargas de torsión, y la sección C describe el comportamiento inelástico de miembros a flexión. Se describen situaciones tanto estáticamente determinadas como indeterminadas.

El intento de esta cobertura es ampliar la comprensión del lector sobre la teoría elástica descrita anteriormente. Cuando analizamos materiales que están esforzados a niveles mayores que los del límite de proporcionalidad, obtenemos una mejor visión de su comportamiento en todos los rangos de esfuerzo. Cada proyectista depende consciente o inconscientemente del entendimiento de la teoría inelástica, en su propio trabajo. Por ejemplo, la teoría elástica no ofrece ninguna explicación sobre por qué un material perfectamente elástico —es decir, uno que es elástico a través de todo el intervalo de carga— sería generalmente inaceptable para usarlo, como material estructural. El comportamiento inelástico de un material, aunque sus esfuerzos se calculen en el intervalo elástico, tiene una gran influencia en las decisiones de diseño.

12.2 Comportamiento de los materiales

Las secciones 2.7 y 2.8 describieron el desarrollo y construcción de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria. Vimos que cada material tiene un diagrama esfuerzo-deformación unitaria único. Si las propiedades de cada material pueden observarse a partir de todo su intervalo de comportamiento, el proyectista puede comprender más claramente la firmeza y las limitaciones de las predicciones de la teoría elástica.

El acero es uno de nuestros materiales de diseño más comunes. Estableceremos una base para entender el comportamiento inelástico del acero, y posteriormente usaremos esta base para considerar otros materiales.

El acero, en cuanto al esfuerzo-deformación unitaria se refiere, se comporta de tal manera que permite describirlo como un material ideal para diseño. Es fuerte y rígido (tiene un módulo de elasticidad alto) y se comporta linealmente en cuanto a la relación esfuerzo-deformación unitaria hasta un límite de proporcionalidad alto. A esfuerzos mayores que el límite de proporcionalidad, el acero estructural exhibe un amplio rango de ductilidad antes de fracturarse. Esta ductilidad es importante en el diseño elástico porque permite usar hipótesis con respecto a la distribución de esfuerzos que conducen a predicciones confiables del comportamiento bajo carga.

La Fig. 12.1 (a) indica un diagrama típico esfuerzo-deformación unitaria para acero estructural. El valor usual para el esfuerzo a la fluencia es $\sigma_y = 36$ klb/plg², y la deformación unitaria correspondiente es, aproximadamente, $\epsilon_y = 0.0012$. El módulo de elasticidad en el rango elástico es $E = 30\,000$ klb/plg², mientras que el módulo de elasticidad cuando empieza el endurecimiento por deformación es, aproximadamente, $E_{ED} = 0.7 \times 10^3$ klb/plg². La deformación unitaria cuando empieza el endurecimiento por deformación es, aproximadamente, $\epsilon_{ED} = 0.015$.

La deformación unitaria al inicio del endurecimiento por deformación es, aproximadamente, quince veces la deformación unitaria a la fluencia. Esta deformación extremadamente grande al presentarse el endurecimiento por deformación, y una deformación unitaria significativamente mayor a la fractura obliga a establecer límites, desde el punto de vista práctico, para el uso del acero a esfuerzos mayores que el límite de fluencia. Un miembro se deformará tan considerablemente antes de alcanzar su esfuerzo último que, para fines prácticos, se consideraría que ha fallado a esfuerzos menores. Consecuentemente, el diagrama esfuerzo-deformación unitaria se idealiza como formado por las dos regiones indicadas en la fig. 12.1 (b). Un material que exhibe este tipo de diagrama σ—ϵ se denomina *elastoplástico*. El rango elástico existe hasta el esfuerzo de fluencia. Después de esto, suponemos que el material se comporta de una manera completamente plástica. Es decir, la conservación de una carga constante producirá una deformación ilimitada hasta el punto de fractura. El esfuerzo en el punto de fluencia es, para fines prácticos, el valor límite del esfuerzo.

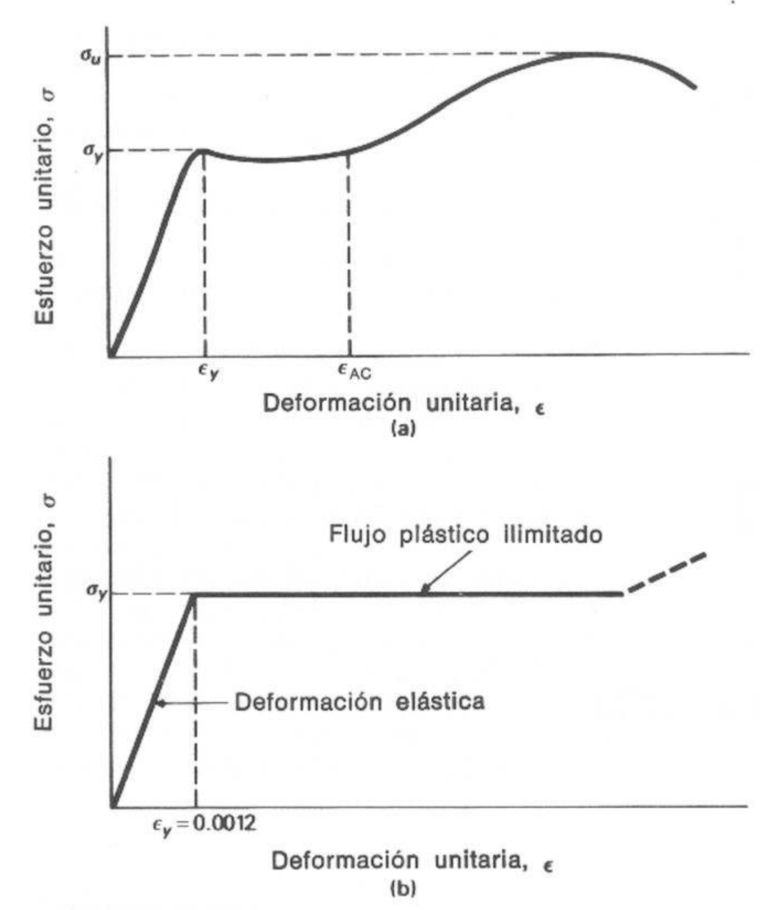


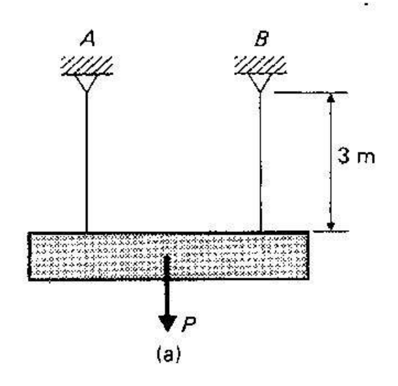
FIGURA 12.1

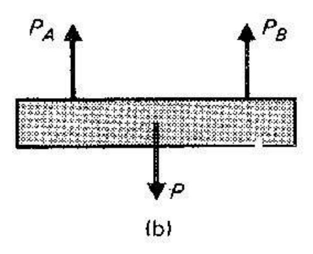
Cargas axiales SECCION A

12.3 Miembros estáticamente determinados

Una estructura estáticamente determinada, cargada axialmente, se deformará elásticamente hasta que los esfuerzos en alguna parte alcanzan el límite de fluencia. Las cargas adicionales producirán después grandes deflexiones (que se suponen sin límite), dando por resultado la falla de la estructura.

EJEMPLO 12.1 Una barra rígida horizontal está soportada por dos alambres de acero, cada uno de los cuales tiene un área de 1.6×10^{-4} m^2, como se indica en la Fig. 12.2 (a). Determinar la carga máxima P que puede aplicarse al centro de la barra, y la deflexión en el instante de la falla. Supóngase que el diagrama esfuerzo-deformación unitaria es la relación idealizada de tipo elastoplástico, que se muestra en la Fig. 12.1 (b), con $\sigma_y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Trazar un diagrama carga-deflexión (llamado $P-\Delta$) para esta estructura.





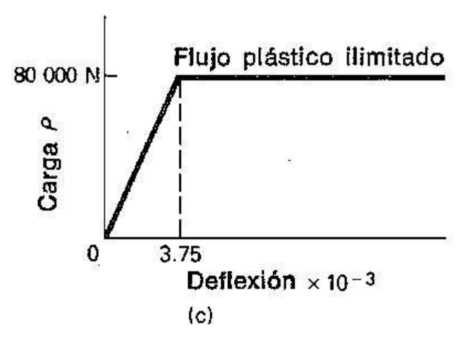


FIGURA 12.2

SOLUCION El análisis estático de las cargas simétricas de la Fig. 12.2 (b) indica que $P_A = P_B$. La carga P puede incrementarse hasta que la fuerza en cualquiera de los alambres llegue a ser

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad P_A = \sigma_y A = (250 \times 10^6)(1.6 \times 10^{-4}),$$

$$P_A = 40\,000 \text{ N}.$$

Según la Fig. 12.2 (b),

$$\sum F_y = 0; \qquad P = P_A + P_B + 40\,000 + 40\,000,$$

$$P = 80\,000 \text{ N}.$$

El alargamiento de cualquiera de los alambres cuando P llega a ser de 80,000 N se determina a partir de la ecuación (2.4), como

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \sigma \frac{L}{E} = (250 \times 10^6)\frac{(3)}{(200 \times 10^9)};$$

$$\delta = 3.75 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.75 \text{ mm}.$$

El diagrama elastoplástico $\sigma - \epsilon$ de la Fig. 12.1 (b) indica que cuando las cargas se incrementan más allá de $\sigma \simeq \sigma_y$, el alambre fluirá y ocurrirá una deflexión ilimitada. La Fig. 12.2 (c) indica el diagrama carga-deformación para la estructura de la Fig. 12.2 (a). ■

Problemas

Usese la relación idealizada elastoplástica $\sigma-\epsilon$ de la Fig. 12.1 (b) para todos los problemas, con $\sigma_y = 250$ MPa o 36 klb/plg², y $E = 200$ GPa, o 30 000 lb/plg².

12.1 La barra *BC* está firmemente unida a la barra *AB*, como se indica en la Fig. P12.1. El área de la sección transversal de *BC* es de 1.0 plg², mientras que la de *AB* es de 2.0 plg². Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse, y trazar los diagramas $P-\Delta$ para los puntos *B* y *C*.

12.2 Una barra rígida está soportada por una articulación en *A* y una barra de 16 mm de diámetro en *C*, como se indica en la Fig. P12.2. Calcular la fuerza máxima, *P*, que puede aplicarse en su punto medio *B*, y trazar un diagrama carga-deflexión (en *B*) para esta estructura.

12.3 Supóngase que la barra *BCD* de la Fig. P12.3 es rígida. Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse en *D*, y trazar curvas $P-\Delta$ para los puntos *C* y *D*. La sección transversal del miembro *AC* es de 1.5 plg².

12.4 Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse a los alambres de la Fig. P12.4. Trazar un diagrama de carga *P* contra la deflexión, en *C*. El diámetro de cada alambre es de 10 mm.

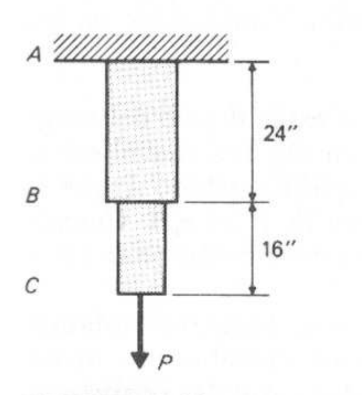


FIGURA P12.1

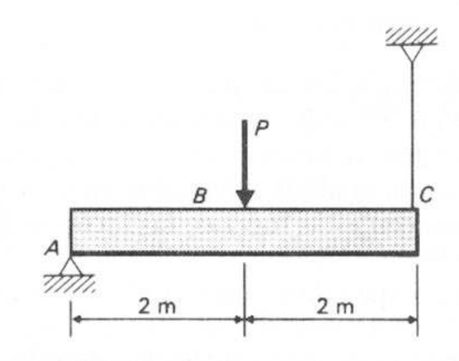


FIGURA P12.2

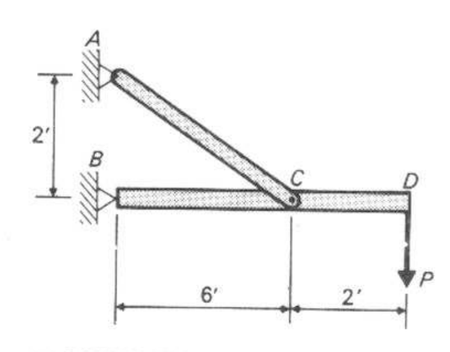


FIGURA P12.3

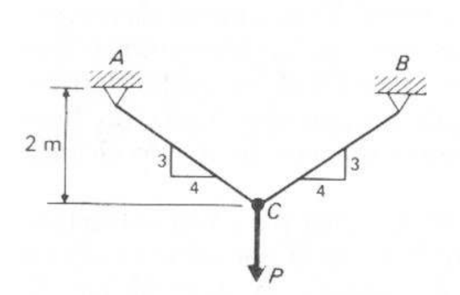


FIGURA P12.4

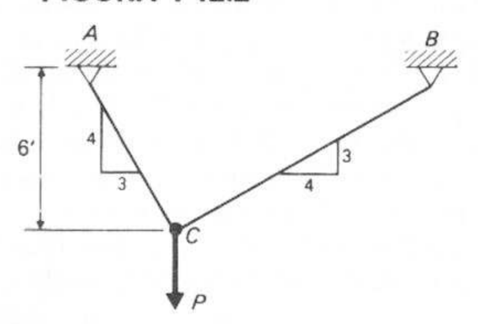


FIGURA P12.5

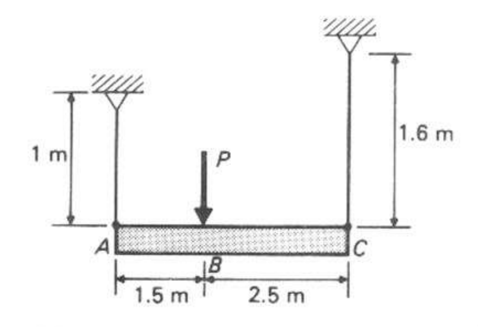


FIGURA P12.6

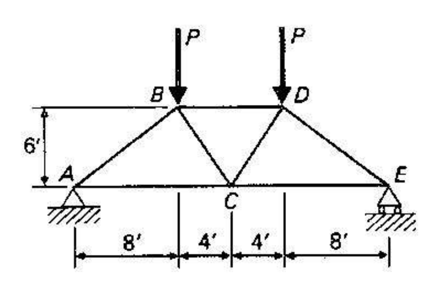


FIGURA P12.8

12.5 Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse al alambre de la Fig. P12.5. Trazar un diagrama de la carga *P* contra deflexión en *C*. El diámetro de cada alambre es de ½ plg.

12.6 Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse a la barra rígida de la Fig. P12.6. Trazar los diagramas $P - \Delta$ para los puntos *A*, *B* y *C*. El área de la sección transversal de cada alambre es de 3.0×10^{-4} m^2.

12.7 Resolver el problema 12.6 si el área de la sección transversal del alambre en *A* es de 6×10^{-4} m^2 y el área del alambre en *C* se conserva de 3.0×10^{-4} m^2.

12.8 Determinar la carga máxima, *P*, que puede aplicarse a la armadura de la Fig. P12.8. Supóngase que los miembros a compresión tienen suficiente área para impedir su falla. El área de la sección transversal de cada uno de los miembros a tensión es de 3.0 plg^2.

12.4 Miembros estáticamente indeterminados

En la sección 10.2 se discutió el análisis de miembros estáticamente indeterminados usando la teoría elástica. En esa sección, el procedimiento para resolver los problemas incluyó los pasos generales siguientes:

1. Se determinan las relaciones de equilibrio entre las fuerzas desconocidas aplicando ecuaciones estáticas de equilibrio.
2. Se determinan las ecuaciones de compatibilidad estableciendo las relaciones correspondientes a las características de la deformación.
3. Se resuelven simultáneamente las ecuaciones establecidas en los incisos 1 y 2.

Este procedimiento se usa cuando los esfuerzos están dentro del rango elástico. Cuando se reconoce que los esfuerzos en algunos miembros se extienden al rango inelástico, la solución se simplifica debido a que la fuerza en cualquier miembro tiene valor constante de $P = \sigma_y A$. Cuando se conocen estas fuerzas, las incógnitas restantes pueden determinarse por métodos estáticos.

La capacidad máxima de soportar carga de una estructura estáticamente determinada se alcanza cuando cualquier miembro de apoyo alcanza el intervalo inelástico de esfuerzos. Por otra parte, las estructuras estáticamente indeterminadas tienen capacidades adicionales de soportar carga después de que un sólo apoyo se plastifica. Conforme se incrementan las cargas, las deflexiones aumentan con una rapidez mayor que la que ocurre cuando todos los esfuerzos están en el intervalo elástico. Sin embargo, la deflexión de la estructura no prosigue hasta un flujo plástico irrestricto sino hasta que un suficiente número de apoyos alcanza el intervalo plástico de esfuerzos.

La Fig. 12.3 (a) indica una relación P—Δ típica para una estructura estáticamente determinada. Cuando ocurre la fluencia por primera vez en cualquier miembro de apoyo, la carga P_y es también, la carga última, P_u de la estructura.

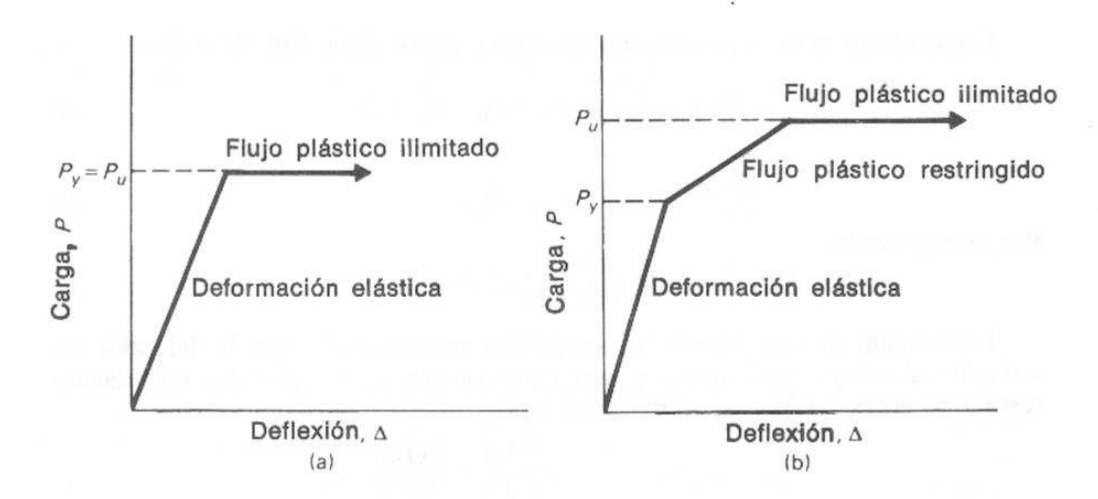


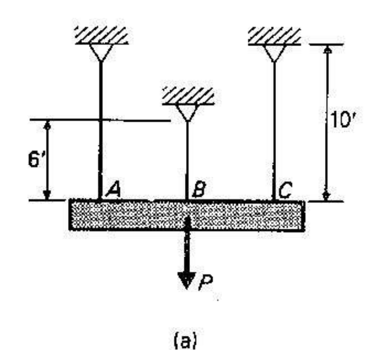
FIGURA 12.3 Relación típica P-Δ para a) una estructura estáticamente determinada y b) una estructura estáticamente indeterminada.

Por otra parte, la relación P—Δ para una estructura estáticamente indeterminada tiene una forma diferente, como se ve en la Fig. 12.3 (b). Cuando ocurre la fluencia por primera vez en cualquier miembro de apoyo, la capacidad de carga se designa por P_y. Puede aplicarse carga adicional antes de que se alcance la carga última P_u, y ocurran deformaciones irrestrictas. La región entre P_y y P_u se describe como de flujo plástico restringido. En esta región algunos de los miembros de apoyo están esforzados en la región plástica, pero todavía quedan suficientes apoyos comportándose elásticamente y, en consecuencia, la estructura puede soportar cargas adicionales.

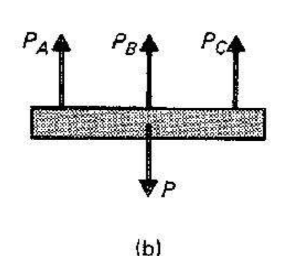
El concepto de movimiento restringido. donde una porción de la estructura es elástica y otra parte es inelástica, es importante para entender la influencia de la ductilidad en el diseño. El ejemplo 12.2 ilustra este concepto.

EJEMPLO 12.2 Una barra rígida está soportada por tres alambres, como se indica en la Fig. 12.4. Trazar una curva P—Δ para esta estructura. Determinar la carga y la deflexión que ocurre cuando aparece por primera vez la fluencia (P_y, Δ_y), y cuando se alcanza la carga última. El área de la sección transversal de cada alambre es de 1.0 plg². El diagrama esfuerzo-deformación unitaria es el diagrama elastoplástico idealizado de la Fig. 12.1 (b), con σ_y = 36 klb/plg² y E = 30 000 klb/plg².

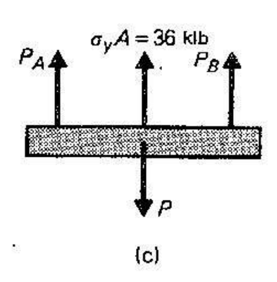
SOLUCION Cuando la carga aplicada P se incrementa constantemente desde cero, los tres alambres se esfuerzan dentro del intervalo elástico. Esto continúa hasta que el alambre sometido al mayor esfuerzo alcanza su punto de fluencia. El procedimiento descrito en la sección 10.2 se usa para encontrar el alambre que tiene el esfuerzo mayor.



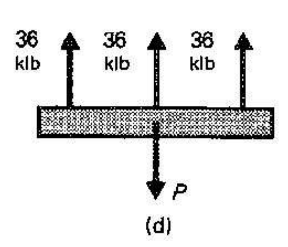
(a)



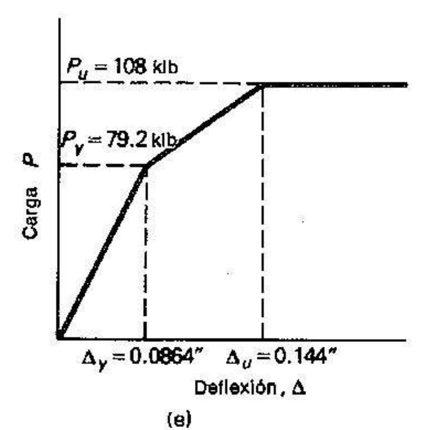
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURA 12.4

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen a partir de la Fig. 12.4 (b).

$$\sum F_y = 0: \qquad P_A + P_B + P_C = P; \tag{a}$$

$$\sum M_P = 0: \qquad P_A = P_C. \tag{b}$$

Por consiguiente,

$$2P_A + P_B = P. \tag{c}$$

La relación de compatibilidad se obtiene reconociendo que la deflexión de todos los alambres es la misma y, por consiguiente, $\delta_A = \delta_B = \delta_C$. La relación resultante entre las fuerzas se determina así:

$$\delta_A = \delta_B; \qquad \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{P_B L_B}{A_B E_B},$$

$$\frac{P_A(10 \times 12)}{(1)(30 \times 10^3)} = \frac{P_B(6 \times 12)}{(1)(30 \times 10^3)},$$

$$P_B = \frac{5}{3} P_A. \tag{d}$$

Resolviendo las ecuaciones (c) y (d), simultáneamente, da por resultado

$$P_A = \frac{3}{11} P;$$

$$P_B = \frac{5}{11} P.$$

El alambre B soporta una carga mayor que cualquiera de los alambres A o C. Por consiguiente, el alambre B alcanzará el esfuerzo de fluencia primero. En el momento de la fluencia

$$P_B = \sigma_y A = 36(1),$$
$$P_B = 36 \text{ klb}$$

Según la ecuación (d).

$$P_A = \tfrac{3}{5} P_B = 21.6 \text{ klb}.$$

Sustituyendo estos valores de P_A y P_b en la ecuación (c) nos da P_y:

$$P = 2P_A + P_B = 2(21.6) + 36;$$
$$P_y = 79.2 \text{ klb}.$$

La deflexión con esa carga es el alargamiento de cualquiera de los alambres:

$$\Delta_y = \delta_B = \frac{P_B L_B}{A_B E_B} = \frac{(36)(6 \times 12)}{(1)(30 \times 10^3)},$$
$$\Delta_y = 0.0864 \text{ plg}$$

Después de que el alambre B ha fluido aún soportará la carga constante $P_B = \sigma_y A = 36$ klb. Cuando la carga aplicada P se incrementa más allá de 79.2 klb, los alambres A y B soportarán las cargas crecientes hasta que alcanzan también sus límites de fluencia. En ese momento, $P_A = P_C = \sigma_y A = 36$ klb. La Fig. 12.4 (d) indica el diagrama de cuerpo libre en el momento en

que todos los alambres están esforzados a la fluencia. En este momento ocurre el flujo plástico ilimitado, y se alcanza P_u. Los valores de P_u y Δ_u son:

$$\sum F_y = 0: \quad P = 36 + 36 + 36,$$

$$P_u = 108 \text{ klb}$$

$$\Delta_u = \delta_A = \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{(36)(10 \times 12)}{(1)(30 \times 10^3)},$$

$$\Delta_u = 0.144 \text{ plg}$$

La Fig. 12.4 (e) indica la curva $P-\Delta$ resultante para la estructura.

El objeto del ejemplo 12.2 es proporcionar una descripción a fondo del comportamiento de una estructura estáticamente indeterminada para cargas que se incrementan constantemente desde cero hasta la falla última. Una comprensión de este proceso es la base para interpretar la teoría del comportamiento estructural en una gama amplia de problemas.

Cuando calculamos la carga última para una estructura indeterminada, más bien que explorar los cambios de estado a medida que las cargas crecen progresivamente, simplificamos grandemente la solución. Uno solamente necesita identificar el mecanismo de falla que resulta cuando un número suficiente de apoyos alcanza el intervalo inelástico. La fuerza máxima en cualquier miembro axial es $P = \sigma_y A$. Conociendo las fuerzas reactivas, fácilmente podemos determinar la carga última. ■

EJEMPLO 12.3 Determinar la carga última, P_u, que puede aplicarse a la barra rígida indicada en la Fig. 12.5. El área de la sección transversal del alambre en B es de 3×10^{-4} m², y la del alambre en C es de 2×10^{-4} m². Los alambres son elastoplásticos, con $\sigma_y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

SOLUCION La falla ocurrirá cuando ambos alambres B y C alcancen la fluencia. Si un solo alambre llega a la fluencia no causará la falla, debido a que el otro alambre aún está en el rango elástico. Por consiguiente, en el momento de la falla, reconocemos que $P = \sigma_y A$. Para los alambres B y C tenemos:

$$P_B = \sigma_y A_B = (250 \times 10^6)(3 \times 10^{-4}),$$

$$P_B = 75\ 000 \text{ N};$$

$$P_C = \sigma_y A_C = (250 \times 10^6)(2 \times 10^{-4}),$$

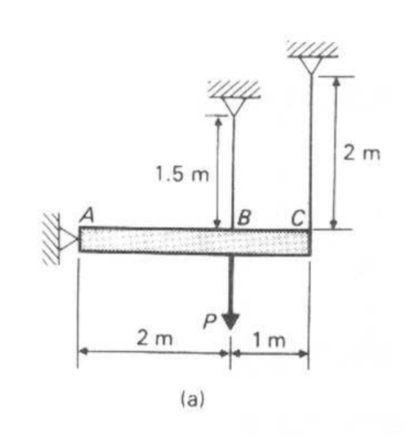
$$P_C = 50\ 000 \text{ N}.$$

Sumando momentos con respecto a A en la Fig. 12.5 (b) y conociendo la magnitud de la fuerza última en cada alambre, nos da

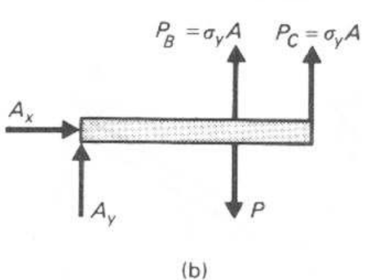
$$\sum M_A = 0: \quad P(2) - P_B(2) - P_C(3) = 0,$$

$$P_u = \frac{75\ 000(2) + 50\ 000(3)}{2},$$

$$P_u = 150\ 000 \text{ N}. \ ■$$



(a)



(b)

FIGURA 12.5

Problemas

Usese la relación idealizada elastoplástica $\sigma-\epsilon$ de la Fig. 12.1 (b) para todos los problemas, con σ_y = 250 MPa o 36 klb/plg², y E = 200 GPa o 30 000 lb/plg².

12.9 Una barra que tiene un área de sección transversal constante de 9×10^{-4} m² está empotrada entre dos apoyos A y C, como se indica en la Fig. P12.9. Determinar P_y y P_u, y trazar la curva $P-\Delta$ para una fuerza P aplicada en el punto B.

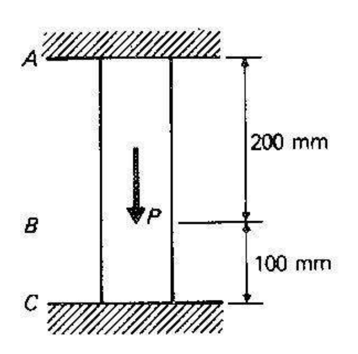


FIGURA P12.9

12.10 Una barra compuesta de dos segmentos está empotrada entre dos apoyos rígidos en A y C, como se indica en la Fig. P12.10. Determinar P_y y P_u, y trazar la curva $P-\Delta$ para una fuerza aplicada en el punto B. El área del segmento AB es de 1.0 plg², y el área del segmento BC es de 2.0 plg².

12.11 Determinar la carga última P_u para la barra rígida soportada por tres alambres, como se indica en la Fig. P12.11. El área de la sección transversal de los alambres A y C es de 5×10^{-4} m², y el área del alambre B es de 2×10^{-4} m².

12.12 Trazar la curva $P-\Delta$ para la estructura indicada en la Fig. P12.11.

12.13 Determinar la carga última P_u para el arreglo de tres barras indicado en la Fig. P12.13. El área de la sección transversal de cada barra es de 9×10^{-4} m².

12.14 Trazar la curva $P-\Delta$ para el arreglo indicado en la Fig. P12.13. Longitud L = 2 m.

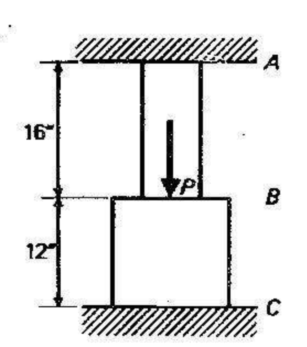


FIGURA P12.10

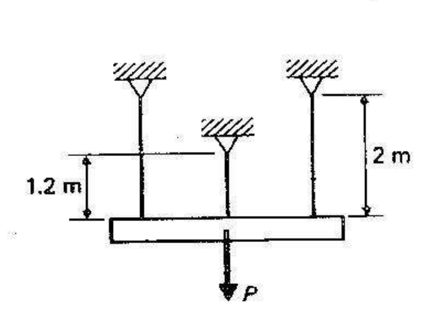


FIGURA P12.11

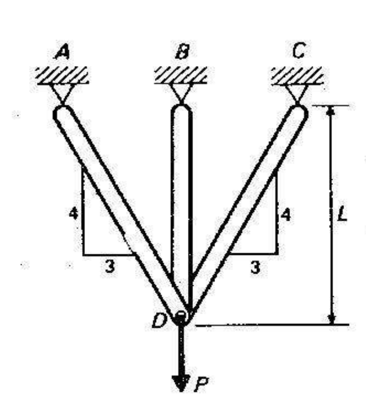


FIGURA P12.13

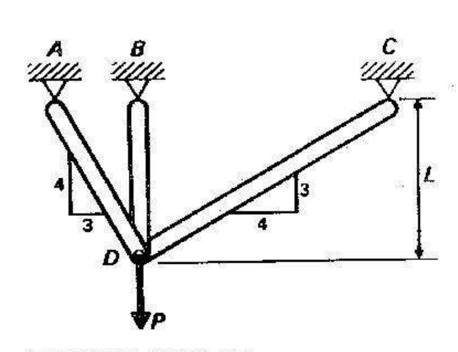


FIGURA P12.15

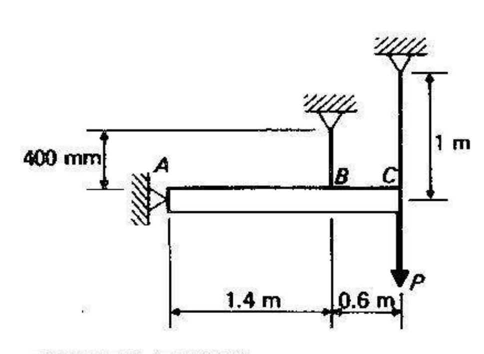


FIGURA P12.17

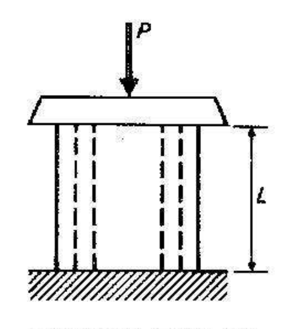


FIGURA P12.18

12.15 Determinar la carga última P_u para el arreglo de tres barras indicado en la Fig. P12.15. El área de la sección transversal de las barras AD y CD es de 1.5 plg^2, y el área de la barra BD es de 2 plg^2.
12.16 Trazar la curva $P-\Delta$ para el arreglo indicado en la Fig. P12.15. Longitud $L = 10$ pies.
12.17 Determinar la carga P_y en el instante de fluencia, y la carga última P_u, para la estructura indicada en la Fig. P12.17. La barra ABC es rígida; el área del alambre B es de 1.0×10^{-4} m^2, y la del alambre C es de 3.0×10^{-4} m^2.
12.18 Una barra circular maciza de 4 plg^2 de área ajusta holgadamente dentro de un tubo hueco con una área de su sección transversal de 2 plg^2. Se aplica una fuerza P a una placa rígida, como se indica en la Fig. P12.18. Determinar la carga P_y en el instante de fluencia, y la carga última P_u.
12.19 Resolver el problema 12.18 cuando la longitud del tubo exterior es de 16.000 plg, y la longitud del tubo interior es de 16.002 plg.

12.5 Ductilidad y diseño

Cuando un miembro estructural tiene cambios bruscos en su sección transversal ocurren concentraciones de esfuerzos. La sección 10.15 describió la distribución de esfuerzos para estas situaciones. La ductilidad de los materiales usados es importante para la resistencia de los materiales cuando se presentan concentraciones de esfuerzos.

Consideremos la placa indicada en la Fig. 12.6. Ocurre un cambio brusco en la sección transversal a través del agujero en la placa. La Fig. 12.6 (b) indica la distribución real de esfuerzos cuando éstos son menores que el punto de fluencia. Los esfuerzos máximos ocurren cerca

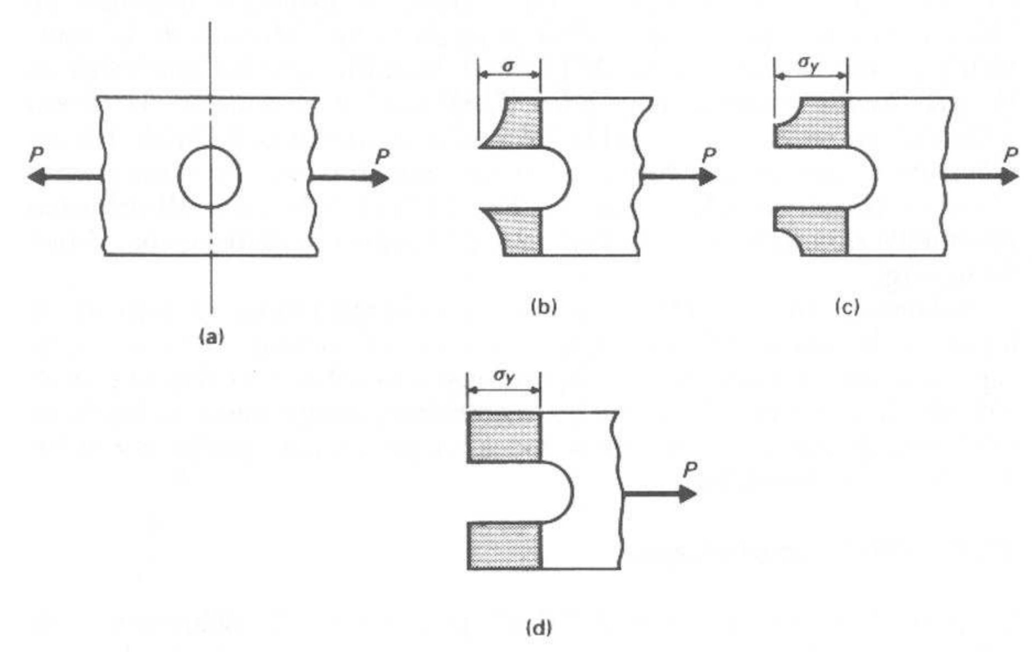


FIGURA 12.6

del agujero y son considerablemente mayores que el esfuerzo promedio calculable mediante $\sigma_{med} = P/A$.

Si el esfuerzo máximo excede el esfuerzo de fluencia en un material dúctil elastoplástico, las fibras cercanas al agujero fluirán, pero las otras fibras aún estarán esforzadas dentro del rango elástico. La Fig. 12.6 (c) ilustra esta condición. Una carga adicional hará que otras fibras adicionales alcancen el nivel de fluencia, hasta que se alcanza la carga última y todas las fibras están a su esfuerzo de fluencia, como se indica en la Fig. 12.6 (d). Conceptualmente, este comportamiento es idéntico al ilustrado por el ejemplo 12.2.

Cuando un material es dúctil, su comportamiento progresivo se asemeja al de la Fig. 12.6. Con la carga última, la ecuación $\sigma = P/A$ da una buena representación del esfuerzo máximo. Sin embargo, si un material es frágil, exhibiendo un diagrama $\sigma - \epsilon$ casi completamente elástico hasta la falla, el comportamiento progresivo es completamente diferente.

En un material frágil, las fibras grandemente esforzadas cercanas al agujero alcanzarán su valor máximo. A ese esfuerzo se fracturan, en lugar de alargarse y soportar cierta carga. Esto reduce el área neta del material, produciendo así un incremento de esfuerzos en las fibras restantes. El resultado es que un material frágil no exhibirá el flujo plástico restringido característico de un material dúctil, y la falla ocurrirá a niveles de esfuerzo promedio menores que los que se esperarían de otra manera.

Las conexiones remachadas y atornilladas se discuten en el Capítulo 14. El diseño de estas conexiones se basa en la hipótesis de que todos los remaches o los pernos estarán igualmente esforzados. A cargas bajas, esto está lejos de ser correcto.

La Fig. 12.7 (a) indica una conexión con cinco hileras de pernos. La Fig. 12.7 (b) indica la distribución relativa de esfuerzos cortantes en estos pernos. Los pernos que están próximos a los extremos de la conexión soportan la mayor parte de la carga, mientras que los que están en la parte media soportan muy poco. Conforme se incrementa la fuerza aplicada, los pernos mayormente esforzados alcanzan la fluencia. En ese momento conservan una fuerza constante, mientras que los otros pernos absorben las cargas adicionales. La Fig. 12.7(c) indica una distribución intermedia de esfuerzos, y la Fig. 12.7 (d) indica la distribución última de la carga.

Solamente en la condición cercana a la carga última es correcta la hipótesis de una distribución igual en todos los pernos. Otra vez, conceptualmente la conexión se comporta como la estructura descrita en el ejemplo 12.2. La ductilidad de los materiales permite hacer la hipótesis incorrecta de cargas iguales sobre todos los pernos para producir resultados de diseño aceptables.

12.6 Otros materiales

El acero dulce es un material "ideal" para diseño de máquinas y de estructuras debido a su intervalo extraordinariamente grande de com-

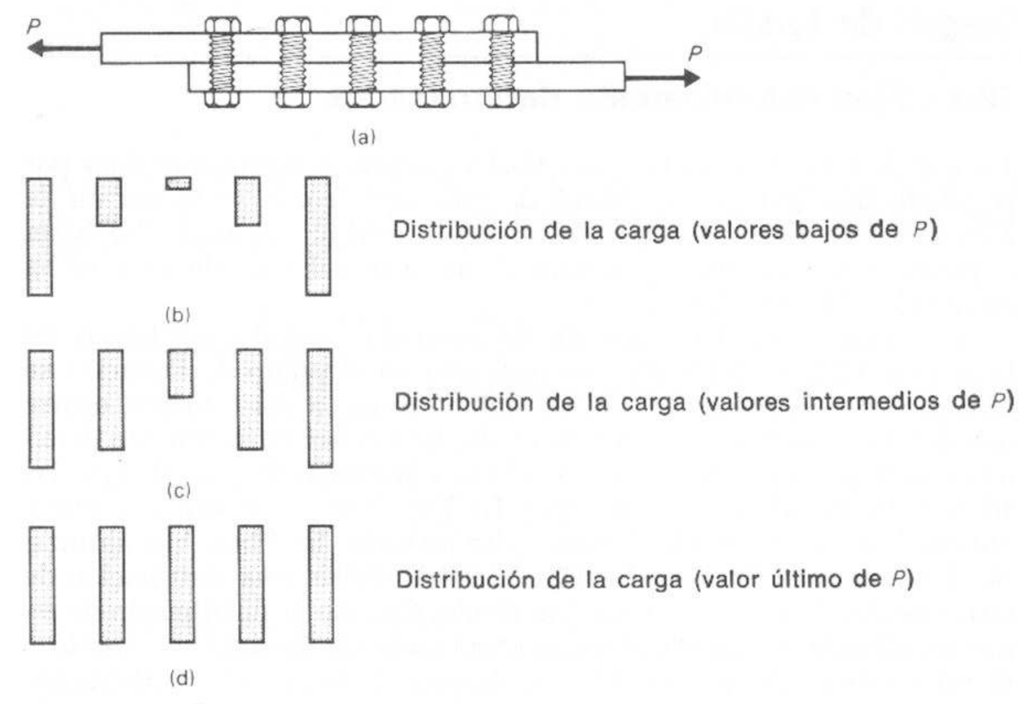


FIGURA 12.7

portamiento inelástico. Su ductilidad permite que las hipótesis básicas con respecto a la distribución de esfuerzos sean prácticas.

Otros materiales exhiben ductilidad de una manera más o menos semejante a la del acero dulce. Los materiales tales como el aluminio y el cobre pueden analizarse de manera semejante a la descrita en este capítulo. Para estos materiales el diagrama esfuerzo-deformación unitaria se convierte en un elemento principal para el análisis. La Fig. 12.8 indica los diagramas $\sigma - \epsilon$ para varios materiales. También puede usarse una aproximación a base de segmentos de recta para analizar estos miembros.

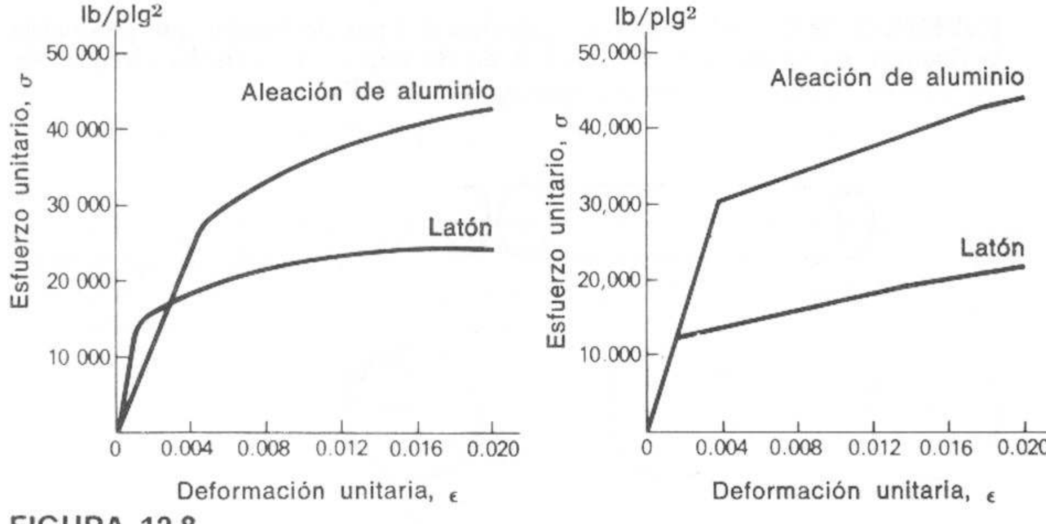


FIGURA 12.8

SECCION B Cargas de torsión

12.7 Ejes estáticamente determinados

Un par de torsión aplicado a una flecha circular generalmente dará por resultado una distribución lineal de esfuerzos, como se indica en la Fig. 12.9 (b). Cuando el par de torsión incrementa su magnitud hasta el punto en que las fibras extremas alcancen su valor de fluencia, se ha alcanzado el límite elástico.

En los miembros estáticamente determinados cargados axialmente de la sección 12.3, el límite elástico (esfuerzo en el punto de fluencia) se identificó con la capacidad última, debido a que a ese esfuerzo, ocurre una deformación ilimitada. Por otro lado, las flechas estáticamente determinadas tienen aún una resistencia elástica adicional después de que las fibras extremas alcanzan la fluencia. La Fig. 12.9 (c) ilustra una distribución de esfuerzos donde algunas, pero no todas, las fibras han alcanzado el esfuerzo de fluencia. La Fig. 12.9 (d) indica una distribución de esfuerzos donde todas las fibras han fluido. Cuando la distribución de esfuerzos alcanza esta última etapa, ocurre la rotación ilimitada y se obtiene el valor último del par de torsión. Aunque la flecha es estáticamente determinada, el comportamiento de las fibras internas es algo semejante a la respuesta estructural del ejemplo 12.2

El esfuerzo en cualquier fibra, en el rango elástico, es proporcional a su distancia radial medida a partir del eje. En la sección 3.2 se indicó que la relación entre el par de torsión y el esfuerzo es $\tau = Tc/J$. Esta ecuación es válida hasta que las fibras extremas alcanzan su valor de fluencia al cortante.

Cuando se incrementa el par de torsión más allá del límite elástico, fluyen algunas fibras adicionales. La relación entre el par de torsión y la profundidad que ha fluido puede determinarse mediante un análisis estático, como se indica en el ejemplo 12.4.

EJEMPLO 12.4 **Determinar la magnitud del par de torsión que produciría la fluencia hasta una distancia radial de 30 mm en una flecha circular de 80 mm de diámetro. Supóngase que σ_y = 150 MPa.**

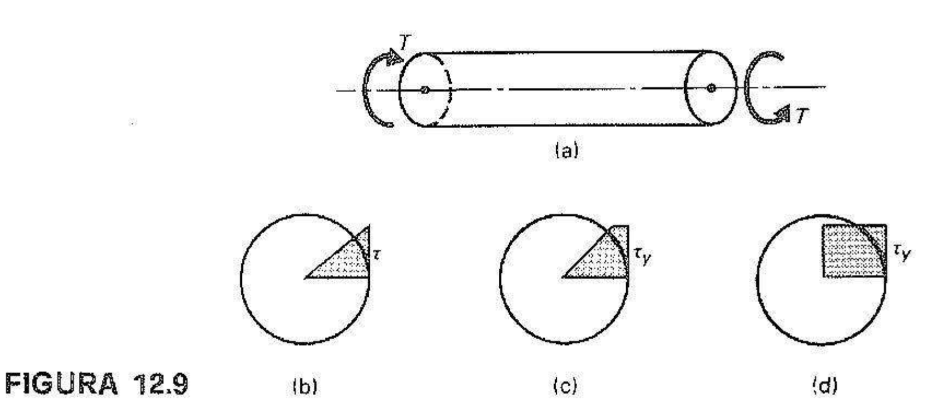


FIGURA 12.9

SOLUCION El núcleo interior de 30 mm de radio se conserva elástico, mientras que el anillo concéntrico exterior está en la región del esfuerzo inelástico. La Fig. 12.10 (b) indica la distribución de esfuerzos. El par de torsión se determina calculando separadamente las componentes elástica e inelástica, y haciendo después la suma de las dos.

ANILLO EXTERIOR INELASTICO La componente inelástica del par de torsión se determina sumando el efecto de momento de cada anillo (véase la Fig. 12.10 c), como sigue:

$$T = \int \text{Fuerza} \times \text{brazo} = \int \tau\, dA \times \text{brazo},$$

$$T_i = \int_{30\text{ mm}}^{40\text{ mm}} [\tau_y(2\pi\rho)\, d\rho](\rho) = 2\pi\tau_y \int_{30\text{ mm}}^{40\text{ mm}} \rho^2\, d\rho,$$

$$T_i = 2\pi\tau_y \left.\frac{\rho^3}{3}\right]_{30\text{ mm}}^{40\text{ mm}},$$

$$T_i = 2\pi(150 \times 10^6)(\tfrac{1}{3})[(40 \times 10^{-3})^3 - (30 \times 10^{-3})^3],$$

$$T_i = 11{,}624\text{ N}\cdot\text{m}.$$

El par de torsión del núcleo elástico puede determinarse sumando el par de torsión de cada anillo, como se indica en la Fig. 12.10 (d). Esto se convierte en

$$T_e = \int \text{Fuerza} \times \text{brazo} = \int \tau\, dA \times \text{Brazo}.$$

El esfuerzo en cualquier anillo puede determinarse mediante los triángulos semejantes de la Fig. 12.10 (e) como

$$\frac{\tau}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{\rho}{c}; \qquad \tau = \frac{\rho}{c}\tau_y.$$

Por consiguiente,

$$T_e = \int_0^c \tau_y\left(\frac{\rho}{c}\right)(2\pi\rho)\, d\rho \times \rho,$$

$$T_e = \frac{2\pi\tau_y}{c}\int_0^c \rho^3\, d\rho,$$

$$T_e = \frac{2\pi\tau_y}{c}\left.\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\right]_0^c$$

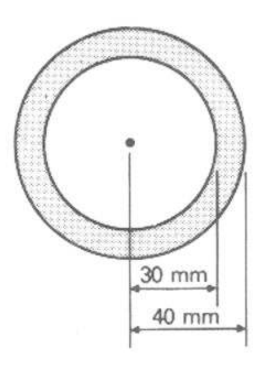
Sustituyendo $\tau_y = 150$ MPa y $c = 30 \times 10^{-3}$ m, obtenemos

$$T_e = 6\,362\text{ N}\cdot\text{m}$$

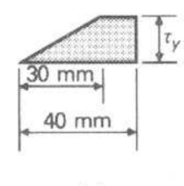
Nótese que la determinación del par de torsión elástico sigue el mismo patrón que la deducción de la ecuación del esfuerzo cortante para flechas circulares, como se discutió en la sección 3.2. Un método alternativo es usar la ecuación (3.1) para el núcleo elástico.

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad T = \frac{\tau J}{c},$$

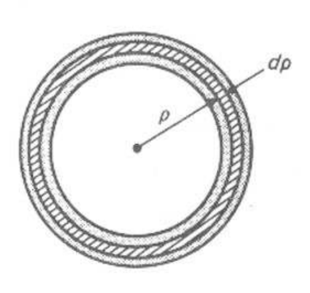
$$T_e = \frac{(150 \times 10^6)\frac{\pi}{2}(30 \times 10^{-3})^4}{(30 \times 10^{-3})} = 6\,362\text{ N}\cdot\text{m}.$$



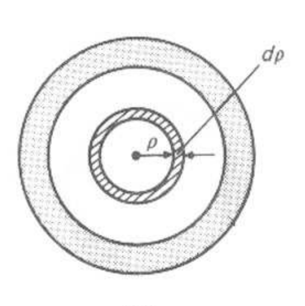
(a)



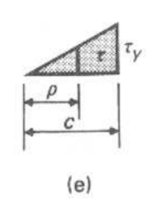
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURA 12.10

El par de torsión aplicado es

$$T = T_i + T_e = 11\,624 + 6\,362,$$

$$T = 17\,986 \text{ N}\cdot\text{m}. \quad ■$$

EJEMPLO 12.5 Determinar el ángulo de torsión para un segmento de 1 m, de la flecha del ejemplo 12.4. Supóngase que $G = 80$ GPa.

SOLUCION El ángulo de torsión para la flecha estará controlado por el núcleo elástico. Puede determinarse a partir de la ecuación (3.3) así:

$$\theta = \frac{TL}{JG} = \frac{(6\,362)(1)}{\frac{\pi}{2}(30\times 10^{-3})^4(80\times 10^9)},$$

$$\theta = 0.0625 \text{ rad},$$

$$\theta = (0.0625)\frac{360}{2\pi} = 3.58°. \quad ■$$

EJEMPLO 12.6 Una flecha maciza de acero, de 3 plg de diámetro está sujeta a un par de torsión de 120 klb-plg. Determinar el esfuerzo máximo y el ángulo de torsión en una longitud de 6 pies. Supóngase que el acero es elastoplástico, con $\tau = 21$ klb/plg^2 y $E = 12\,000$ klb/plg^2.

SOLUCION Supóngase, como paso preliminar, que el esfuerzo máximo en la flecha está dentro del rango elástico. Según la ecuación (3.1),

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(120)(1.5)}{\frac{\pi}{2}(1.5)^4} = 22.6 \text{ klb/plg}^2$$

El esfuerzo en las fibras extremas es mayor que $\tau = 21$ klb/plg^2. Por consiguiente, la sección transversal es parcialmente elástica y parcialmente inelástica. El par de torsión aplicado de 120 klb-plg está compuesto de una componente elástica y una componente inelástica. La distancia radial, r, que define el límite del núcleo elástico, puede determinarse a partir de la relación torsional:

$$T = T_e + T_i,$$

$$T = \int_0^r (\tau\, dA)\rho + \int_r^{1.5} (\tau_y\, dA)\rho.$$

El esfuerzo en una fibra situada dentro del núcleo elástico es $\tau = (\rho/r)\tau_y = 21\,(\rho/r)$. Entonces

$$T = \int_0^r \left(\tau_y \frac{\rho}{r}\right)(2\pi\rho\, d\rho)\rho + \int_r^{1.5} \tau_y(2\pi\rho\, d\rho)\rho,$$

$$T = \frac{2\pi\tau_y}{r}\int_0^r \rho^3\, d\rho + 2\pi\tau_y \int_r^{1.5} \rho^2\, d\rho.$$

Integrando las expresiones y simplificando el resultado, obtenemos

$$T = \frac{\pi r^3 \tau_y}{2} + \frac{2\pi\tau_y}{3}[(1.5)^3 - r^3].$$

Sustituyendo $T = 120$ klb-plg y $\tau_y = 21$ klb/plg^2, determinamos $r^3 = 2.58$ y $r = 1.37$ plg.

Conociendo la extensión del núcleo elástico, determinamos el par de torsión elástico como,

$$T_e = \frac{\pi r^3 \tau_y}{2} = \frac{\pi (1.37)^3 (21)}{2},$$

$$T_e = 85.4 \text{ klb-plg.}$$

El ángulo de torsión para el núcleo elástico es

$$\theta = \frac{TL}{JG} = \frac{(85.4)(6 \times 12)}{\frac{\pi}{2}(1.37)^4(12)(10^3)},$$

$$\theta = 0.092 \text{ rad.}$$

$$\theta = 0.092 \frac{360}{2\pi} = 5.27°. \quad ■$$

12.8 Valor último del par de torsión

Cuando una flecha circular se sujeta a un par de torsión, el valor último de ese par de torsión ocurre cuando todas las fibras de la flecha han alcanzado el esfuerzo de fluencia. En ese momento puede tener lugar una rotación ilimitada.

La distribución de esfuerzos en el estado de plastificación completa se indica en la Fig. 12.11, como un bloque rectangular. El par de torsión plástico completo puede determinarse sumando los pares de torsión que aporta cada anillo, así:

$$T_P = \int_0^c (\tau \, dA)\rho = \int_0^c \tau_y (2\pi\rho \, d\rho) = 2\pi\tau_y \int_0^c \rho^2 \, d\rho,$$

$$T_P = \frac{2\pi c^3}{3} \tau_y, \qquad (12.1)$$

donde

T_P = par de torsión plástico completo, en plg-lb, o N · m,
c = radio de la flecha en plg, o m,
τ_y = esfuerzo de fluencia del material, en lb/plg², o Pa.

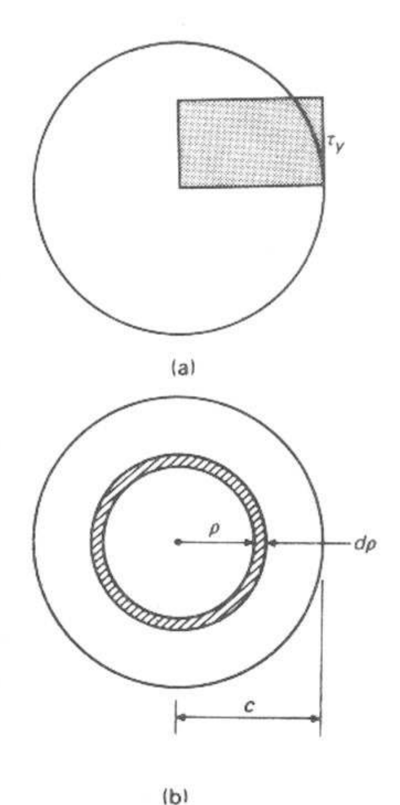


FIGURA 12.11

El par de torsión que puede soportar una flecha cuando ocurre la fluencia por primera vez en las fibras exteriores es

$$T_y = \frac{\tau_y J}{c} = \frac{\pi c^3}{2} \tau_y.$$

La relación entre la resistencia última (definida por el par de torsión correspondiente a plastificación completa) y la resistencia cuando ocurre la fluencia por primera vez es

$$\frac{T_P}{T_y} = \frac{2\pi c^3 \tau_y/3}{\pi c^3 \tau_y/2} = \frac{4}{3}.$$

Una flecha circular maciza puede soportar un 33% más de momento de torsión a la carga última que el valor predicho cuando ocurre la fluencia por primera vez.

12.9 Ductilidad y Diseño

La influencia de la ductilidad en el diseño de flechas es semejante a su influencia en el diseño de otro tipo de miembros. La concentración de esfuerzos en los lugares donde hay cambios bruscos de sección como por ejemplo en los sitios con cuñas, puede alcanzar el valor del esfuerzo de fluencia, aunque los esfuerzos calculados sean menores que éste. La ductilidad capacita a la flecha a soportar las altas concentraciones de esfuerzos debido al comportamiento inelástico del material.

Sin embargo nótese que los esfuerzos que se extienden en el rango inelástico y después se reducen a valores elásticos no pueden soportar indefinidamente cargas repetidas. La fatiga del material puede llegar a ser una parte importante a considerar en el diseño. La influencia de la fatiga debe investigarse en miembros sujetos a esfuerzos repetidos o a inversión de esfuerzos.

La ecuación (3.1) no dará valores correctos de esfuerzo cuando se ha excedido el límite de proporcionalidad del material. Sin embargo, algunas veces se usa para calcular un esfuerzo ficticio con el par de torsión último. El esfuerzo ficticio, llamado módulo de ruptura, se calcula como si el material fuera elástico hasta que ocurre la ruptura con el valor último del par de torsión. Puede usarse como un índice burdo de la resistencia última del material a la torsión.

Problemas

12.20 Determinar el par de torsión último para una flecha maciza de 100 mm de diámetro que exhibe un diagrama esfuerzo-deformación unitaria idealizado, del tipo elastoplástico, con $\tau_y = 120$ MPa. ¿Cuál es el módulo de ruptura para esta flecha?

12.21 Una flecha circular hueca, de 120 mm de diámetro exterior y de 80 mm de diámetro interior está sujeta a un par de torsión T. Determinar la razón T_u/T_y para esta flecha.

12.22 Una flecha circular de 4 plg de diámetro está sujeta a un par de torsión T. Determinar la magnitud del par de torsión que causaría la fluencia a una distancia radial de 1 plg. Supóngase que $\tau_y = 21$ klb/plg^2.

12.23 ¿Cuál es el ángulo de torsión que se presentaría en una flecha de 6 pies de longitud, como el del problema 12.22? Supóngase que $G = 11 \times 10^3$ klb/plg^2.

12.24 Una flecha circular maciza de 100 mm de diámetro está sujeta a un par de torsión de 30 000 N · m. Suponiendo que el material de esta flecha es elastoplástico, con $\tau_y = 132$ MPa y $G = 80$ GPa, determinar el esfuerzo máximo y el ángulo de torsión en una longitud de 1 m.

12.25 Una flecha circular hueca, de 3 plg de diámetro exterior y de 1 plg de diámetro interior está sujeta a un par de torsión T. Trazar un diagrama par de torsión-rotación $(T-\theta)$ para una longitud de 5 pies de este miembro. El material es elastoplástico, con $\tau_y = 18$ klb/plg^2, y $G = 11 \times 10^3$ klb/plg^2.

12.26 A una flecha circular maciza de 60 mm de diámetro se le aplica un par de torsión. Supóngase que el material es elastoplástico, con $\tau_y = 140$ MPa y $G = 80$ GOa. Determinar el par de torsión aplicado cuando el ángulo de torsión θ en un metro de longitud es:

a) 3°, b) 6°.

Cargas de flexión SECCION C

12.10 Comportamiento bajo flexión

Un estudio del rango completo del comportamiento a flexión involucra tanto condiciones elásticas como inelásticas. Un entendimiento de la acción inelástica en las vigas es un antecedente importante para tomar las decisiones de diseño. Esta sección proporciona una introducción a la predicción del comportamiento de las vigas esforzadas en el rango inelástico. Como antes, describiremos el comportamiento. La ductilidad del acero, indicada por su comportamiento esfuerzo-deformación unitaria idealizado de tipo elastoplástico, y las dimensiones y forma de la sección transversal de una viga, son importantes para la predicción de su capacidad de carga última a flexión, y de su comportamiento. Además, en esta sección, discutimos el concepto de redistribución del momento en vigas estáticamente indeterminadas con el fin de proporcionar una visión valiosa del comportamiento estructural.

12.11. Flexión inelástica

Consideremos una viga simple de sección transversal rectangular *bd*. Examinemos el comportamiento interior de la viga a medida que incrementamos su carga desde cero hasta su valor último, o sea cuando ocurre la deformación ilimitada.

El diagrama esfuerzo-deformación unitaria para cualquier fibra longitudinal ya sea de tensión o de compresión, se idealiza como el comportamiento elastoplástico que se indicó en la Fig. 12.1 (b). La Fig. 12.12 indica el comportamiento elastoplástico de la viga y los diagramas esfuerzo-deformación unitaria correspondientes cuando incrementamos progresivamente el momento flexionante de la viga.

Cuando la deformación unitaria está debajo del punto de fluencia, como en la Fig. 12-12 (b), el momento flexionante puede predecirse mediante $\sigma = Mc/I$. En el instante en que las fibras extremas alcanzan el punto de fluencia, como en la Fig. 12.12 (c), la ecuación $\sigma = Mc/I$ aún es válida. Sin embargo, $\sigma = \sigma_y$ en las fibras extremas. Designamos M_y el momento correspondiente al instante en que cualquier fibra extrema alcanza por primera vez el punto de fluencia. Por consiguiente, $M_y = \sigma_y I/c$.

Conforme aumentamos el momento flexionante, la deformación unitaria en las fibras aumenta debido a que las secciones planas antes de la flexión se conservan planas después de la flexión. Este aumento en la deformación unitaria obliga a algunas fibras a esforzarse en su intervalo inelástico, mientras que otras se conservan elásticas. La Fig. 12.12 (d) indica la demarcación entre las porciones inelástica y elástica, a la profundidad h_0. Nótese que la distribución de esfuerzos en el rango inelástico es rectangular, mientras que los esfuerzos varían linealmente en el rango elástico.

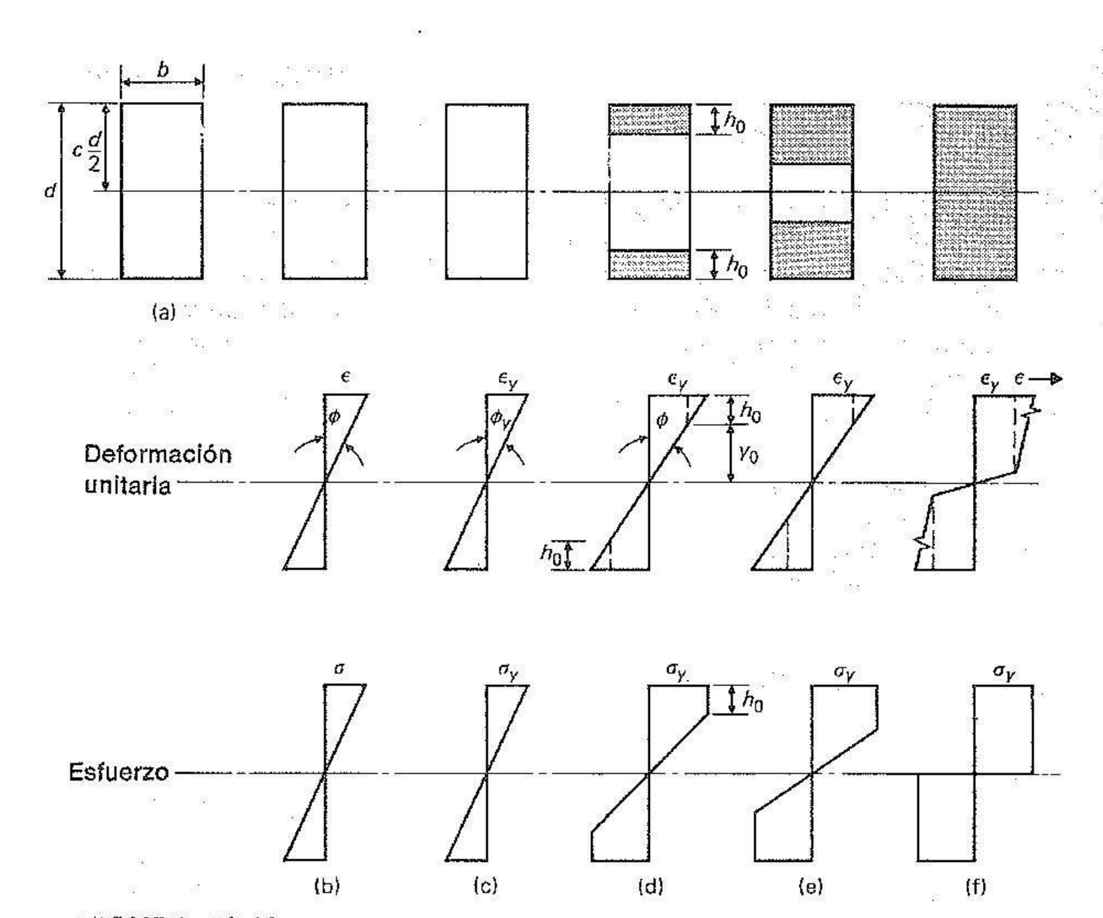


FIGURA 12.12

La profundidad de la fluencia en las fibras crece al aumentar el momento (véase la Fig. 12.12 e). Cuando las cargas se incrementan hasta que toda la sección transversal se vuelve inelástica, ocurren rotaciones ilimitadas, como se indica en la Fig. 12.12 (f). El momento para esa condición está en su valor totalmente plástico o máximo, y se designa por M_p.

El valor del momento resistente en cualquier etapa de carga puede calcularse mediante la estática, con base en la sección transversal de la viga y en la profundidad de penetración de la fluencia. El ejemplo 12.7 ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 12.7 Determinar el momento resistente en una viga de sección rectangular, de ancho b y peralte d, cuando la fluencia

a) Ocurre por primera vez en las fibras extremas,
b) penetra hasta una profundidad de $d/4$,
c) ocurre sobre toda la sección transversal.

SOLUCION

a) El momento, M_y, cuando ocurre la fluencia por primera vez puede determinarse a partir de la ecuación (5.1) como

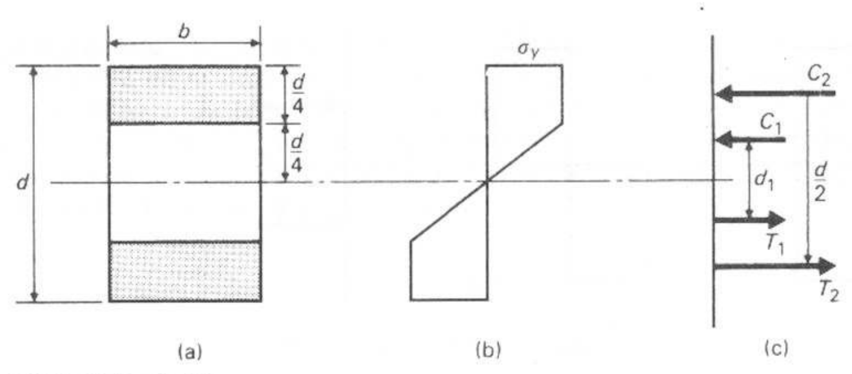


FIGURA 12.13

$$\sigma = \frac{Mc}{I}; \qquad M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y(\frac{1}{12})(b)d^3}{d/2}$$

$$M_y = \frac{bd^2}{6}\sigma_y$$

El término $bd^2/6$ es el módulo de sección elástico para la viga.

b) La Fig. 12.13 indica la distribución de esfuerzos cuando la fluencia ha penetrado hasta una profundidad de $h_0 = d/4$. El momento interno se compone de dos componentes, una parte elástica representada por el par $M_1 = C_1d_1$ (o T_1d_1), y una parte inelástica representada por el par $M_2 = C_2d_2$ (o T_2d_2). Los valores de estos momentos son

$$M_1 = C_1d_1 = (\sigma_{pr} \times \text{Area}) \times \text{Brazo}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sigma_y(b)\left(\frac{d}{4}\right)\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{d}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{d}{4}\right)\right],$$

$$M_1 = \frac{bd^2}{24}\sigma_y;$$

$$M_2 = C_2d_2 = (\sigma_{pr} \times \text{Area}) \times \text{Brazo}$$

$$= \sigma_y(b)\left(\frac{d}{4}\right)\left(\frac{3}{8}d + \frac{3}{8}d\right)$$

$$= \frac{3bd^2}{16}\sigma_y$$

El momento resistente total interno es:

$$M = M_1 + M_2 = \frac{bd^2}{24}\sigma_y + \frac{3bd^2}{16}\sigma_y,$$

$$M = \frac{11}{48}bd^2\sigma_y.$$

c) La Fig. 12.14 indica la distribución de esfuerzos cuando toda la sección transversal ha fluido. El momento de plastificación total es

$$M_p = C \text{ (o } T) \times \text{Brazo} = \sigma_y\left(b\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right),$$

$$M_p = \frac{bd^2}{4}\sigma_y. \quad ■$$

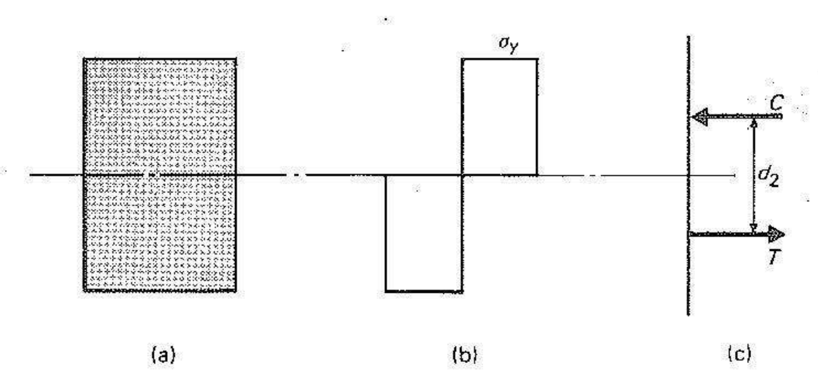


FIGURA 12.14

12.12 Factor de forma

La discusión de la sección 12.11 indica que una viga continuará resistiendo momento, aún después de que las fibras extremas alcancen por primera vez su valor a la fluencia. Usando los resultados del ejemplo 12.7, obtenemos la razón M_p/M_y para una viga rectangular:

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{[(bd^2)/4]\sigma_y}{[(bd^2)/6]\sigma_y} = 1.50.$$

Es decir, una sección rectangular puede soportar 50% más carga antes de que ocurra la deflexión ilimitada, que la que produce el comienzo de la fluencia.

Cada forma diferente de sección transversal exhibirá un valor diferente para la razón M_p/M_y. El factor de forma, f, se define como esta razón. Por consiguiente,

$$f = \frac{M_p}{M_y}, \tag{12.2}$$

donde

f = factor de forma (adimensional),
M_p = capacidad por momento último que puede resistir la sección transversal,
M_y = capacidad de momento para la sección cuando ocurre la fluencia por primera vez.

El eje neutro para formas que son simétricas con respecto al eje de flexión se conserva en el mismo lugar, en el centroide de la sección. Sin embargo, para formas asimétricas con respecto al eje de flexión, el eje neutro se mueve desde el centroide del área en M_y hasta el bisector del área en M_p. Es decir, en M_p, el área total a tensión es igual al área total a compresión, debido a que la variación en σ_y sobre el espesor es rectangular.

EJEMPLO 12.8 Determinar el factor de forma para la sección transversal indicada en la Fig. 12.15.

SOLUCION Cuando los esfuerzos están dentro del intervalo elástico, el eje neutro está en el centroide del área. En la Fig. 12.15 (a), este se encuentra a 5 plg arriba de la base. El momento de inercia con respecto a este eje neutro es $I = 136$ plg^4. El valor de M_y ocurre cuando las fibras inferiores llegan al esfuerzo de fluencia, ya que dichas fibras son las más alejadas del eje neutro. La Fig. 12.15 (b) indica la distribución de esfuerzos en M_y:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}; \qquad M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \sigma_y\left(\frac{136}{5}\right),$$

$$M_y = 27.2\sigma_y.$$

La Fig. 12.15(d) indica la distribución de esfuerzos en M_p. Nótese que el eje neutro se ha movido hasta un lugar donde el área a compresión es igual al área a tensión. El valor de M_p se determina por estática como

$$\sum M_{\text{eje neutro}} = 0: \qquad M_p = C \times \text{Brazo} + T \times \text{Brazo},$$

$$M_p = \sigma_y(6 \times 2)(1) + \sigma_y(2 \times 6)(3),$$

$$M_p = 48\sigma_y.$$

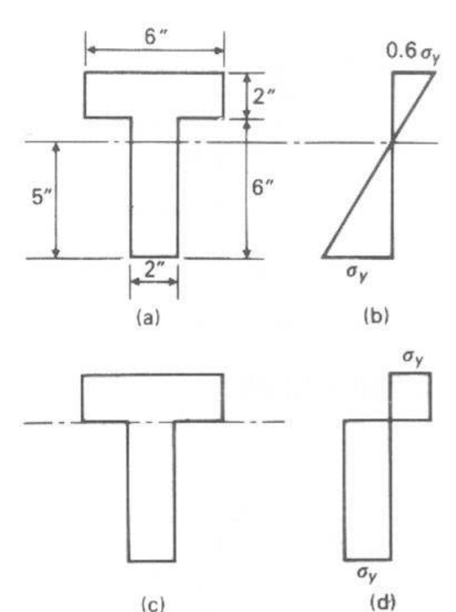


FIGURA 12.15

El factor de forma es

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{48\sigma_y}{27.2\sigma_y},$$

$$f = 1.76.$$

La sección transversal en forma de T, de las dimensiones indicadas en la Fig. 12.15 puede soportar 76% más carga en la condición última que la que puede soportar cuando las fibras extremas alcanzan por primera vez el esfuerzo de fluencia. ■

Problemas

Supóngase que todas las fibras exhiben la relación esfuerzo-deformación unitaria elastoplástica idealizada de la Fig. 12.1 (b). Cuando se requieran valores numéricos, úsese $\sigma_y = 36$ klb/plg^2 o $\sigma_y = 248$ MPa.

12.27 Determinar el momento resistente en la viga de la Fig. P12.27, cuando la fluencia

a) Ocurre por primera vez en la fibra extrema.
b) Se extiende hasta una profundidad de 2 plg.
c) Se extiende hasta una profundidad de 4 plg.
d) Ocurre sobre toda la sección transversal.

12.28 Determinar el momento resistente de la viga de la Fig. P12.28 cuando la fluencia

a) Ocurre por primera vez en las fibras extremas.
b) Se extiende hasta una profundidad de 120 mm.
c) Ocurre sobre toda la sección transversal.

12.29 Determinar el momento resistente de la viga de la Fig. P12.29 cuando la fluencia

a) Ocurre por primera vez en la fibra extrema.
b) Se extiende hasta una profundidad de 60 mm.
c) Se extiende hasta una profundidad de 120 mm.
d) Ocurre sobre toda la sección transversal.

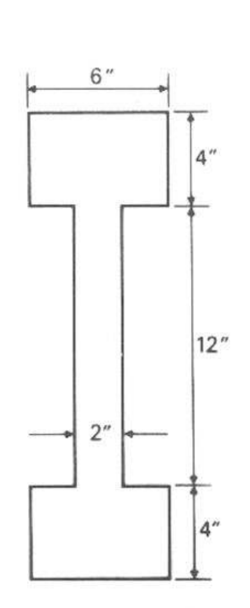


FIGURA P12.27

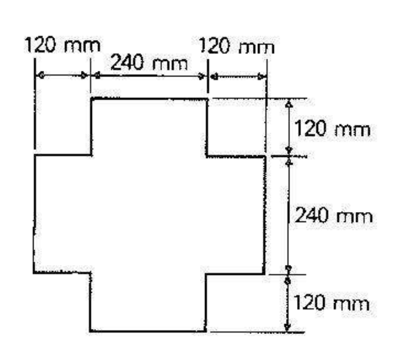


FIGURA P12.28

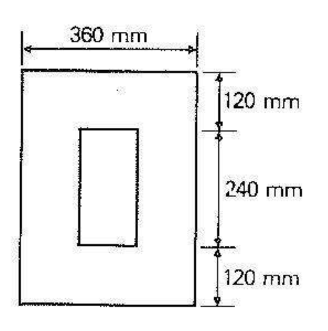


FIGURA P12.29

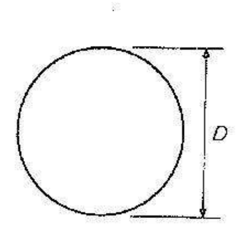


FIGURA P12.30

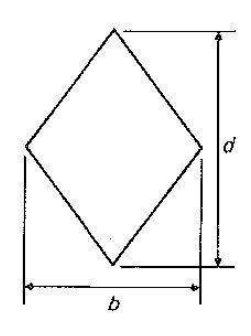


FIGURA P12.31

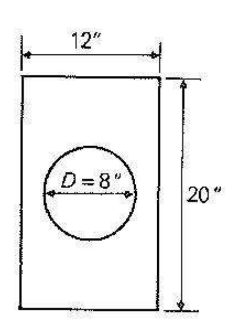


FIGURA P12.32

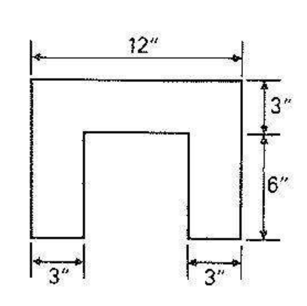


FIGURA P12.33

12.30-12.33 Determinar el factor de forma de la sección transversal de la viga indicada en las Figs. P12.30-P12.33.
12.34 Calcular el factor de forma para la Fig. P12.27.
12.35 Calcular el factor de forma para la Fig. P12.28.
12.36 Calcular el factor de forma para la Fig. P12.29.
12.37 Calcular el factor de forma para una vigueta de acero W 8 × 31.
12.38 Calcular el factor de forma para una vigueta de acero W 16 × 40.

12.13 Relaciones momento curvatura

La curvatura de una viga es una medida de su movimiento rotacional. El radio de curvatura, ρ, es la distancia desde el centro de curvatura hasta la curva elástica de la viga, como se discutió en la sección 7.2. La curvatura ϕ de una viga se define como $\phi = 1/\rho$. Es el ángulo de rotación entre dos secciones planas.

La curvatura en cualquier etapa dada está controlada por la distribución de esfuerzos, ya que los esfuerzos reflejan el movimiento rotacional de las secciones planas antes y después de la flexión. En la condición elastoplástica, la curvatura está controlada por las fibras que se conservan en el intervalo elástico.

La Fig. 12.12 indica la curvatura ϕ para diferentes condiciones de esfuerzo. En el rango elástico, la ecuación (7.2) da $\phi = 1/\rho = M/EI$.

En el comienzo de la fluencia

$$\phi_y = \frac{M_y}{EI}. \tag{12.3}$$

La curvatura a cualquier condición en la región elastoplástica se indica en la Fig. 12.12 (d) como

$$\tan \phi = \phi = \frac{\epsilon_y}{y_0}.$$

Pero, como en la ecuación (2.3),

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}.$$

Por consiguiente,

$$\phi = \frac{\sigma_y}{Ey_0}. \tag{12.4}$$

Por consiguiente, la curvatura puede determinarse para cualquier profundidad de penetración inelástica.

La relación momento-curvatura se indica sobre una gráfica adimensional con M/M_y como ordenada, y ϕ/ϕ_y como abscisa. La Fig. 12.16 indica relaciones momento-curvatura para diferentes formas de sección transversal. Notemos que las curvas se hacen asintéticas a los valores correspondientes a su factor de forma.

En la Fig. 12.16, nótese la rapidez con la que la vigueta de patín ancho se aproxima a la condición de plastificación completa cuando las

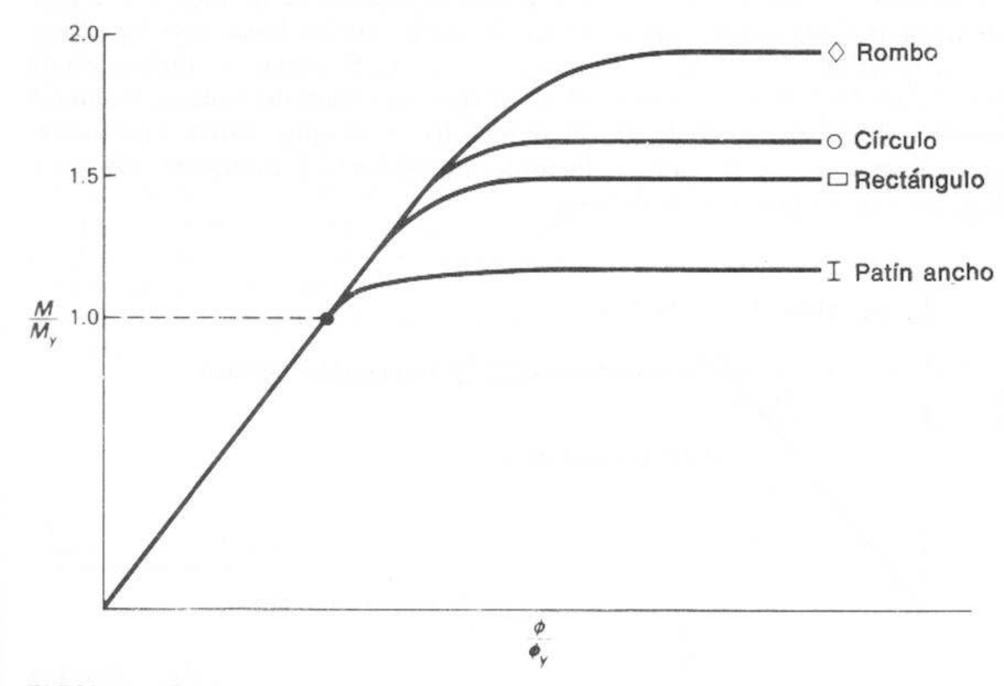


FIGURA 12.16

rotaciones se vuelven ilimitadas. Esto demuestra la gran eficiencia del uso del material con este perfil.

Regresando a la relación momento-curvatura de la Fig. 12.16, hagamos ahora una idealización que apoya la aplicación del diseño plástico con perfiles laminados. Ya que la vigueta de patín ancho alcanza la rotación ilimitada muy rápidamente despues de que las fibras extremas llegan a la fluencia, podemos idealizar la curva suponiendo que la sección se comportará elásticamente hasta que se alcanza el momento de plastificación completa. En este instante, la sección de la viga continuará girando bruscamente alrededor de una articulación plástica de una manera ilimitada.

La Fig. 12.17 ilustra las relaciones momento-curvatura de una articulación plástica y de una articulación libre. Una articulación libre tiene rotaciones ilimitadas bajo momento pequeño (cero). Una articulación nueva, bien aceitada, que se mueve libremente, justamente acabada de comprar en la ferretería ilustraría el comportamiento de una articulación libre.

Una articulación plástica produce una rotación ilimitada con un momento resistente constante. Si la articulación comprada en la ferretería llegara a hacerse un poco herrumbrosa, podría ocurrir rotación, pero con alguna resistencia. Este comportamiento se aproxima al de una articulación plástica.

Una articulación plástica se extenderá sobre una longitud específica de la viga. Esta longitud depende del tipo de carga sobre la viga y de la geometría de su sección transversal. La longitud total de la articulación plástica para una carga concentrada aplicada en el centro de una viga de sección rectángular es de $L/3$, como se indica en la Fig. 12.18 (a). La misma carga sobre una vigueta de patín ancho hará que la articulación plástica se extienda solamente sobre $L/8$, como se indica en la Fig. 12.18 (b). La distancia sobre la que se extiende una articulación puede establecerse calculando el momento en el que ocurre la fluencia por primera vez, y después colocando ese valor del momento sobre un diagrama de momentos de la viga.

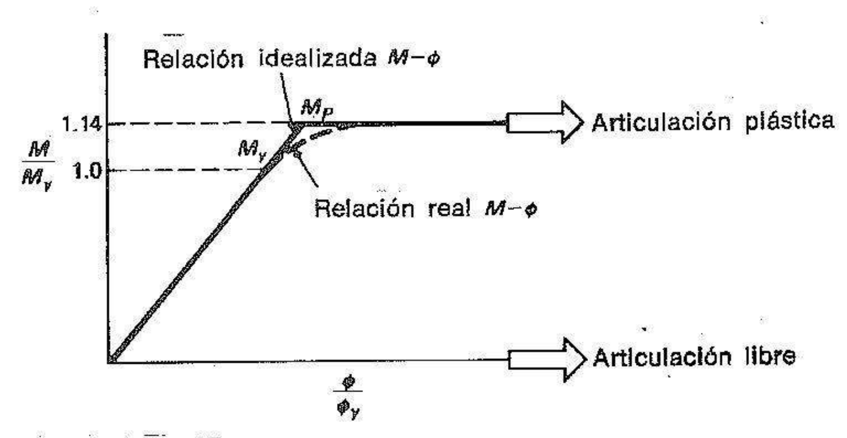


FIGURA 12.17

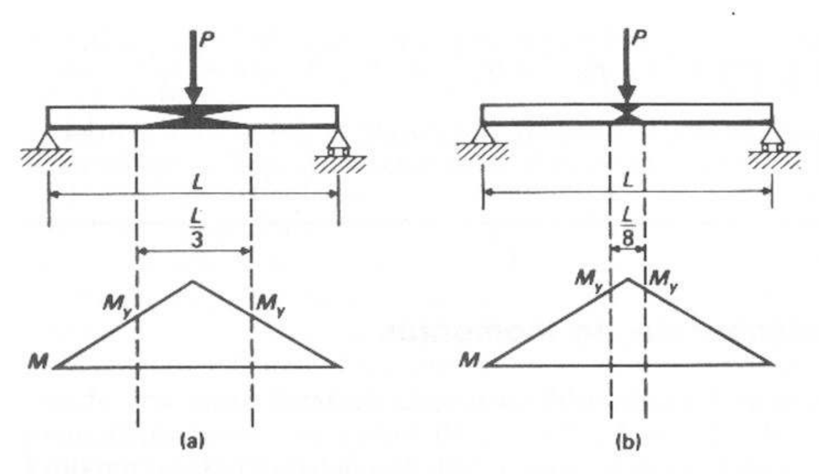


FIGURA 12.18

Problemas

12.39 Determinar el radio de curvatura y la curvatura para la viga de la Fig. P12.27, cuando
a) $M = 1\,000$ klb-pie b) $M = 1\,200$ klb-pie.

12.40 Determinar el radio de curvatura y la curvatura para la viga de la Fig. P12.28 cuando
a) $M = 2\,500$ kN · m; b) $M = 3\,000$ kN · m.

12.41 Calcular las coordenadas de una curva $M-\theta$ adimensional, correspondiente a una sección rectangular, para valores de ϕ/ϕ_y de 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 y 6.0. Bosquejar los resultados.

12.42 Calcular las coordenadas de una curva $M-\phi$ adimensional, correspondiente a la sección de la Fig. P12.27, para valores de ϕ/ϕ_y de 1.0, 2.0, 4.0 y 6.0. Bosquejar los resultados.

12.43 Calcular las coordenadas para una curva $M-\phi$ adimensional, correspondiente a la sección de la Fig. P12.28, para valores de ϕ/ϕ_y de 1.0, 2.0, 4.0 y 6.0. Bosquejar los resultados.

12.44 Determinar la distancia sobre la que se extiende la articulación plástica en una viga simplemente apoyada que soporta una carga uniformemente distribuida de w klb/pie. La sección transversal es un rectángulo.

12.45 Determinar sobre qué distancia se extiende la articulación plástica en la viga de la Fig. P12.45. La sección transversal es la que se indica en la Fig. P12.29.

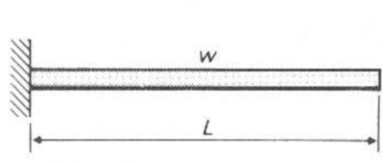


FIGURA P12.45

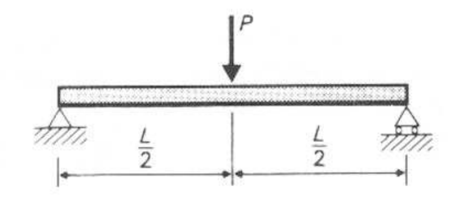


FIGURA P12.46

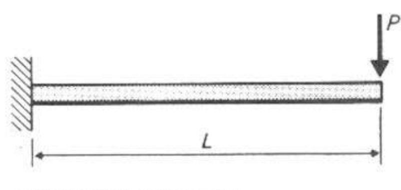
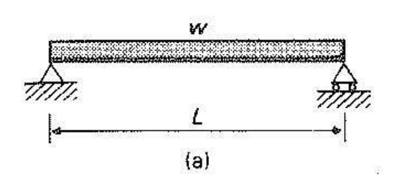


FIGURA P12.47

12.46 Determinar sobre qué distancia se extiende la articulación plástica en la viga de la Fig. P12.46. La sección transversal es la que se indica en la Fig. P12.28.
12.47 Determinar sobre qué distancia se extiende la articulación plástica en la viga de la Fig. P12.47. La sección transversal es la que se indica en la Fig. P12.33.

12.14 Redistribución de momentos



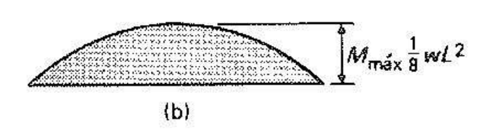


FIGURA 12.19

Cuando una viga estáticamente determinada desarrolla una articulación plástica, ocurre el colapso. La Fig. 12.19 indica una viga simplemente apoyada con una carga uniformemente distribuida sobre toda su longitud. Conforme se incrementa la carga w, el momento máximo aumenta proporcionalmente. El diagrama de momentos flexionantes de la Fig. 12.19 (b) conserva la misma forma básica, y los valores del momento en todos los lugares conservan siempre la misma proporcionalidad.

Cuando el momento máximo alcanza el valor de M_p para la viga, se forma una articulación plástica. Cualquier incremento adicional en la carga dará por resultado deflexiones ilimitadas (es decir, el colapso). La carga que puede aplicarse cuando se forma la primera articulación plástica es w_y. Esta es igual a la carga máxima, w_u, para esta viga.

Consideremos ahora la viga indicada en la Fig. 12.20 (a). Esta viga es estáticamente indeterminada con sus extremos empotrados en A y B. La Fig. 12.20 (b) indica el diagrama de momentos para esta viga. Conforme se incrementa la carga, los valores del momento en cualquier lugar conservan una relación constante con respecto al momento en cual-

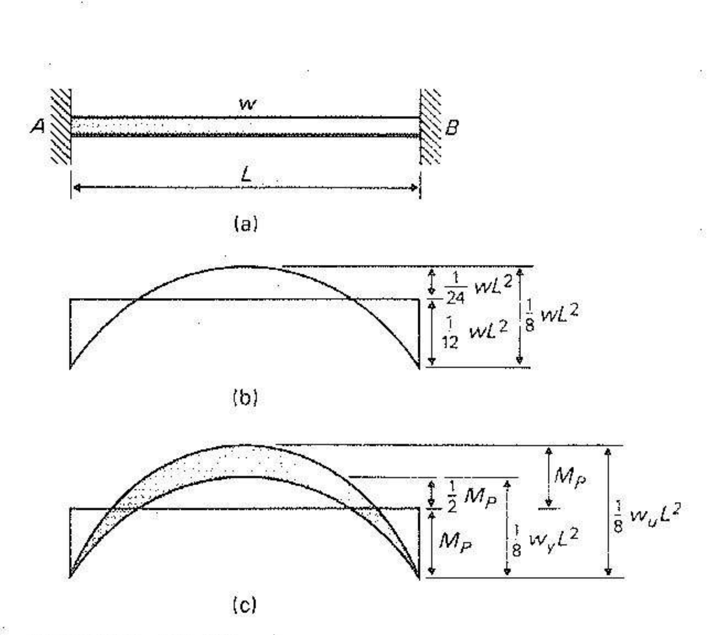


FIGURA 12.20

quier otro lugar. Esta razón constante se conserva mientras todas las partes de la viga estén esforzadas dentro del intervalo elástico.

El momento máximo de la viga, de la Fig. 12.20 ocurre en los empotramientos A y B. A medida que continúa aumentándose la carga aplicada se desarrollan articulaciones plásticas en A y B. Conforme la carga se incrementa más allá del valor en que se forman las dos primeras articulaciones plásticas, la viga no fallará. Los momentos en A y B se conservan constantes e iguales en M_p, y la carga puede continuar incrementándose hasta que se forma una tercera articulación plástica en el siguiente lugar de momento máximo. Esto sucede en el centro. Cuando se forma esta tercera articulación plástica, se desarrolla un mecanismo de colapso, y ocurre la falla.

La carga correspondiente al instante en que se forman las dos primeras articulaciones plásticas, se designa como la carga de fluencia, w_y. Aumentando la carga más allá de w_y hace que se redistribuyan los momentos. Ya los momentos dejan de ser proporcionales entre sí. Más bien se incrementarán como se indica mediante el área sombreada del diagrama de momentos de la Fig. 12.20 (c). La carga última, w_u, es el valor de la carga cuando ocurre el colapso. En principio, este proceso de redistribución es idéntico a la redistribución de cargas del ejemplo 12.2.

La resistencia de reserva en la viga estáticamente determinada de la Fig. 12.19 es, solamente, la del factor de forma. Es decir, la viga puede soportar un incremento de carga hasta llegar a 1.14 w, arriba de la que produjo la primera fluencia en las fibras extremas.

La viga estáticamente indeterminada de la Fig. 12.20 tiene dos componentes de resistencia de reserva. Una es el mismo valor de 1.14 correspondiente al factor de forma. Este se presenta en todas las vigas estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas. La segunda componente de su resistencia de reserva es resultado de la redistribución de momentos después de que se forma la primera articulación plástica. Tal componente sólo existe en estructuras estáticamente indeterminadas. La resistencia de reserva de la Fig. 12.20 que resulta de la redistribución de momentos es

$$\frac{w_u}{w_y} = \frac{16M_p/L^2}{12M_p/L^2} = \frac{4}{3}$$

La resistencia de reserva total resultante de la redistribución de momentos y del factor de forma es

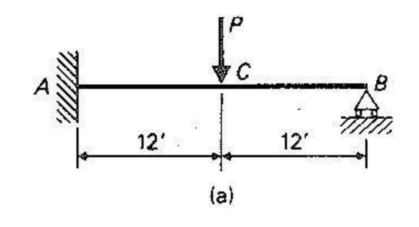
$$\tfrac{4}{3} \times 1.14 = 1.52.$$

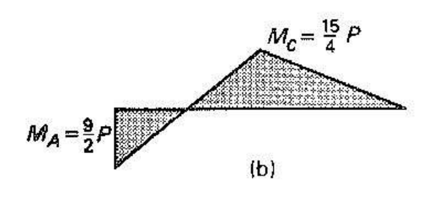
En otras palabras, la viga de la Fig. 12.20 puede soportar un 52% más de carga a la capacidad última, que la carga que soporta cuando ocurre la primera fluencia. La viga de la Fig. 12.19 puede soportar solamente un 14% más de carga a la capacidad última, que la carga que soporta cuando ocurre la primera fluencia.

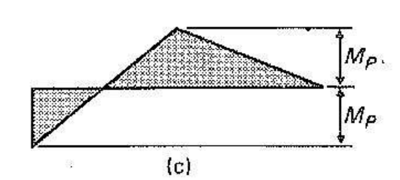
Sin embargo, nótese que el incremento en la capacidad de soportar carga para una estructura estáticamente indeterminada no es constante.

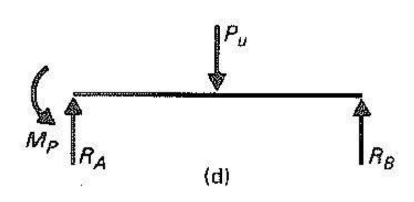
Es decir, la resistencia de reserva resultante de la redistribución de momentos depende tanto de los apoyos estructurales de la viga, como de las cargas aplicadas.

EJEMPLO 12.9 Determinar la carga a la primera fluencia, P_y, y la carga última P_u que puede aplicarse a la viga de la Fig. 12.21. La viga es una W 12 × 40; el factor de forma es $f = 1.11$; y el esfuerzo de fluencia es $\sigma_y = 36$ klb/plg².









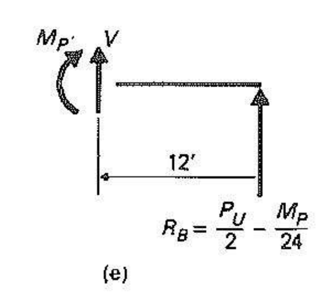


FIGURA 12.21

SOLUCION Primero debemos determinar el diagrama de momentos elásticos a partir de los principios del capítulo 8. Esto se indica en la Fig. 12.21 (b). El valor de M_p se determina a partir de $f = M_p/M_y$. El valor de M_y es

$$\sigma = \frac{Mc}{I}; \qquad M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = (36)(51.9) = 1\,868 \text{ klb-plg},$$

$$M_y = \frac{1{,}868}{12} = 156 \text{ klb-pie}$$

$$f = \frac{M_P}{M_y}; \qquad M_P = fM_y = (1.11)(156)$$

$$M_P = 173 \text{ klb-pie.}$$

La primera articulación plástica se formará en A debido a que el momento es máximo en ese lugar. El valor de la carga cuando se forma la primera articulación plástica se designa por P_y. A partir de la Fig. 12.21 (b),

$$M_A = \tfrac{9}{2}P; \qquad M_P = \tfrac{9}{2}P_y$$

$$173 = \tfrac{9}{2}P_y$$

$$P_y = 38.4 \text{ klb.}$$

Conforme la carga se incrementa hasta P_u, el momento en A se mantendrá al valor constante de M_P, pero el momento en C se incrementará hasta M_P, como se indica en la Fig. 12.21 (c). Calculamos el valor de P_u en ese momento por estática. La Fig. 12.21 (d) es un diagrama de cuerpo libre de toda la viga a la carga de colapso. Calculamos

$$\sum M_A = 0: \qquad R_B(24) - P_u(12) + M_P = 0,$$

$$R_B = \frac{P_u}{2} - \frac{M_P}{24}.$$

Según la Fig. 12.21 (e)

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad R_B(12) - M_P = 0,$$

$$\left(\frac{P_u}{2} - \frac{M_P}{24}\right)12 - M_P = 0,$$

$$P_u = \frac{M_P}{4}.$$

El valor de P_u se convierte entonces en:

$$P_u = \frac{173}{4}$$

$$P_u = 43.3 \text{ klb}$$

El factor de resistencia de reserva para esta viga es

$$\text{Resistencia de reserva} = \frac{P_u}{P_y} \times \text{factor de forma}$$

$$= \frac{43.3}{38.4} \times 1.11 = 1.25. \quad ■$$

Problemas

12.48-12.51 Determinar la resistencia total de reserva (lo que excede a la resistencia correspondiente a la primera fluencia) para las vigas indicadas en las Figs. P12.48—Pa2.51. **Supóngase** que en todos los casos, el **factor de forma es de 1.14.**

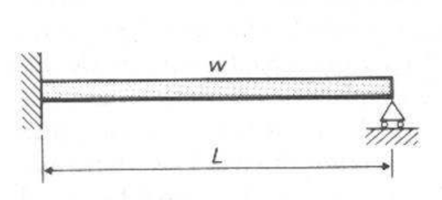


FIGURA P12.48

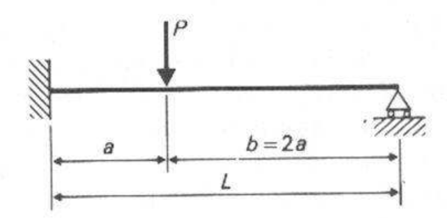


FIGURA P12.49

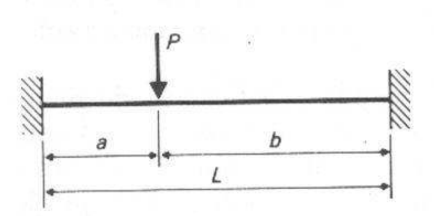


FIGURA P12.50

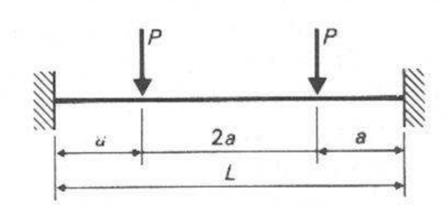


FIGURA P12.51

13

Métodos energéticos

13.1 Introducción

La relación entre una carga aplicada a una máquina o a una estructura y las deformaciones resultantes es una parte importante de la mecánica de materiales. Esta relación carga-deformación se puede determinar y expresar de varias maneras. Las primeras partes de este libro usan el equilibrio estático y la geometría para establecer las relaciones carga-deformación. Este capítulo introduce las técnicas energéticas para relacionar las cargas aplicadas con las deformaciones estructurales resultantes.

La conservación de la energía es un concepto útil en muchas áreas de la ciencia. En la mecánica de materiales proporciona una base para manejar varios tipos de problemas. La aplicación más frecuente de las técnicas energéticas está en el cálculo de pendientes y deflexiones de vigas, marcos, armaduras, y otras estructuras. Ciertos tipos de problemas se ajustan particularmente bien a las técnicas energéticas. Las deformaciones de los miembros curvos, el análisis de cargas de impacto, y el movimiento de las armaduras son los problemas en que estas técnicas ofrecen una clara ventaja sobre técnicas analíticas alternativas. En otros tipos de problemas, las técnicas energéticas proporcionan interesantes métodos alternativos de solución.

Hay muchas técnicas que caen bajo la amplia clasificación de métodos energéticos. El trabajo real, el trabajo virtual, y el teorema de Castigliano son algunas de las más populares. Todas ellas están relacionadas, pero cada una tiene su propio procedimiento de solución. Este capítulo introduce los conceptos energéticos fundamentales e ilustra algunas aplicaciones.

SECCION A Energía de deformación

13.2 Trabajo y energía

El trabajo se define como el producto de una fuerza por la distancia que se mueve en la dirección de la fuerza. Por ejemplo, la Fig. 13.1 indica dos fuerzas actuando sobre un cuerpo. Pueden presentarse otras fuerzas,

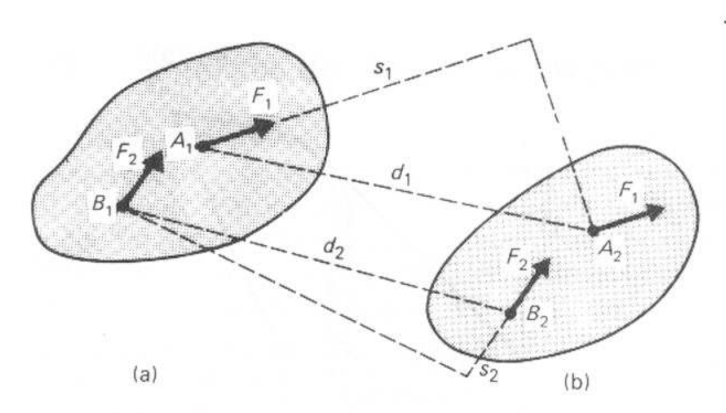


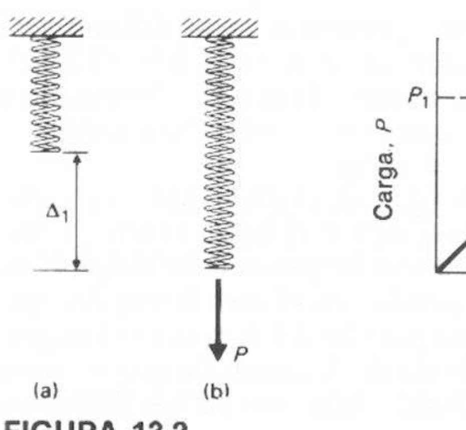
FIGURA 13.1

pero no se indican. El cuerpo se mueve desde la posición (a) hasta la posición (b). Por consiguiente, la fuerza F_1 se mueve desde la posición A_1 hasta la posición A_2, una distancia d_1. Análogamente, la fuerza F_2 se mueve desde B_1 hasta B_2, a través de una distancia d_2.

El trabajo efectuado por la fuerza F_1 es F_1 veces s_1, ya que la fuerza y la distancia deben tener la misma línea de acción. Análogamente, el trabajo hecho por la fuerza F_2 es F_2 veces s_2. El trabajo puede ser positivo o negativo. El trabajo positivo ocurre cuando la fuerza y la distancia tienen el mismo sentido. El trabajo negativo ocurre cuando la fuerza y la distancia tienen sentido opuesto. En la Fig. 13.1, si el cuerpo se mueve desde (a) hasta (b), el trabajo de las fuerzas F_1 y F_2 es positivo. Si el movimiento es desde (b) hasta (a), el trabajo es negativo.

La Fig. 13.2 (a) indica un resorte sin deformar. Cuando se aplica una fuerza P, el resorte se alarga una distancia Δ (Fig. 13.2 b). Supóngase que la fuerza se incrementa gradualmente desde cero hasta su valor final P. La Fig. 13.2 (c) indica la gráfica de la relación entre P y Δ.

El trabajo hecho por la fuerza P es la fuerza por su distancia. Sin embargo, la fuerza cambia su magnitud desde cero hasta su valor final P_1. El cambio en el trabajo desde una posición a la siguiente es $Pd\Delta$, como



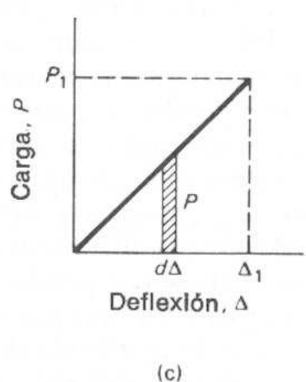
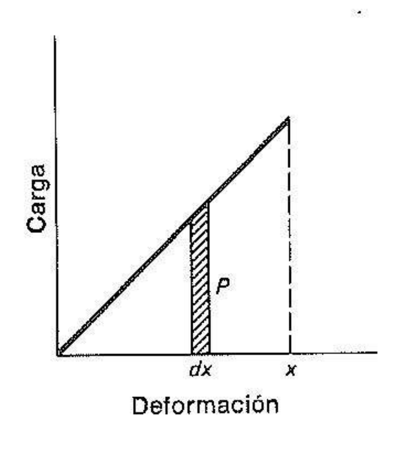
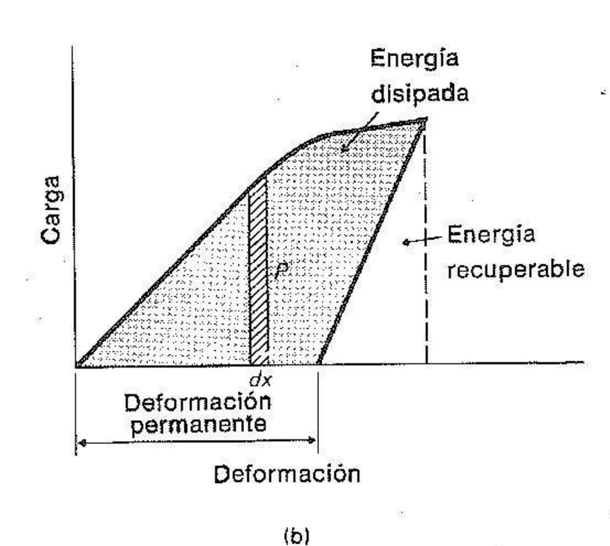


FIGURA 13.2



(a)



(b)

FIGURA 13.3

se indica mediante el área elemental de la Fig. 13.2 (c). El trabajo total es la suma de cada incremento $Pd\Delta$, O sea:

$$\text{Trabajo} = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta.$$

Cuando la relación P—Δ es lineal, como en la Fig. 13.2 (c), el trabajo es igual a $\frac{1}{2}P\Delta_1$, que es el área bajo la curva P—Δ.

El resorte, deformado, es capaz de realizar trabajo para regresar a su posición sin deformar. Este trabajo interno se llama la energía interna de deformación, y se le da el símbolo U. La energía interna de deformación, o simplemente la energía de deformación, U, es igual en magnitud al trabajo externo. Establecido matemáticamente,

$$U = \int P\,dx. \tag{13.1}$$

La integral $\int P\,dx$ es el área bajo el diagrama carga-deformación. Cuando la relación carga-deformación es lineal, como en la Fig. 13.3 (a), todo el trabajo externo se convierte en energía elástica de deformación. Esta energía elástica es recuperable y hace que la estructura regrese a su posición original después de quitar la carga.

La energía total de deformación siempre es el área bajo una curva carga-deformación. Sin embargo, cuando se excede el límite elástico, como en la Fig. 13.3 (b), queda alguna deformación permanente después de que se quita la carga. La energía recuperable es el área triángular que define el movimiento de regreso. La otra porción del área bajo el diagrama carga-deformación representa la energía de deformación que se gasta en deformar permanentemente el material. Esta energía se disipa en forma de calor.

13.3 Energía de deformación para cargas axiales

El hecho de que el trabajo externo sea igual a la energía interna de deformación puede usarse directamente como un método para determinar deflexiones. Por ejemplo, la barra simple de la estructura de la Fig. 13.4 tiene una carga Q aplicada gradualmente. Si el sistema se conserva elástico, el trabajo externo es $Q\Delta/2$. Si podemos determinar la energía interna de deformación de las barras AC y BC, podemos calcular la deflexión Δ.

Desarrollaremos una expresión para la energía de deformación de una barra cargada axialmente, de la siguiente manera. La Fig. 13.5 indica una barra sujeta a la aplicación gradual de una carga P. La barra experimentará un alargamiento total Δ. La deformación interna de un segmento de la barra, de longitud dx (véase la Fig. 13.5b) es igual a la fuerza promedio por el cambio de longitud de dx. El cambio de longitud de un miembro cargado axialmente está dado por la ecuación (2.4) como $\delta = PL/AE$. La energía interna de deformación para el segmento dx es

$$dU = \frac{P}{2}\delta = \frac{P}{2}\frac{P\,dx}{AE} = \frac{P^2\,dx}{2AE}.$$

La energía total de deformación para toda la barra es la suma de las energías de deformación para cada segmento:

$$U = \int_0^L \frac{P^2\,dx}{2AE}. \tag{13.2}$$

Conociendo la energía interna de deformación, puede calcularse la deflexión Δ. El ejemplo 13.1 ilustra el procedimiento.

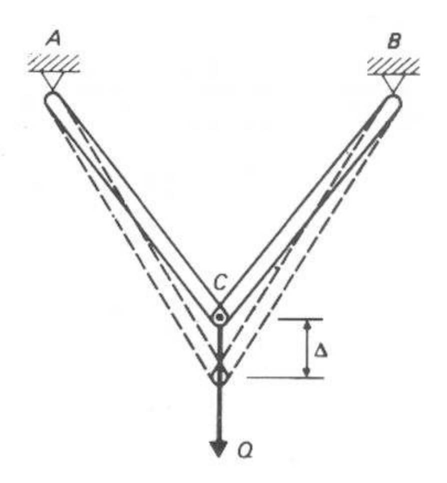


FIGURA 13.4

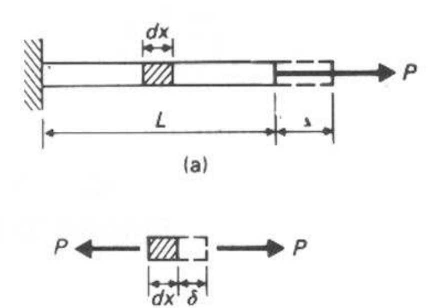


FIGURA 13.5

EJEMPLO 13.1 Determinar la deflexión Δ de la estructura de dos barras de la Fig. 13.6 cuando $Q = 40$ kN. El área de la sección transversal de cada barra es de 6×10^{-4} m², y $E = 200$ GPa.

SOLUCION El trabajo externo es $\frac{1}{2}Q\Delta$. La energía interna de deformación puede calcularse a partir de la ecuación (13.2). La fuerza interna P en cada barra se determina a partir del diagrama de cuerpo libre del punto C, como se indica en la Fig. 13.6 (c):

$$\sum F_X = 0: \qquad \tfrac{3}{5}P_{AC} = \tfrac{4}{5}P_{BC},$$

$$P_{AC} = \tfrac{4}{3}P_{BC}; \tag{a}$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad \tfrac{4}{5}P_{AC} + \tfrac{3}{5}P_{BC} = 40. \tag{b}$$

Resolviendo las ecuaciones (a) y (b), simultáneamente da

$$P_{AC} = 32 \text{ kN},$$
$$P_{BC} = 24 \text{ kN}.$$

La energía de deformación para una barra es

$$U = \int_0^L \frac{P^2\,dx}{2AE} = \frac{P^2 L}{2AE}.$$

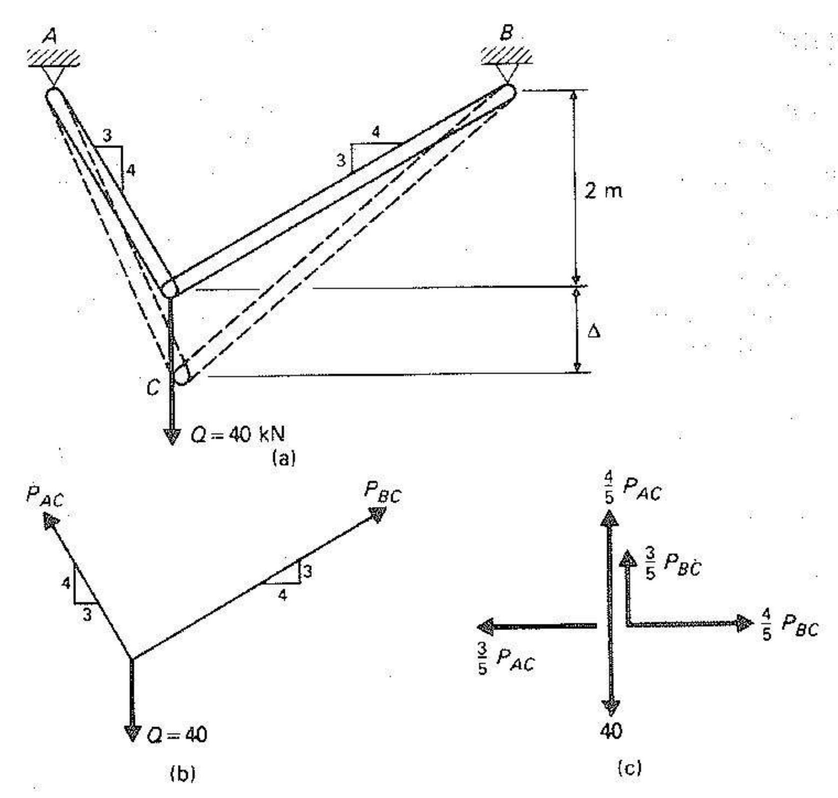


FIGURA 13.6

La energía de deformación para el sistema es

$$U = \sum \frac{P^2 L}{2AE} = \frac{P_{AC}^2 L_{AC}}{2A_{AC}E_{AC}} + \frac{P_{BC}^2 L_{BC}}{2A_{BC}E_{BC}},$$

$$U = \frac{(32\ 000)^2(2.5)}{2(6 \times 10^{-4})(200 \times 10^9)} + \frac{(24\ 000)^2(3.33)}{2(6 \times 10^{-4})(200 \times 10^9)},$$

$$U = 18.6\ \text{N} \cdot \text{m}.$$

La deflexión puede determinarse como

Trabajo externo = energía interna de deformación;

$$\tfrac{1}{2}Q\Delta = U = \sum \frac{P^2 L}{AE},$$

$$\tfrac{1}{2}(40\ 000)\Delta = 18.6,$$

$$\Delta = 0.00093\ \text{m},$$

$$\Delta = 0.93\ \text{mm}. \blacksquare$$

13.4 Energía de deformaciones para cargas de flexión

El método del trabajo real usado en el ejemplo 13.1 también puede aplicarse para otros tipos de carga. Solamente necesitamos desarrollar una relación para la energía interna de deformación de la respuesta de la carga.

La Fig. 13.7 indica una viga con una carga concentrada actuando en B. El trabajo externo involucra el movimiento de la fuerza Q a través de la deflexión Δ de la viga. El trabajo externo es igual a $\frac{1}{2}Q\Delta$, y reconocemos otra vez la relación lineal carga-deflexión.

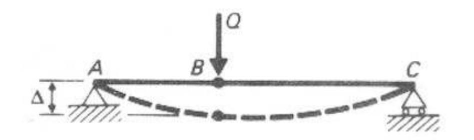


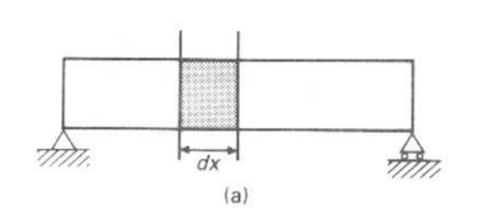
FIGURA 13.7

La energía interna de deformación para un segmento de longitud dx se determina sumando la energía de deformación dU para cada fibra que existe en dx. Primero, considerando la deformación en una sola fibra localizada a una distancia y a partir del eje neutro (véase la Fig. 13.8b), tenemos

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \sigma \frac{dx}{E}. \tag{a}$$

El esfuerzo en esta fibra es $\sigma = My/I$. Entonces,

$$\delta = \frac{My}{I} \cdot \frac{dx}{E}.$$



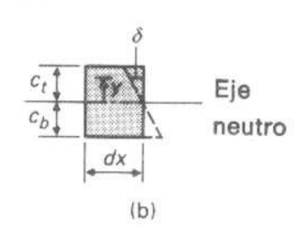


FIGURA 13.8

La energía interna de deformación para esta fibra es $\frac{1}{2}P\delta$. La fuerza P sobre la fibra se obtiene a partir de $P = \sigma\, dA$. Otra vez, el esfuerzo unitario σ se determina a partir de la fórmula de la flexión, $\sigma = My/I$. Por consiguiente,

$$P = \sigma\, dA = \frac{My}{I}\, dA.$$

La energía interna de deformación en esta fibra es

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}P\delta &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{My}{I}\, dA\right)\left(\frac{My}{I}\frac{dx}{E}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{My}{I}\right)^2 \frac{dA\, dx}{E}.\end{aligned} \tag{b}$$

La energía interna de deformación para el segmento dx es la suma de la energía de deformación en todas las fibras de ese segmento

$$\begin{aligned}dU &= \tfrac{1}{2}\int_{-c_b}^{+c_t}\left(\frac{My}{I}\right)^2 \frac{dA\, dx}{E}\\ &= \tfrac{1}{2}\frac{M^2\, dx}{EI^2}\int_{-c_b}^{+c_t} y^2\, dA\\ &= \tfrac{1}{2}\frac{M^2\, dx}{EI}.\end{aligned} \tag{c}$$

La energía de deformación para toda la viga se determina sumando la energía de deformación para cada segmento dx sobre la longitud L. Esto es

$$U = \int dU = \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2\, dx}{EI} \tag{13.3}$$

La ecuación (13.3) determina la energía interna de deformación por flexión. Conociendo ésta, ahora podemos calcular las deflexiones mediante el método del trabajo real.

EJEMPLO 13.2 Calcular la deflexión en B, en la Fig. 13.9 bajo la fuerza $P = 24$ klb. La viga tiene un momento de inercia $I = 360$ plg^4, y $E = 30\,000$ klb/plg^2.

SOLUCION El trabajo externo es $\frac{1}{2}P\Delta_B$. La energía interna de deformación puede calcularse a partir de la ecuación (13.3). El momento flexionante interno en el segmento AB es diferente al del segmento BC. Por consiguiente, la ecuación (13.3) puede usarse separadamente para cada segmento.

Según la Fig. 13.9 (b),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M_1 = 14.4x_1.$$

La energía de deformación en el segmento AB es

$$U_{AB} = \int_0^8 \frac{M_1^2\,dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^8 (14.4x_1)^2\,dx,$$

$$U_{AB} = \frac{17\,695}{EI}. \tag{a}$$

Según la Fig. 13.9 (c),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M_2 = 9.6x_2.$$

La energía de deformación en el segmento BC es

$$U_{BC} = \int_0^{12} \frac{M_2^2\,dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^{12} (9.6x_2)^2\,dx, \tag{b}$$

$$U_{BC} = \frac{26{,}542}{EI}.$$

La energía de deformación para toda la viga es

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{17\,695}{EI} + \frac{26\,542}{EI},$$

$$U = \frac{44{,}237}{EI}. \tag{c}$$

La deflexión en el punto B puede determinarse como

Trabajo externo = energía interna de deformación

$$\tfrac{1}{2}P\Delta = U,$$

$$\tfrac{1}{2}(24)\Delta_B = \frac{(44\,237)(1\,728)}{(360)(30\,000)},$$

$$\Delta_B = 0.59 \text{ plg.}$$ ■

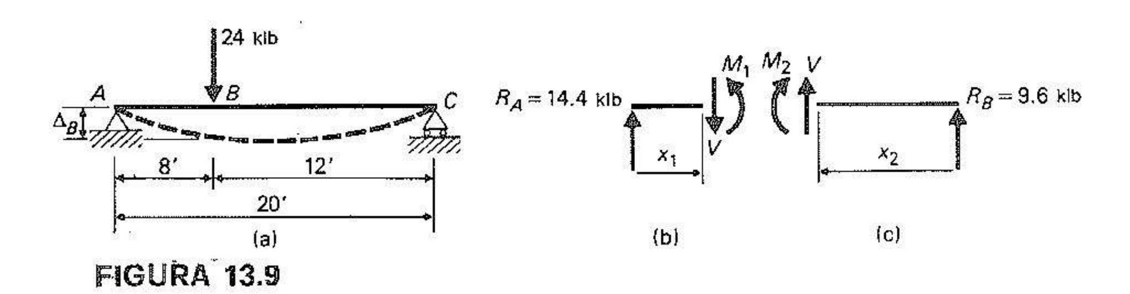
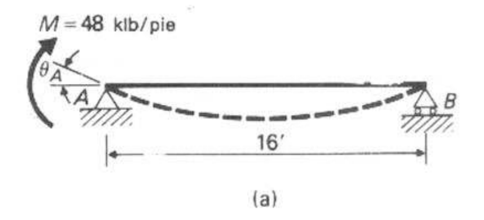
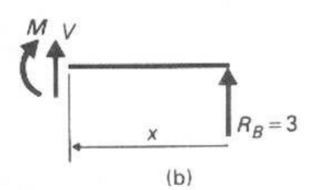


FIGURA 13.9

EJEMPLO 13.3 Determinar la pendiente en el extremo A de la viga indicada en la Fig. 13.10. El momento de inercia de la viga es $I = 200$ plg^4, y $E = 30\ 000$ klb/plg^2.



(a)



(b)

FIGURA 13.10

SOLUCION El trabajo es, o bien, una fuerza por una distancia, o un par por el ángulo de rotación. En esta solución, el trabajo externo es un par por el ángulo de rotación, y puede calcularse como $\frac{1}{2}M\theta_A$. La energía interna de deformación se calcula a partir de la ecuación (13.3). Aquí solamente se necesita un solo segmento ya que la ecuación para el momento flexionante interno no cambia desde B hasta A. Según la Fig. 13.10 (b),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = 3x.$$

Según ec. (13.3),

$$U = \int_B^A \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^{16} \frac{(3x)^2\,dx}{2EI},$$

$$U = \frac{6{,}144}{EI}.$$

La rotación en A puede determinarse como

$$\text{Trabajo externo} = \text{energía interna de deformación}$$

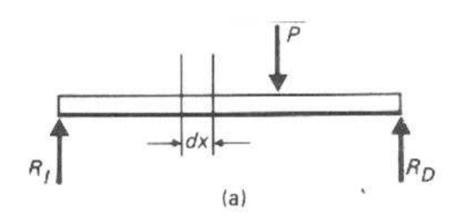
$$\tfrac{1}{2}M\theta = U,$$

$$\tfrac{1}{2}(48)\theta = \frac{6\ 144(144)}{(200)(30\ 000)},$$

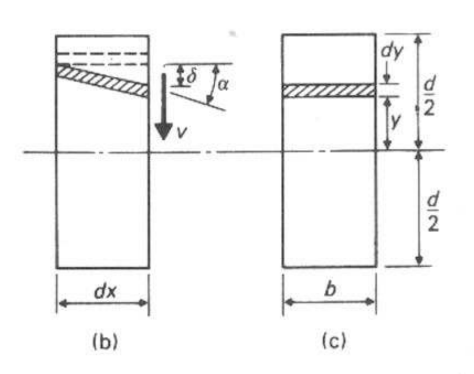
$$\theta = 0.006\ \text{rad}. \quad ■$$

13.5 Energía de deformación para cargas cortantes

La influencia del esfuerzo cortante sobre la deflexión de la viga es de muy pequeña magnitud, y por consiguiente se desprecia en la determinación de pendientes y deflexiones. Si queremos calcular la contribución de los esfuerzos cortantes a la deformación total de una viga, los métodos energéticos proporcionan una técnica muy útil. Sin embargo, debería notarse que la expresión para la energía de deformación depende de la forma de la sección. Es decir, diferentes formas de sección transversal darán diferentes expresiones para la energía de deformación.



(a)



(b) (c)

FIGURA 13.11

La Fig. 13.11 (a) indica una viga de sección transversal rectangular. Las cargas externas producen una fuerza cortante interna V. El esfuerzo cortante no está distribuido uniformemente sobre la sección transversal, sino que varía según la ecuación (5.2) como $\tau = VQ/Ib$. Consideremos una fibra, tal como la indicada en la Fig. 13.11 (b). El trabajo que se realiza mientras que la fibra de longitud dx está siendo distorsionada es

$$\text{Trabajo} = \tfrac{1}{2}v\delta = \tfrac{1}{2}(\tau\,dA)\alpha\,dx. \tag{a}$$

El movimiento δ es igual a $\alpha\,dx$ ya que los ángulos son pequeños, y sen $\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.

El área dA es igual a $b\,dy$, según la Fig. 13.11(c). El ángulo α representa la deformación unitaria por cortante, y según la ecuación (3.2),

$\alpha = \tau/G$. El trabajo hecho sobre esta sola fibra puede representarse, entonces, como

$$\text{Trabajo} = \tfrac{1}{2}(\tau b\, dy)\left(\frac{\tau}{G}\right) dx$$

$$= \frac{b\tau^2}{2G}\, dx\, dy. \tag{b}$$

La ecuación (b) da la energía de deformación para un solo elemento, situado a una distancia y del eje neutro. El esfuerzo cortante τ puede expresarse mediante la ecuación (5.2) como $\tau = VQ/Ib$. El momento estático Q del área que queda sobre la fibra es

$$Q = b\left(\frac{d}{2} - y\right)\left\{y + \left[\frac{(d/2) - y}{2}\right]\right\} = \frac{b(d^2 - 4y^2)}{8}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación (b) nos da

$$\text{Trabajo} = \frac{bV^2(d^2 - 4y^2)^2}{128I^2G}\, dx\, dy. \tag{c}$$

El trabajo para el segmento dx se determina sumando la ecuación (c) para todas las fibras que existen en dx. Esto se convierte en

$$\text{Trabajo} = \frac{bV^2\, dx}{128I^2G}\int_{-d/2}^{+d/2} (d^2 - 4y^2)\, dy$$

$$= \frac{bd^5V^2}{240I^2G}\, dx. \tag{d}$$

Sustituyendo $I = \frac{1}{12}bd^3$ en la ecuación (d), y reconociendo que $A = bd$, encontramos

$$\text{Trabajo} = \frac{1.2V^2\, dx}{2AG}. \tag{e}$$

El trabajo es la energía interna de deformación. Integrando la ecuación (e) sobre la longitud, obtenemos

$$U = \int_0^L \frac{1.2V^2\, dx}{2AG}. \tag{13.4}$$

Para cualquier forma de sección transversal, la ecuación (13.4) puede escribirse como

$$U = K\int_0^L \frac{V^2\, dx}{2AG}. \tag{13.5}$$

El factor K puede deducirse para cualquier sección transversal de una manera semejante. Para un círculo, $K = 10/9$ y para una vigueta de acero de patín ancho, K es, aproximadamente, igual a 1, si se toma como A el área del alma solamente.

13.6 Energía de deformaciones para cargas de torsión

La Fig. 13.12 indica una flecha circular sujeta a un par de torsión, T. El trabajo externo involucra el movimiento del par T a través de la rotación θ. El trabajo externo es $\frac{1}{2}T\theta$.

La energía interna de deformación dU para un segmento dx en la

Fig. 13.12 (b) es

$$dU = \tfrac{1}{2}T\phi.$$

La ecuación (3.3) da el ángulo de torsión de una cara con respecto a la otra, como

$$\phi = \frac{T\,dx}{GJ}.$$

La energía de deformación para el segmento *dx* es

$$dU = \tfrac{1}{2}T\left(\frac{T\,dx}{GJ}\right),$$

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{T^2\,dx}{GJ}.$$

La energía de deformación en toda la longitud de la flecha se obtiene sumando la energía de deformación para cada segmento. Esto se convierte en

$$U = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2GJ}. \qquad (13.6)$$

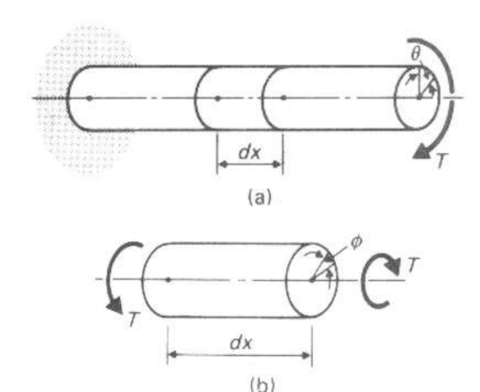


FIGURA 13.12

EJEMPLO 13.4 Determinar el ángulo de torsión, θ_C, en el extremo libre *C* de la flecha indicada en la Fig. 13.13. La flecha maciza *AB* tiene un diámetro de 200 mm y la flecha maciza *BC* tiene un diámetro de 120 mm. El par de torsión aplicado es de 300 N · m. Supóngase que $G = 80$ GPa.

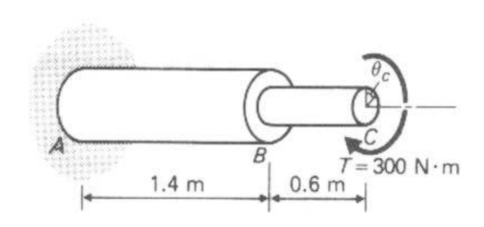


FIGURA 13.13

SOLUCION El Trabajo externo es $\tfrac{1}{2}T\theta$. La energía interna de deformación para los segmentos *AB* y *BC* debe calcularse separadamente debido a la variación de *J*:

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \int_A^B \frac{T^2\,dx}{2GJ} + \int_B^C \frac{T^2\,dx}{2GJ},$$

$$U = \frac{T^2L_{AB}}{2GJ_{AB}} + \frac{T^2L_{BC}}{2GJ_{BC}}$$

$$U = \frac{(300)^2(1.4)}{(2)(80\times10^9)\left(\frac{\pi}{2}\right)(100\times10^{-3})^4} + \frac{(300)^2(0.6)}{(2)(80\times10^9)\left(\frac{\pi}{2}\right)(60\times10^{-3})^4},$$

$$U = 0.00501 + 0.0166,$$

$$U = 0.0216\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

La rotación en el punto *C* puede determinarse como,

Trabajo externo = energía interna de deformación

$$\tfrac{1}{2}M\theta_C = U,$$

$$\tfrac{1}{2}(300)\theta_C = 0.0216,$$

$$\theta_C = 0.000144\ \text{rad},$$

$$\theta_C = 0.000144\left(\frac{360}{2\pi}\right) = 0.0083°. \quad ■$$

13.7 Limitaciones del método del trabajo real

En las secciones 13.3 a 13.6 se describieron métodos para calcular la energía de deformación en miembros sujetos a los principales tipos de carga. Las ecuaciones para la energía interna de deformación U son generales, y pueden usarse con cualquiera de los métodos energéticos.

El método del trabajo real se usó para ilustrar aplicaciones de la energía de deformación. Aunque los conceptos del trabajo real son útiles, su aplicación se limita a unas cuantas situaciones especiales.

El trabajo es una fuerza por una distancia, o un par por el ángulo de rotación. Por consiguiente, este método es solamente válido para encontrar una deflexión o una rotación en la dirección de la fuerza o el par. Todos los ejemplos de las secciones 13.3 a 13.6 cumplieron esta condición. Sin embargo, si queremos la deformación en un lugar diferente de donde se aplica la carga, el método no es válido. Además, si se aplican simultáneamente sobre un miembro más de una carga externa, aparecerá más de una incógnita Δ o θ, en la expresión para el trabajo externo, y la solución es imposible de calcular.

Los conceptos de trabajo y energía discutidos en las secciones de la 13.1 a la 13.6 son la base de todas las técnicas energéticas usadas para calcular pendientes y deflexiones. Sin embargo, las limitaciones de la técnica del trabajo real nos impulsan a adaptar los conceptos y deducir otros métodos energéticos relacionados que no sean tan limitados en su aplicación.

En este capítulo se discuten dos de los métodos energéticos más populares. La sección B describe el método del trabajo virtual. Este método versátil es una técnica conveniente para determinar la pendiente o la deflexión en cualquier lugar de un miembro. La sección C describe la aplicación del teorema de Castigliano para obtener pendientes y deflexiones.

Problemas

Resolver los problemas siguientes por el método del trabajo y energía.

13.1 Determinar la deflexión vertical en C de la armadura indicada en la Fig. P13.1. El área de la sección transversal del miembro AC es de 6×10^{-4} m^2 y la del miembro BC es de 12×10^{-4} plg^2. Supóngase que E = 200 GPa.

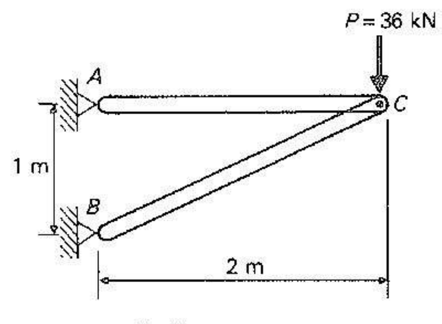


FIGURA P13.1

13.2 Calcular la deflexión horizontal en C de la armadura indicada en la Fig. P13.2. El miembro AC tiene como área de su sección transversal 2 plg^2, y el miembro BC tiene una área de 3 plg^2. Supóngase que $E = 30\,000$ klb/plg^2.

13.3 Calcular la deflexión horizontal de la junta C de la Fig. P13.3. El área de la sección transversal de todos los miembros es de 10×10^{-4} m^2. Supóngase que $E = 200$ GPa.

13.4 Determinar la deflexión vertical en C de la armadura de la Fig. P13.4. El área de la sección transversal de cada miembro es de 3 plg^2. Supóngase que $E = 30 \times 10^3$ klb/plg^2.

13.5-13.7 **Determinar la deflexión vertical bajo la carga aplicada P en las vigas de las Figs. P13.5-P13.7. Dar las respuestas en función de EI.**

FIGURA P13.2

FIGURA P13.3

FIGURA P13.4

FIGURA P13.5

FIGURA P13.6

FIGURA P13.7

FIGURA P13.8

FIGURA P13.9

FIGURA P13.10

13.8-13.9 Para las vigas de las Figs. P13.8 y P13.9, determinar la rotación de la viga en el punto A debida al par aplicado. Dar las respuestas en función de EI.

13.10 Determinar el ángulo total de torsión para la flecha de la Fig. P13.10. La flecha maciza AB tiene un diámetro de 120 mm y el módulo de elasticidad a cortante es $G = 40$ GPa; y la flecha maciza BC tiene un diámetro de 80 mm y un módulo de elasticidad a cortante $G = 80$ GPa.

13.11 Determinar el ángulo de torsión para el tubo de acero estándar de 6 plg de diámetro de la Fig. P13.11.

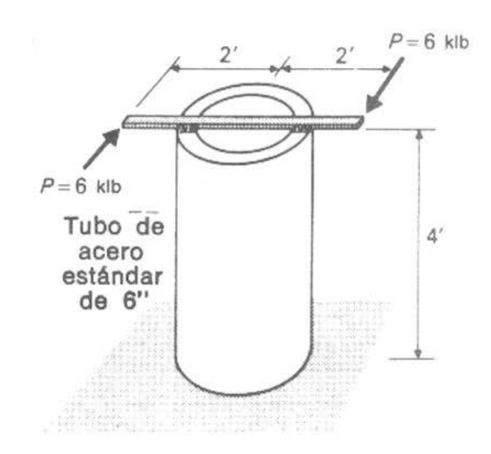


FIGURA P13.11

SECCION B Trabajo virtual

13.8 Método del trabajo virtual

El método del trabajo virtual es la más útil y versátil de las técnicas energéticas. Puede usarse para determinar deformaciones en cualquier lugar de una estructura, que sean causadas por cualquier tipo o combinación de cargas. La única limitación de la teoría es que debe poderse aplicar el principio de superposición.

La palabra "virtual" significa que existe en efecto, pero no de hecho. Una fuerza virtual es una fuerza ficticia que se incorpora en algún punto de la estructura. El trabajo virtual es el movimiento de esta fuerza virtual a través de una distancia. Al aplicar el método del trabajo virtual, la distancia es generalmente el desplazamiento real de la estructura bajo sus cargas reales aplicadas.

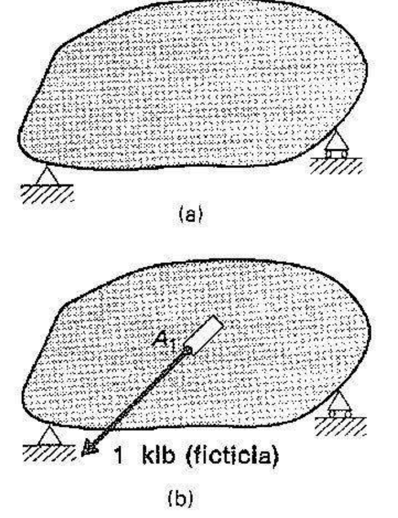
Puede usarse el principio de la conservación de la energía para las fuerzas virtuales como

$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{Energía de deformación virtual interna} \tag{13.7}$$

La aplicación de la ecuación (13.7) puede verse a partir de la Fig. 13.14. Supóngase una carga unitaria ficticia unida a la estructura en el punto A, como se indica en la Fig. 13.14 (b). También suponemos que no se presenta ninguna otra fuerza. Ahora consideremos la Fig. 13.14 (c). Se quita la fuerza unitaria virtual, pero se aplican las cargas reales. El punto A se desplazará hasta A_2 debido a las deformaciones estructurales producidas por las cargas reales. La deflexión en A en la dirección de la carga virtual es Δ_A. La ecuación (13.7) se convierte en

$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{Energía de deformación virtual interna}$$

$$1 \cdot \Delta_A = \sum f\delta, \tag{13.8}$$



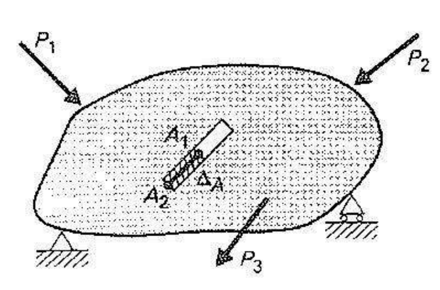



FIGURA 13.14

donde

1 = la fuerza virtual unitaria,
Δ_A = la deflexión real del punto A en la dirección de la fuerza virtual,
f = las fuerzas internas en las fibras debidas a la fuerza virtual,
δ = deformaciones reales internas en las fibras debidas a las cargas reales.

Las diversas secciones siguientes ilustran la aplicación de la ecuación (13.7) para cargas axiales, de flexión, y de torsión.

13.9 Trabajo virtual para cargas axiales

El método del trabajo virtual se aplica fácilmente a estructuras articuladas cuyos miembros están cargados axialmente, tal como la armadura de la Fig. 13.15. El miembro izquierdo de la ec. (13.8) es el trabajo virtual externo de la carga unitaria virtual de la Fig. 13.15 (b) por la deflexión real Δ_C de la Fig. 13.15 (a). El miembro derecho de la ec. (13.8) es la energía de deformación interna total. Es el producto de la fuerza interna producida por la carga virtual y la deformación producida por las cargas reales sobre cada miembro. El trabajo puede ser positivo o negativo. Si la fuerza y la deformación tienen el mismo sentido, el trabajo es positivo. Si tienen sentidos opuestos, el trabajo es negativo.

La Fig. 13.16 (a) indica cualquier barra y su fuerza virtual. En sistemas cargados axialmente, a la fuerza virtual interna sobre la barra se le representa con la letra u. El cambio en longitud debido a las cargas reales es δ. La deformación, δ, se determina según la ec. (2.4) como $\delta = PL/AE$.

La deformación de cualquier punto sobre una estructura articulada puede determinarse entonces según

$$1 \times \Delta = \sum u\left(\frac{PL}{AE}\right), \qquad (13.9)$$

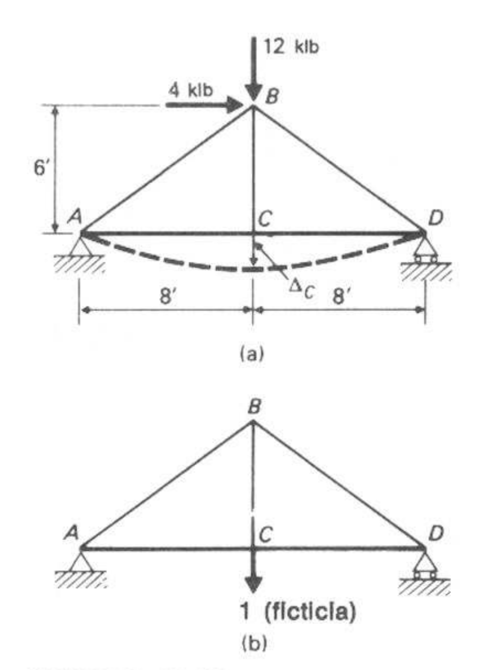


FIGURA 13.15

donde

1 = carga virtual, lb o N,
Δ = deflexión plg, o m,
u = fuerza virtual sobre una barra interna resultante de la carga virtual, lb o N,
P = fuerza interna en la barra producida por las cargas reales, lb o N,
L = longitud de la barra, plg o m,
A = área de la sección transversal de la barra, plg² o m²,
E = módulo de elasticidad, lb/plg² o Pa.

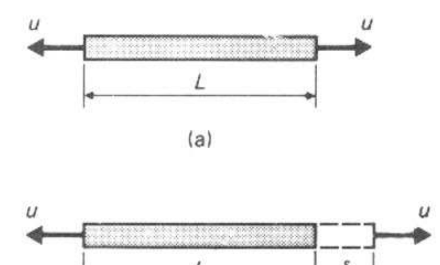


FIGURA 13.16

El procedimiento general para la solución de este tipo de problema involucra los pasos siguientes:

1. Se aplica la carga virtual unitaria en el lugar y en la dirección de la deformación deseada.

2. Para cada barra de la estructura se calcula la fuerza interna producida por la carga unitaria. Es importante determinar si la barra está a tensión o a compresión. Es útil designar las fuerzas de tensión como positivas y las de compresión como negativas.
3. Se aplican las cargas reales sobre la estructura, y se calculan las fuerzas internas en las barras producidas por estas cargas. De nuevo, es útil considerar la tensión como positiva, y la compresión como negativa.
4. Se incorporan los valores obtenidos en la ec. (13.9), y se determina la deflexión.

EJEMPLO 13.5 Determinar la deflexión vertical en C, de la armadura de la Fig. 13.15. El área de la sección transversal de todos los miembros es de 2 plg². Supóngase que $E = 30\,000$ lb/plg².

SOLUCION La Fig. 13.15 (b) lleva a cabo el paso 1 del procedimiento descrito anteriormente. La fuerza interna en cada miembro se calcula mediante estática. Los resultados se dan en la columna encabezada con u en la Tabla 13.1.

Calculamos las fuerzas internas en las barras para el sistema de carga de la Fig. 13.15 (a) por estática (paso 3). Los resultados se indican en la tabla 13.1 bajo la columna encabezada con P.

Tabla 13.1

Miembro	u	P	L	$u\left(\frac{PL}{AE}\right)$
AB	$-\frac{5}{6}$	-7.5	10	$+\frac{62.5}{AE}$
AC	$+\frac{2}{3}$	$+10.0$	8	$+\frac{53.3}{AE}$
BC	$+1$	0	6	0
BD	$-\frac{5}{6}$	-12.5	10	$+\frac{104.2}{AE}$
CD	$+\frac{2}{3}$	$+10.0$	8	$+\frac{53.3}{AE}$
				$\sum +\frac{273.3}{AE}$

Finalmente, se aplica la ecuación (13.9).

$$1 \cdot \Delta_C = \sum u\left(\frac{PL}{AE}\right),$$

$$\Delta_C = \frac{(273.3)(12)}{(2)(30\,000)},$$

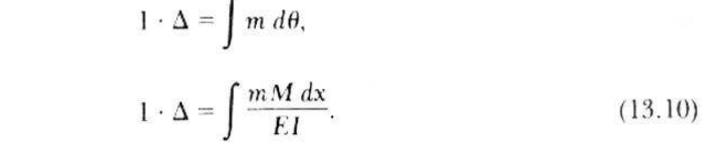
$$\Delta_C = 0.055 \text{ plg.}$$ ■

13.10 Trabajo virtual para cargas de flexión

La deflexión de una viga puede determinarse mediante el método del trabajo virtual. Para obtener la deflexión en cualquier punto específico, se aplica una carga unitaria ficticia en ese punto, en la dirección de la deflexión deseada. A partir de esta carga ficticia resultante un momento virtual interno. El producto de este momento por la rotación de la sección sobre la que ocurre el momento es el trabajo virtual interno.

La Fig. 13.17 (a) indica una viga y su carga real. Supongamos que queremos determinar la deflexión en el punto D. Aplicamos una fuerza ficticia unitaria en D, como se indica en la Fig. 13.17 (b). Esta carga ficticia produce un momento m en cada lugar x, como se indica en la Fig. 13.17 (c). Las cargas reales hacen que la cara vertical sobre la cual actúa m gire un ángulo $d\theta$. La ecuación (7.3) indica que $d\theta = Mdx/EI$. El trabajo interno para la viga es $\int m\, d\theta$.

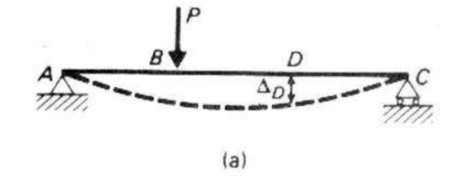
La deflexión de una viga se calcula mediante

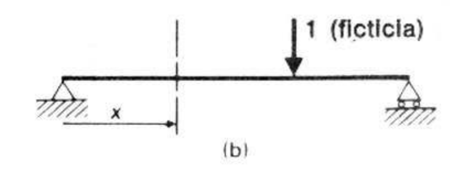


$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{trabajo virtual interno},$$

$$1 \cdot \Delta = \int m\, d\theta,$$

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{mM\, dx}{EI}. \qquad (13.10)$$





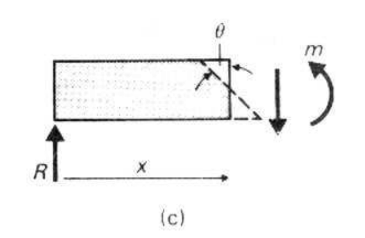


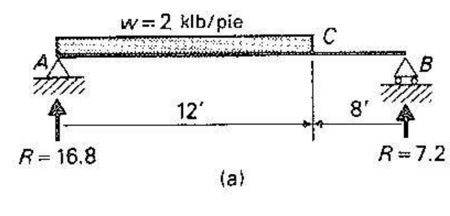
FIGURA 13.17

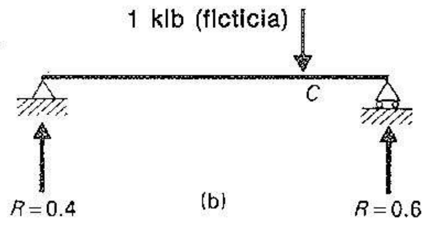
El procedimiento para calcular la deflexión de una viga mediante el trabajo virtual es como sigue:

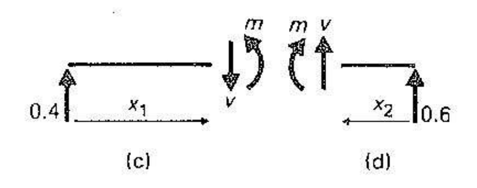
1. Se aplica una carga unitaria ficticia a la viga descargada en el lugar donde se desea la pendiente o la deflexión.
2. Se calculan las reacciones para esta carga virtual. Se corta la viga en las secciones necesarias, se traza un diagrama de cuerpo libre, y se escriben las ecuaciones para el momento interno m como función de la variable x.
3. Se aplican las cargas reales a la viga. Se calculan las reacciones correspondientes a las cargas reales, se corta la viga en las secciones necesarias, y se escriben las ecuaciones para M como funciones de la variable x.
4. Se incorporan las ecuaciones en la ec. (13.10) y se despeja x.

Las secciones "necesarias" de los pasos 2 y 3 son aquellas que aparecen cada vez que el sistema de cargas produce un cambio en la ecuación básica, ya sea de m, o de M.

El ejemplo 13.6 ilustra este procedimiento. Nótese que el trabajo virtual interno puede ser positivo o negativo. El trabajo positivo ocurre cuando el sentido de rotación de m y de $d\theta$ (es decir, de M) tienen la misma dirección. El trabajo negativo ocurre cuando el sentido rotacional de m y de M es opuesto.







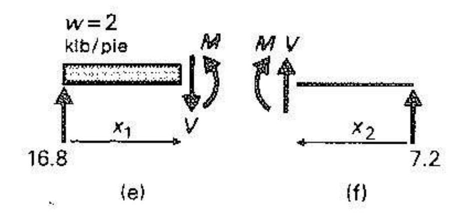


FIGURA 13.18

EJEMPLO 13.6 Determinar la deflexión vertical en el punto C de la viga indicada en la Fig. 13.18 (a). Dar la respuesta en función de EI.

SOLUCION La Fig. 13.18 (b) indica la carga virtual en C. Las reacciones de la viga, de las Figs. 13.18 (a) y (b) se calculan por estática. Obsérvese que las ecuaciones para m y M tienen los mismos límites en las secciones AC y BC. Por consiguiente, solamente se necesitan dos diagramas de cuerpo libre para cada viga. Las ecuaciones para m y M se determinan así:

Segmento AC:
Según la Fig. 13.18 (c),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad m = 0.4x_1;$$

Según la Fig. 13.18 (e):

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \quad M = 16.8x_1 - (2)(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right),$$

$$M = 16.8x_1 - x_1^2.$$

Segmento BC:
Según la Fig. 13.18 (d):

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad m = 0.6x_2;$$

Según la Fig. 13.18 (f),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = 7.2x_2.$$

Incorporando estas ecuaciones en la ecuación (13.10), tenemos

$$1 \cdot \Delta_C = \int_A^C \frac{mM\,dx}{EI} + \int_B^C \frac{mM\,dx}{EI}$$

$$\Delta_C = \int_0^{12} \frac{(0.4x_1)(16.8x_1 - x_1^2)\,dx_1}{EI} + \int_0^{8} \frac{(0.6x_2)(7.2x_2)\,dx_2}{EI}.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos

$$\Delta_C = \frac{1{,}797}{EI} + \frac{737}{EI},$$

$$\Delta_C = \frac{2{,}534}{EI}. \quad ■$$

La pendiente en cualquier lugar de una viga puede determinarse mediante el trabajo virtual. El ejemplo 13.7 ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 13.7 Determinar la pendiente en el punto C de la viga indicada en la Fig. 13.18 (a). Dar la respuesta en función de EI.

SOLUCION Queremos una rotación angular, que es la pendiente de la viga. Por consiguiente, debemos aplicar un par ficticio unitario en el lugar deseado. Puede surgir la pregunta de si el par unitario se toma en el sentido del giro de las manecillas del reloj, o en el sentido contrario. Para fines ilustrativos apliquemos el par unitario en el sentido del giro de las manecillas del reloj. Notemos otra vez que se necesitan las ecuaciones para m y M en los segmentos AC y BC.

Segmento AC:
La Fig. 13.19 (c) indica un diagrama de cuerpo libre de una sección en AC Nótese que el momento virtual interno m se indica en la dirección positiva del momento. Si indicamos los momentos internos m y M siempre en la misma dirección (positiva) (véase la sección 4.4), el signo algebraico de la ecuación estática tendrá consistencia con todos los signos.
Según la Fig. 13.19 (c),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad m = -\tfrac{1}{20}x_1;$$

Según la Fig. 13.19 (e),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = 16.8x_1 - x_1^2.$$

Segmento BC:
Según la Fig. 13.19 (d),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad m = +\tfrac{1}{20}x_2;$$

Según la Fig. 13.19 (f),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = 7.2x_2.$$

Incorporando estas ecs. en la ec. (13.10), tenemos

Trabajo virtual externo = trabajo virtual interno,

$$1 \cdot \theta_C = \int_B^C \frac{mM\,dx}{EI} + \int_B^C \frac{mM\,dx}{EI}$$

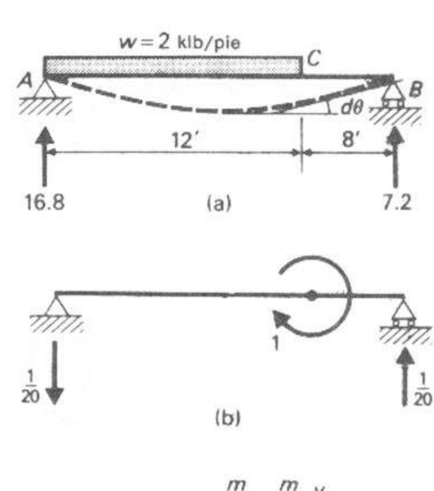
$$\theta_C = \int_0^{12} \frac{(-\frac{1}{20}x_1)(16.8x_1 - x_1^2)\,dx_1}{EI} + \int_0^{8} \frac{(\frac{1}{20}x_2)(7.2x_2)\,dx_2}{EI}.$$

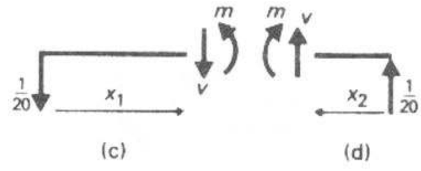
Resolviendo esta ecuación, obtenemos,

$$\theta_C = -\frac{224.6}{EI} + \frac{61.4}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{163.2}{EI}.$$

El signo menos indica que el sentido rotacional de la pendiente es opuesto al del par unitario ficticio de la Fig. 13.19 (b). Si se eligen m y M en forma consistente en las direcciones positivas, y escribimos las ecuaciones estáticas





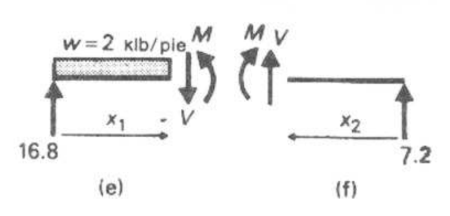
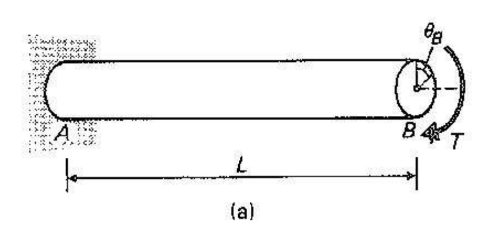
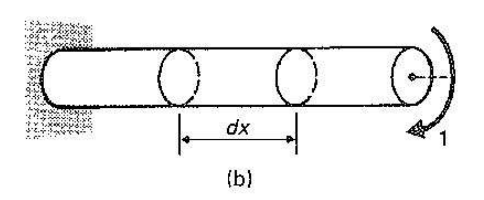


FIGURA 13.19

para estas direcciones del momento, el signo algebraico de la respuesta identificará si el movimiento es en la misma dirección (+), o en la dirección opuesta (−), de la del par unitario aplicado. Aquí, la rotación verdadera en el punto C es en sentido contrario al del giro de las manecillas del reloj, opuesta a la rotación del par unitario ficticio. ▪

13.11 Trabajo virtual para cargas de Torsión





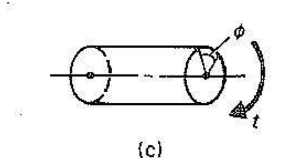
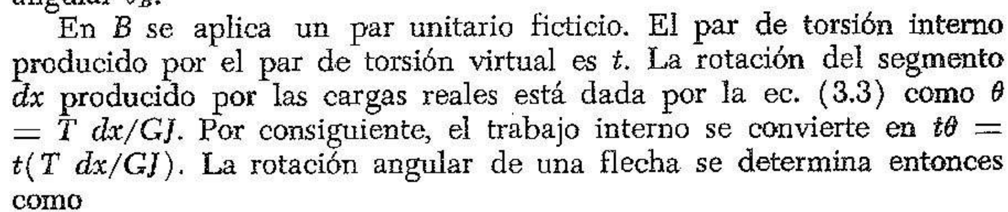
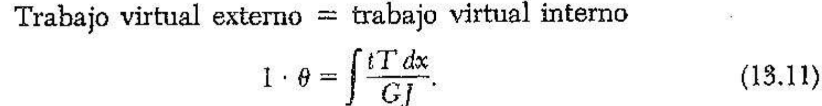


FIGURA 13.20

La solución de problemas que involucran cargas de torsión es análoga a la de las cargas de flexión. La Fig. 13.20 (a) indica una flecha circular sujeta a un par de torsión aplicado, T. Queremos calcular la rotación angular θ_B.



En B se aplica un par unitario ficticio. El par de torsión interno producido por el par de torsión virtual es t. La rotación del segmento dx producido por las cargas reales está dada por la ec. (3.3) como $\theta = T\,dx/GJ$. Por consiguiente, el trabajo interno se convierte en $t\theta = t(T\,dx/GJ)$. La rotación angular de una flecha se determina entonces como



Trabajo virtual externo = trabajo virtual interno

$$1 \cdot \theta = \int \frac{tT\,dx}{GJ}. \tag{13.11}$$

13.12 Trabajo virtual para cargas combinadas

El método del trabajo virtual es muy versátil. Cuando una estructura tiene cargas aplicadas que dan por resultado una combinación de fuerzas internas axiales, de momentos, o de pares de torsión, pueden usarse las ecuaciones de la (13.9) a la (13.11) en el mismo tipo de combinación. En tanto que las ecuaciones para las fuerzas internas y pares internos de las cargas reales y ficticias sean consistentes, el método permite calcular la deformación. El ejemplo 13.8 ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 13.8 Un tubo de acero estándar de 4 plg de diámetro, AB, de 4 pies de longitud, está empotrado en A (véase la Fig. 13.21). Una barra de acero circular de 1 plg de diámetro, y de 2 pies de longitud está soldada al extremo libre del tubo AB. Determinar la deflexión vertical del punto C cuando se aplica una fuerza de 400 lb.

SOLUCION Se aplica una carga unitaria ficticia en C, como se indica en la Fig. 13.21 (b). El tubo AB se sujeta tanto a una carga de torsión, como a un momento flexionante. La barra BC se sujeta a flexión solamente.

La deflexión en C se determina mediante:

Trabajo virtual externo = trabajo virtual interno;

$$1 \cdot \Delta_C = \int_{BC} \frac{mM\,dx}{EI} + \int_{AB} \frac{mM\,dx}{EI} + \int_{AB} \frac{tT\,dx}{GJ}. \tag{a}$$

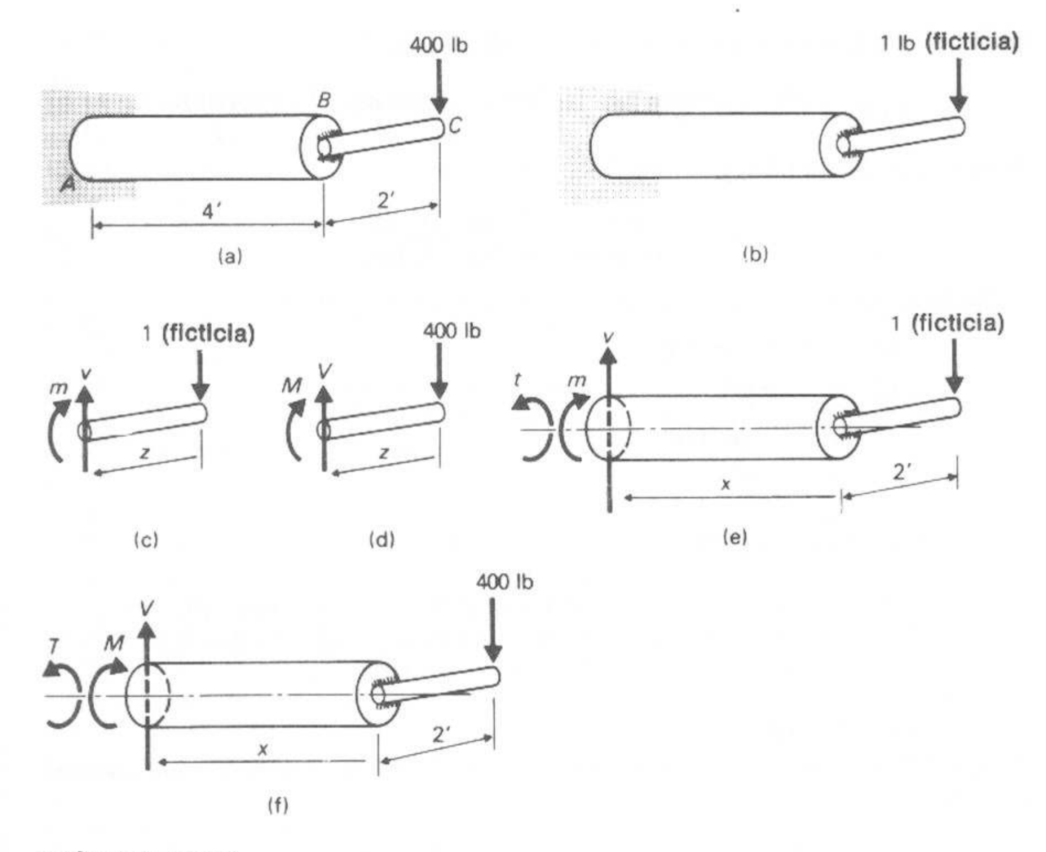


FIGURA 13.21

Los valores para m, M, t, y T se obtienen a partir de los diagramas de cuerpo libre de la Fig. 13.21.

Brazo BC:
Según la Fig. 13.21 (c) y (d);

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad m = -1z;$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = -400z.$$

Tubo AB:
Según la Fig. 13.21 (e) y (f):

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad m = -1x,$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = -400x;$$

$$\sum T_{\text{corte}} = 0: \qquad t = (1)(2) = 2,$$

$$\sum T_{\text{corte}} = 0: \qquad T = (400)(2) = 800.$$

Sustituyendo estos valores en la ec. (a), obtenemos

$$1 \cdot \Delta_C = \int_0^2 \frac{(-z)(-400z)\,dz}{EI} + \int_0^4 \frac{(-x)(-400x)\,dx}{EI} + \int_0^4 \frac{(2)(800)\,dx}{GJ}.$$

Despejando, encontramos

$$\Delta_C = \frac{3\,200}{3EI_{\text{barra}}} + \frac{25\,600}{3EI_{\text{tubo}}} + \frac{6\,400}{GJ_{\text{tubo}}}. \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo los valores siguientes en la ec. (b), obtenemos

$$E = 30 \times 10^6 \ \text{lb/plg}^2$$
$$I_{\text{tubo}} = 15.16 \ \text{plg}^4,$$
$$G = 12 \times 10^6 \ \text{lb/plg}^2$$
$$J_{\text{tubo}} = 30.32 \ \text{plg}^4,$$
$$I_{\text{barra}} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi}{64} \ \text{plg}^4,$$

$$\Delta_C = \frac{(3\,200)(1\,728)}{(3)(30 \times 10^6)(\pi/64)} + \frac{(25\,600)(1\,728)}{(3)(30 \times 10^6)(15.16)} + \frac{(6\,400)(1\,728)}{(12 \times 10^6)(30.32)}$$
$$\Delta_C = 1.252 + 0.032 + 0.030$$
$$\Delta_C = 1.314 \ \text{plg}$$

La deflexión total de 1.314 plg es el resultado de las tres componentes siguientes:

Flexión de la barra BC = 1.252 plg,
Flexión del tubo AB = 0.032 plg,
Torsión del tubo AB = 0.030 plg. ■

Problemas

Resolver los siguientes problemas por el método del trabajo virtual. Cuando no se den valores numéricos, dejar las respuestas en función de AE, EI o GJ.

13.12 Determinar la deflexión horizontal en la junta C para la armadura del ejemplo 13.5.

13.13 Determinar la deflexión horizontal en C de la armadura indicada en la Fig. P13.13. El área de cada miembro a tensión es de 10×10^{-4} plg², y el área de cada miembro a compresión es de 15×10^{-4} plg². Supóngase que $E = 200$ GPa.

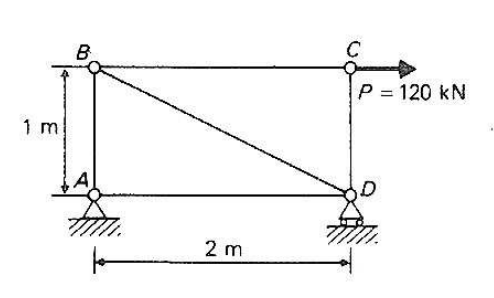


FIGURA P13.13

13.14 Determinar la deflexión horizontal del rodillo en B de la armadura tipo tijera indicada en la Fig. P13.14. Existen articulaciones en todas las juntas. Los miembros AD y BC se traslapan, pero no están unidos entre sí. El área de la sección transversal de cada miembro a tensión es de 2 plg², y el área de cada miembro a compresión es de 3 plg². Supóngase que $E = 30\,000$ klb/plg².

13.15 Determinar la deflexión vertical en E para la armadura del problema 13.14.

13.16 Determinar la deflexión vertical en la junta C de la armadura indicada en la Fig. P13.16. El área de cada miembro a tensión es de 2 plg², y el área de cada miembro a compresión es de 3 plg². Supóngase que $E = 30\,000$ klb/plg².

13.17 Determinar el movimiento horizontal del rodillo en E para la armadura de la Fig. P13.16.
13.18 Determinar el movimiento vertical del punto C de la armadura del problema 13.4.
13.19 Determinar la deflexión vertical del punto C de la viga del problema 13.5.
13.20 Determinar la pendiente en A para la viga del problema 13.5.
13.21 Determinar la deflexión vertical del punto A para la viga del problema 13.9.
13.22 Determinar la deflexión vertical en B para la viga de la Fig. P13.22.
13.23 Determinar la deflexión vertical en D para la viga del problema 13.22.
13.24 Determinar la pendiente en D para la viga del problema 13.22.
13.25 Determinar la deflexión vertical del centro de la viga de la Fig. P13.25.
13.26 Determinar la deflexión vertical del punto A de la viga del problema 13.25.
13.27 Determinar la pendiente en A de la viga del problema 13.25.
13.28 Determinar el movimiento horizontal del rodillo en C del marco indicado en la Fig. P13.28. El marco tiene un EI constante. Dar la respuesta en función de EI, y despreciar las deformaciones producidas por las fuerzas axiales.
13.29 Determinar la pendiente en A del marco del problema 13.28.
13.30 Resolver el problema 13.28, pero incluir la deformación debida a las cargas axiales. Supóngase $I = 2\,700$ plg^4, $A = 28$ plg^2, y $E = 30\,000$ klb/plg^2.
13.31 La Fig. P13.31 indica un marco rígido continuo que tiene un EI constante. Despreciando el efecto de las fuerzas axiales, determinar el movimiento horizontal del rodillo en H.
13.32 En el problema 13.31, determinar el movimiento vertical del marco en el centro de DE.
13.33 Resolver el problema 13.31, incluyendo el efecto de las fuerzas axiales. Supóngase $I = 600 \times 10^{-6}$ m^4, $A = 600 \times 10^{-4}$ m^2, y $E = 200$ GPa.
13.34 Determinar el movimiento horizontal del rodillo en C del arco semicircular de la Fig. P13.34. Despreciar la deformación producida por las fuerzas axiales, y supóngase que EI = constante.
13.35 Resolver el problema 13.34, incluyendo las fuerzas axiales.
13.36 Determinar la deflexión vertical del arco semicircular de la Fig. P13.36. Despreciar la deformación debida a las fuerzas axiales. Supóngase que EI = constante.

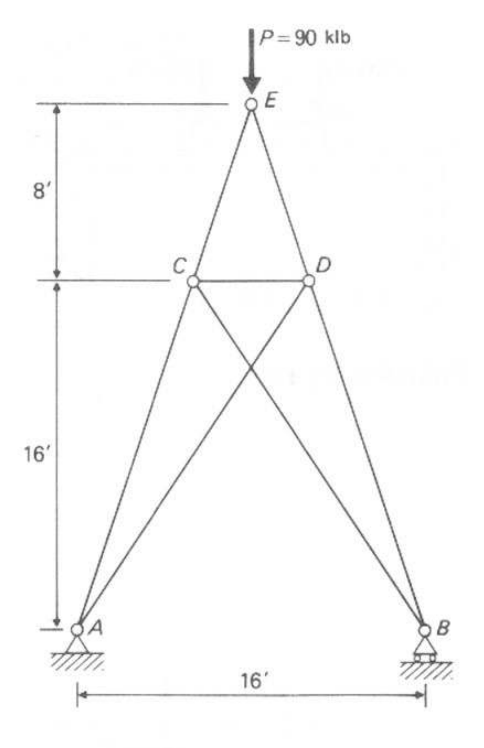


FIGURA P13.14

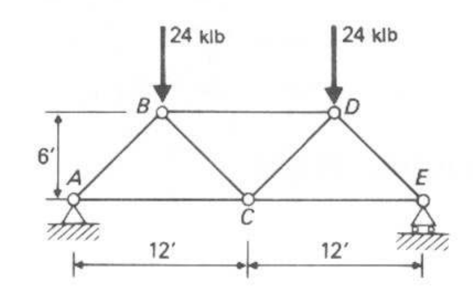


FIGURA P13.16

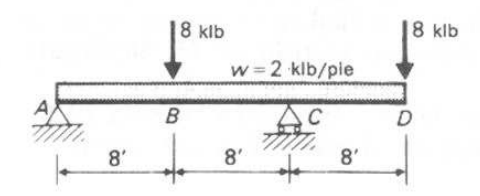


FIGURA P13.22

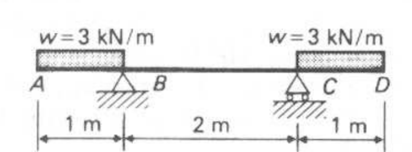


FIGURA P13.25

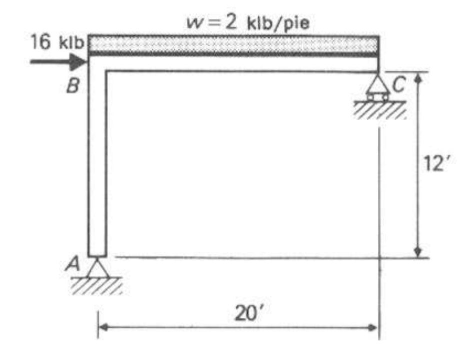


FIGURA P13.28

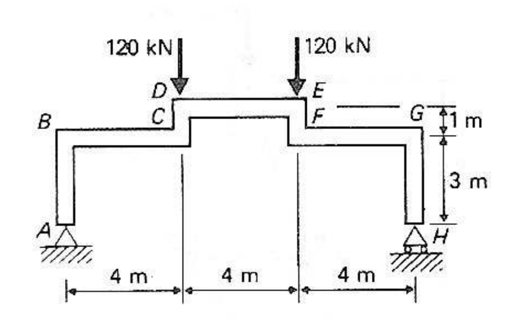


FIGURA P13.31

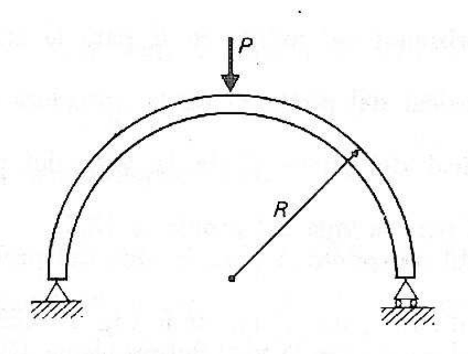


FIGURA P13.34

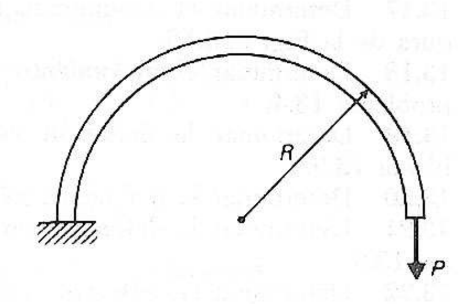


FIGURA P13.36

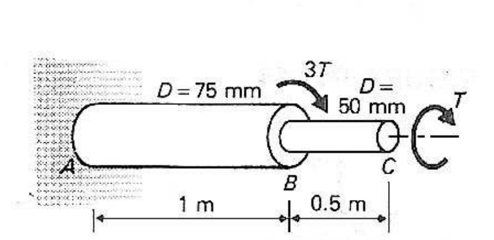


FIGURA P13.39

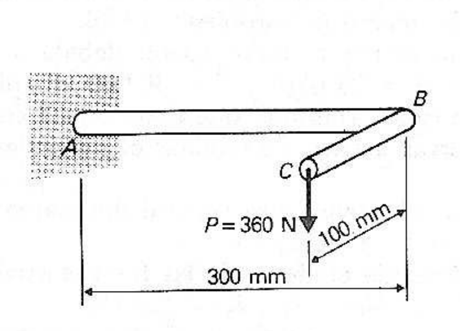


FIGURA P13.41

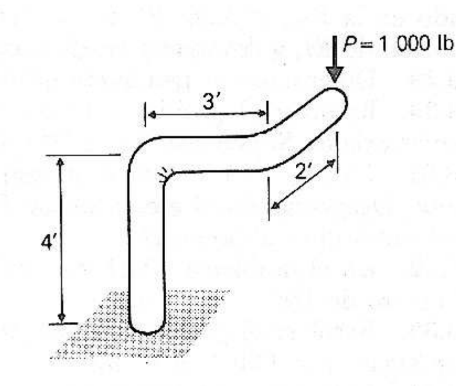


FIGURA P13.43

13.37 Determinar la deflexión horizontal para el arco del problema 13.36.
13.38 Resolver el ejemplo ilustrativo 3.2 usando el método del trabajo virtual.
13.39 Calcular el ángulo de torsión en el extremo C de la flecha de la Fig. P13.39. Supóngase que el par de torsión $T = 200$ N · m, y que $G = 79$ GPa.
13.40 Resolver el problema 3.63 usando el método del trabajo virtual.
13.41 Determinar la deflexión vertical del extremo C del marco indicado en la Fig. P13.41. La flecha tiene un diámetro de 40 mm. Supóngase que $E = 200$ GPa, y que $G = 80$ GPa.
13.42 Determinar la rotación en C para el marco del problema 13.41.
13.43 Un tubo de acero estándar de 6 plg está soldado a un marco, como se indica en la Fig. P13.43. Determinar la deflexión vertical en D. Supóngase que $E = 30 \times 10^6$ lb/plg^2.
13.44 Determinar la rotación en el extremo D del marco del problema 13.43.
13.45 Determinar el movimiento horizontal en el plano Y-Z del marco del problema 13.43.

Teorema de Castigliano SECCION C

13.13 Teoría y aplicación del teorema de Castigliano

A Alberto Castigliano, un ingeniero de ferrocarriles italiano, se le acreditan contribuciones significativas en el campo del análisis estructural. En 1876 publicó dos teoremas. Lo que se describe como el primer teorema de Castigliano proporciona una técnica para determinar las pendientes y las deflexiones de vigas y marcas utilizando derivadas parciales de la energía interna de deformación. Su segundo teorema, generalmente llamado el método del mínimo trabajo, es un método poderoso para resolver problemas que involucran estructuras estáticamente indeterminadas; particularmente, estructuras articuladas de un número grande de indeterminación.

El primer teorema de Castigliano da por resultado una técnica que incorpora los principios de la energía de deformación descritos anteriormente en este capítulo. Es notablemente semejante al método del trabajo virtual. Podemos demostrar el primer teorema considerando la viga de la Fig. 13.22. Las fuerzas P_1 y P_2 se han aplicado a la viga gradual y simultáneamente. Por el principio del trabajo real,

Trabajo externo = energía interna de deformación

$$\frac{P_1\Delta_1}{2}+\frac{P_2\Delta_2}{2}=U. \qquad \text{(a)}$$

Supóngase ahora que P_1 se incrementa en dP_1, mientras que P_2 se mantiene constante, como se indica en la Fig. 13.22 (b). La deflexión en 1 se incrementa en $d\Delta_1$, y la deflexión en 2 también se incrementa. La rapidez de variación de Δ_1 con respecto a P_1 es

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial P_1}\cdot dP_1=d\Delta_1. \qquad \text{(b)}$$

Análogamente, si queremos el cambio de deflexión en 2 que es producido por el cambio dP_1, encontramos

$$\frac{\partial\Delta_2}{\partial P_1}\cdot dP_1=d\Delta_2. \qquad \text{(c)}$$

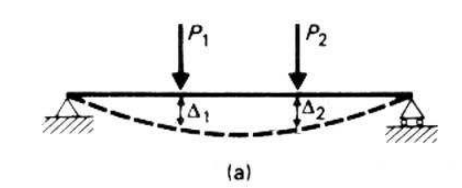
El cambio total, en la ec. (a), por la adición de dP_1 es

$$\frac{d\Delta_1\,dP_1}{2}+P_1\,d\Delta_1+P_2\,d\Delta_2=dU=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1. \qquad \text{(d)}$$

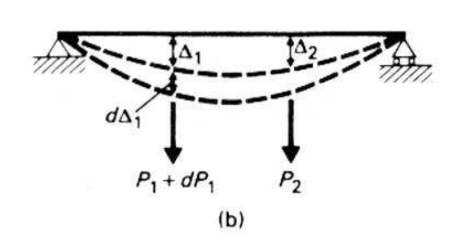
El término $(d\Delta_1\,dP_1/2)$ se desprecia debido a que es un término de orden superior. La ecuación (d) puede entonces simplificarse usando las ecs. (b) y (c) hasta obtener:

$$P_1\left(\frac{\partial\Delta_1}{\partial P_1}\right)dP_1+P_2\left(\frac{\partial\Delta_2}{\partial P_1}\right)dP_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=P_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial P_1}+P_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial P_1}. \qquad \text{(e)}$$



(a)



(b)

FIGURA 13.22

Pero según la ec. (a)

$$U = \frac{P_1\Delta_1}{2} + \frac{P_2\Delta_2}{2}. \tag{a}$$

Tomando la derivada parcial con respecto a P_1, obtenemos

$$2\frac{\partial U}{\partial P_1} = \Delta_1 \frac{\partial P_1}{\partial P_1} + P_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial \Delta_2}{\partial P_1}. \tag{f}$$

Restando la ec. (f) de la ec. (e), encontramos

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1}. \tag{13.12}$$

La ec. (13.12) es la expresión matemática del primer teorema de Castigliano, que puede enunciarse como sigue:

"La deflexión de una estructura en el punto de aplicación y en la misma dirección de una fuerza aplicada se obtiene calculando la primera derivada parcial de la energía de deformación total interna, con respecto a la carga aplicada."

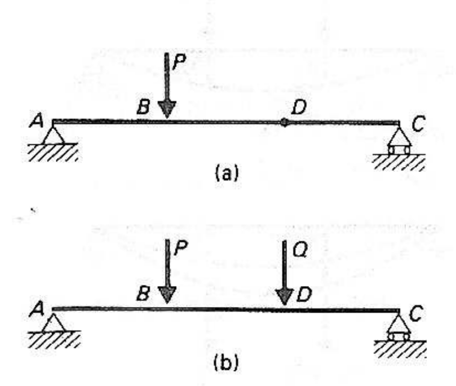


FIGURA 13.23

Notamos que la deducción del teorema de Castigliano usó el principio del trabajo real. Consecuentemente, las limitaciones descritas en la sección 13.7 se aplican también. Por ejemplo, en la Fig. 13.23 (a), podemos determinar la deflexión en B, que está directamente debajo de la carga P, pero no podemos determinar la deflexión en ningún otro lugar, tal como el punto D. Este problema puede resolverse fácilmente incorporando una carga ficticia Q en el lugar donde se necesita la deflexión. Para completar la solución, hacemos $Q = O$, y obtenemos las deflexiones deseadas.

El teorema de Castigliano puede usarse para calcular tanto pendientes como deflexiones. Cuando se desea hallar pendientes, incorporamos un par ficticio en vez de una fuerza ficticia.

El procedimiento para obtener deformaciones estructurales mediante el teorema de Castigliano es como sigue

1. Se traza la estructura y sus cargas. Si existe una fuerza concentrada (o un par real) en el lugar donde se desea hallar la deflexión (o la pendiente), dejamos esa fuerza (o el par) en función de la variable P. Si no existe alguna fuerza (o un par) en el lugar deseado, incorporamos una fuerza ficticia Q (o un par ficticio Q) en ese punto. Nótese que siempre podemos ser consistentes en nuestras soluciones indicando las cargas reales por sus valores numéricos e incorporando siempre una fuerza ficticia Q (o un par ficticio Q) en el lugar donde se desea hallar la deflexión (o la pendiente).
2. Se escriben las ecuaciones para la energía interna de deformación U (véanse las secciones 13.3-13.6) en función de los valores numéricos de las cargas reales y de la carga ficticia Q.
3. Se determina la deflexión (o la pendiente) tomando la derivada parcial de la ecuación para la energía de deformación, con respecto a Q. Es decir, δ (o θ) $= \partial U/\partial Q$.

El paso 3 lo podríamos efectuar de cualquiera de dos formas. Primero podríamos escribir la ecuación para U elevando al cuadrado los términos P, M o T, de las ecuaciones (13.2), (13.3), o (13.6). La operación requiere elevar al cuadrado las expresiones para P, M o T y después integrar, y después calcular finalmente la derivada parcial. Esto es a menudo, tedioso.

Una forma más conveniente de efectuar el paso 3 es diferenciar primero bajo el signo integral, y después integrar. Cuando hacemos esto, encontramos la deflexión usando la energía de deformación según las ecuaciones (13.2), (13.3) y (13.6), para obtener

$$\Delta(\text{o } \theta) = \int P\left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)\frac{dx}{AE}; \tag{13.13}$$

$$\Delta(\text{o } \theta) = \int M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)\frac{dx}{EI}; \tag{13.14}$$

$$\Delta(\text{o } \theta) = \int T\left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)\frac{dx}{GJ}. \tag{13.15}$$

Nótese la semejanza entre estas tres ecuaciones y las ecuaciones (13.9), (13.10) y (13.11).

Los ejemplos siguientes ilustran el cálculo de pendientes y deflexiones mediante el teorema de Castigliano.

EJEMPLO 13.9 Resolver el ejemplo 13.6 mediante el teorema de Castigliano.

SOLUCION Aplicamos una carga ficticia Q en el punto C, como se indica en la Fig. 13.24 (a). Las reacciones de la viga serán entonces $R_I = 16.8 + 0.4Q$, y $R_D = 7.2 + 0.6Q$.

A partir de los diagramas de cuerpo libre de la Fig. 3.24 (b), determinamos M:

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = (16.8 + 0.4Q)x_1 - x_1^2. \tag{a}$$

Según la Fig. 13.24 (c),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = (7.2 + 0.6Q)x_2. \tag{b}$$

La energía interna de deformación por flexión está dada por la ec. (13.3) como $U = \int M^2\, dx/2EI$. Aplicando el teorema de Castigliano diferenciando primero bajo el signo integral, da

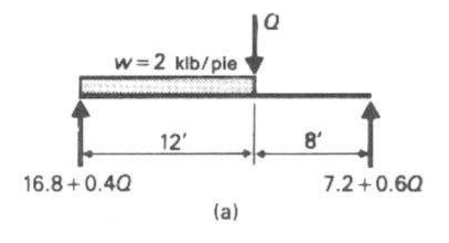
$$\Delta_C = \int_A^C M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)\frac{dx}{EI} + \int_B^C M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)\frac{dx}{EI}. \tag{c}$$

Tomando la derivada parcial de la ec. (a), con respecto a Q, da

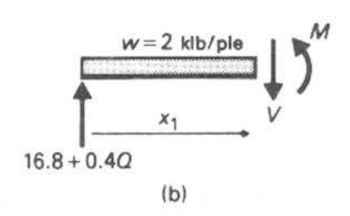
$$\frac{\partial M}{\partial Q} = 0.4x_1. \tag{d}$$

Tomando la derivada parcial de la ec. (b), con respecto a Q, da

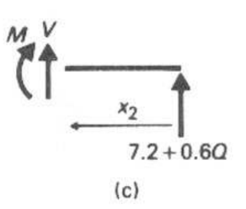
$$\frac{\partial M}{\partial Q} = 0.6x_2. \tag{e}$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 13.24

Incorporando las ecs. (a), (b), (d), y (e), en la ec. (c), obtenemos

$$\Delta_C = \int_0^{12} [(16.8 + 0.4Q)x_1 - x_1^2](0.4x_1)\frac{dx_1}{EI} + \int_0^8 [(7.2 + 0.6Q)x_2](0.6x_2)\frac{dx_2}{EI}. \quad \text{(f)}$$

Integrando la ec. (f) y haciendo $Q = 0$, obtenemos

$$\Delta_C = \frac{2{,}534}{EI}.$$

Podemos observar la correlación entre la ec. (f) con $Q = 0$ y la ecuación correspondiente para el trabajo virtual, en el ejemplo 13.6. ■

EJEMPLO 13.10 Resolver el ejemplo 13.8 mediante el teorema de Castigliano.

SOLUCION Aplicamos una carga ficticia Q en el punto C, como se indica en la Fig. 13.25 (a). La Fig. 13.25 (b) y (c) indica el diagrama de cuerpo libre para los segmentos BC y AB.

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = -(400z + Qz). \quad \text{(a)}$$

Según la Fig. 13.24 (c),

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad M = -(400x + Qx), \quad \text{(b)}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0: \qquad T = 800 + 2Q. \quad \text{(c)}$$

La energía interna de deformación por flexión y torsión se obtiene a partir de una combinación de las ecs. (13.3) y (13.6), como

$$U = \int_C^B \frac{M^2\,dx}{2EI} + \int_B^A \frac{M^2\,dx}{2EI} + \int_B^A \frac{T^2\,dx}{2GJ}. \quad \text{(d)}$$

Aplicando el teorema de Castigliano y diferenciando bajo la integral da

$$\Delta_C = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_A^B \frac{M(\partial M/\partial Q)\,dx}{EI} + \int_B^A \frac{M + (\partial M/\partial Q)\,dx}{EI} + \int_B^A \frac{T(\partial T/\partial Q)\,dx}{GJ}. \quad \text{(e)}$$

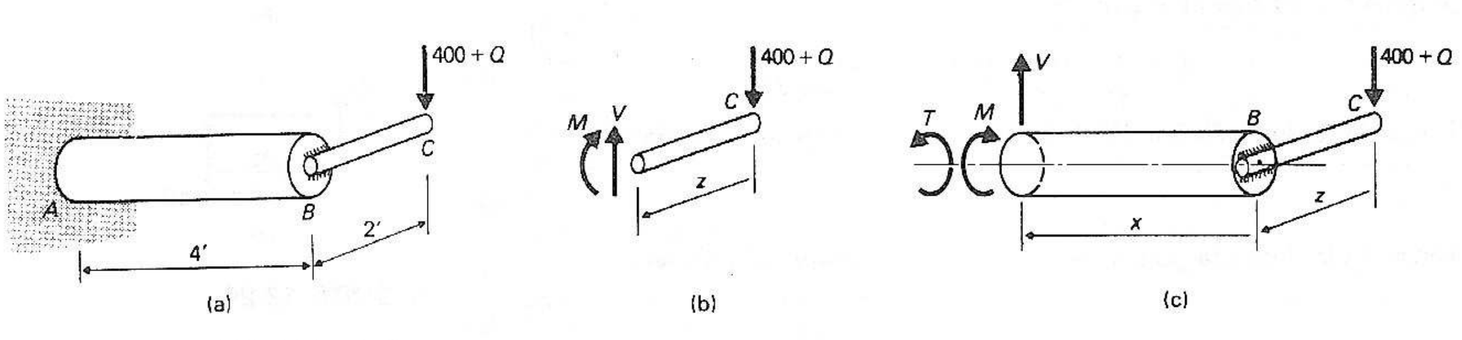


FIGURA 13.25

Las derivadas parciales con respecto a Q, en las ecs. (a), (b) y (c) son

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -z, \tag{f}$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -x, \tag{g}$$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = -2. \tag{h}$$

Incorporando las ecs. (a), (b), (c), (f), (g) y (h) en la ecuación (e), da

$$\Delta_C = \int_0^2 \frac{-(400z + Qz)(-z)\,dz}{EI} + \int_0^4 \frac{-(400x + Qx) - x\,dx}{EI} + \int_0^4 \frac{(800 + 2Q)(2)\,dx}{GJ}. \tag{i}$$

De nuevo notemos la correlación entre la ec. (i) y la ecuación correspondiente en el ejemplo 13.8, cuando $Q = 0$.

Haciendo $Q = 0$, integrando, y despejando, encontramos

$$\Delta_C = \frac{3\,200}{3EI_{\text{tubo}}} + \frac{25\,600}{3EI_{\text{tubo}}} + \frac{6\,400}{GJ_{\text{tubo}}}. \quad ■$$

Problemas

Resolver los problemas siguientes mediante el teorema de Castigliano:

13.46 Problema 13.2.
13.47 Problema 13.13.
13.48 Problema 13.16.
13.49 Problema 13.17.
13.50 Problema 13.22.
13.51 Problema 13.23.
13.52 Problema 13.24.
13.53 Problema 13.25.
13.54 Problema 13.28.
13.55 Problema 13.31.
13.56 Problema 13.34.
13.57 Problema 13.36.
13.58 Problema 13.42.
13.59 Problema 13.41.
13.60 Problema 13.43.

Cargas dinámicas SECCION D

13.14 Cargas de impacto

Los métodos presentados en este capítulo, así como en todo el libro, han supuesto cargas estáticas. Es decir, que las cargas se han aplicado tan gradualmente que se despreciaron las fuerzas dinámicas de impacto. Los métodos energéticos nos permiten conocer algo de las diferencias significativas entre las cargas estáticas y las cargas dinámicas.

Consideremos la barra de la Fig. 13.26 (a). Un peso W cae desde una altura h y choca contra el extremo de la barra. La barra se alargará inicialmente una cantidad $\delta_{máx}$. Después vibrará durante un tiempo antes de llegar al reposo con una deflexión δ_{est}. La deflexión estática es $\delta_{est} = WL/AE$.

La deflexión máxima producida por el impacto del cuerpo que cae es $\delta_{máx}$, y puede calcularse mediante:

$$\text{Trabajo externo} = \text{energía de deformación interna};$$

$$W(h + \delta_{máx}) = \tfrac{1}{2}P\delta_{máx}. \tag{a}$$

La deflexión máxima $\delta_{máx}$ refleja la fuerza dinámica P dentro de la barra, y $\delta_{máx} = P_{máx}L/AE$. La ec. (a) puede reescribirse como

$$\frac{\delta^2_{máx}AE}{2L} - W(h + \delta_{máx}) = 0$$

$$\delta^2_{máx} - 2\delta_{est}\ (h + \delta_{máx}) = 0 \tag{b}$$

Resolviendo la ec. (b), encontramos:

$$\delta_{máx} = \delta_{est.} + \sqrt{\delta^2_{est.} + 2\delta_{est.}\,h} \tag{c}$$

donde

$$\delta_{máx} = \frac{PL}{AE},$$

$$\delta_{est.} = \delta\,\frac{WL}{AE}.$$

La ec. (c) puede reescribirse en función de la fuerza dinámica en la barra sustituyendo los términos δ por su fuerza. Esto da por resultado

$$P = W + W\sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{est.}}} \tag{d}$$

El término $W\sqrt{1 + 2h/\delta_{est}}$ representa el efecto amplificador (por impacto) de la carga dinámica sobre el miembro.

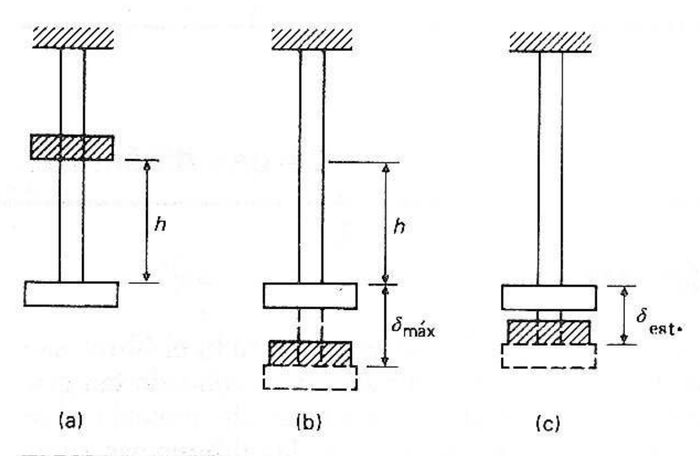


FIGURA 13.26

Anteriormente se indicó el método para calcular el efecto de cargas de impacto para un miembro cargado axialmente. La relación entre el trabajo externo y la energía interna de deformación es válida para cualquier tipo de carga. La componente de la energía de deformación debe reflejar el tipo de respuesta interna a la cual está sujeto el miembro.

Al calcular el efecto de la carga de impacto sobre una estructura, suponemos lo siguiente:

a) El material se comporta elásticamente. Es decir, no se disipa ninguna energía durante el impacto.
b) Se desprecia la inercia de la estructura.

El factor de impacto es la relación entre la carga dinámica y la carga estática. Cuando se aplica una carga tan lenta y gradualmente que la deflexión máxima es igual a la deflexión estática, el factor de impacto es 1.0. Sin embargo, si se aplica la carga bruscamente, el miembro se deformará hasta un valor máximo, vibrará por algún tiempo, y finalmente llegará al reposo. La carga de impacto, como se mide por el factor de impacto, se reflejará en unas fuerzas resistentes mayores, inicialmente, en el miembro.

EJEMPLO 13.11 Un peso de 500 kg de masa se desliza hacia abajo sin fricción por una barra de acero de 10 mm de diámetro y de 1 m de longitud, una distancia de 10 mm. En su caída se detiene mediante un cabezal fijo a la barra (véase la Fig. 13.27). Determinar:

a) El esfuerzo y la deflexión en la barra, bajo condiciones estáticas. Es decir, cuando el peso es bajado gradual y lentamente sin impacto, hasta que llega al reposo.
b) La deflexión máxima si el peso se suelta desde la altura de 10 mm.
c) El esfuerzo máximo si el peso se suelta desde 10 mm.
d) El factor de impacto.

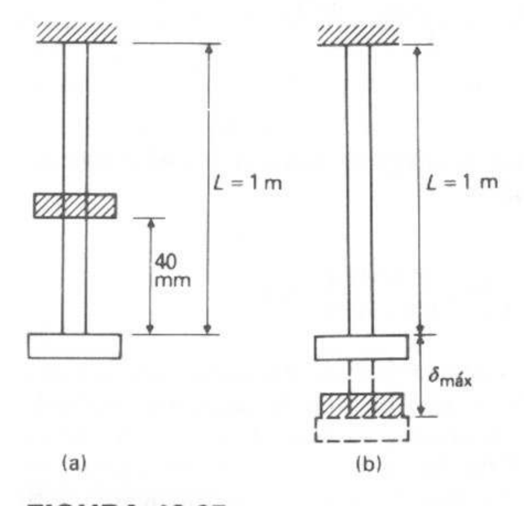


FIGURA 13.27

SOLUCION El peso de un cuerpo es su fuerza en kg · m/s². La masa puede convertirse en la fuerza equivalente recordando que $F = ma = (500 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 4\,905$ N. El esfuerzo y la deformación unitaria bajo condiciones estáticas son, entonces:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4\,905}{\pi(5\times 10^{-3})^2} = 62.45 \text{ MPa};$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \sigma\frac{L}{E} = \frac{(62.45\times 10^6)(1)}{(200\times 10^9)} = 0.3123\times 10^{-3} \text{ m}.$$

La deflexión máxima cuando se suelta el peso puede calcularse a partir del principio del trabajo y la energía, como sigue:

Trabajo externo = energía interna de deformación:

$$W(h+\delta_{\text{máx}}) = \tfrac{1}{2}P\delta_{\text{máx}} = \frac{\delta^2_{\text{máx}}AE}{2L};$$

$$(4\,905)(10\times 10^{-3}+\delta_{\text{máx}}) = \frac{\delta^2_{\text{máx}}(\pi\times 25\times 10^{-6})(200\times 10^9)}{2(1)};$$

$$49.05 + 4{,}905\delta_{\text{máx}} = 25\pi\times 10^5\delta^2_{\text{máx}}.$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos:

$$\delta_{\text{máx}} = 2.83\times 10^{-3} \text{ m}.$$

Mientras que el sistema se conserve elástico,

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}L}{AE} = \sigma_{\text{máx}}\frac{L}{E}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\delta_{\text{máx}}E}{L} = \frac{(2.83\times 10^{-3})(200\times 10^9)}{1}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 566 \text{ MPa}.$$

El factor de impacto es la razón entre la carga de impacto (o el esfuerzo, o la deflexión) y la carga estática. Aquí,

$$\text{Factor de impacto} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{est}}} = \frac{566 \text{ MPa}}{62.4 \text{ MPa}} = 9.1.$$

Es decir, los esfuerzos máximos son aproximadamente nueve veces más, si el peso se suelta desde una altura de 10 mm en vez de aplicarse gradualmente. El acero debe ser uno de alta resistencia, ya que el acero estructural tiene un esfuerzo de fluencia de 248 MPa. Si se usara acero estructural, se disiparía el exceso de energía y se crearía una deformación permanente. ■

Problemas

13.61 Resolver el ejemplo 13.11 cuando $h = 0$. Es decir, determinar la deflexión máxima, el esfuerzo, y el factor de impacto cuando la carga se aplica bruscamente, en vez de gradualmente.

13.62 ¿Desde qué altura máxima puede caer el peso del ejemplo 13.11 si el esfuerzo máximo no debe exceder de 248 MPa?

13.63 La parte superior de la barra indicada en la Fig. P13.63 tiene una área de sección transversal de 10×10^{-4} m², y la parte inferior tiene una área de 6×10^{-4} m². Un bloque que pesa 3 kg se suelta desde una altura $h = 40$ mm. Determinar

a) La deflexión máxima que ocurre.
b) El esfuerzo máximo.
c) El factor de impacto.

13.64 Determinar el peso máximo que puede soltarse en las barras de la Fig. P13.63 cuando $h = 10$ mm y el esfuerzo no exceda de 248 MPa.

13.65 Un peso de 100 lb se desliza hacia abajo sin fricción por una barra de acero que tiene como área de sección transversal 0.2 plg², como se indica en la Fig. P13.65. Determinar el esfuerzo máximo, la deformación unitaria máxima, y el factor de impacto cuando

a) $h = 0$ pie
b) $h = 1$ pie,
c) $h = 2$ pies.

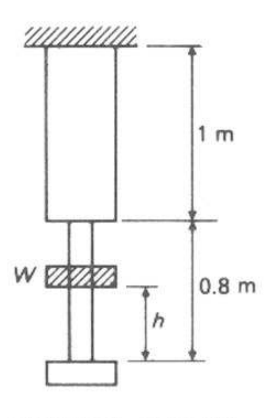


FIGURA P13.63

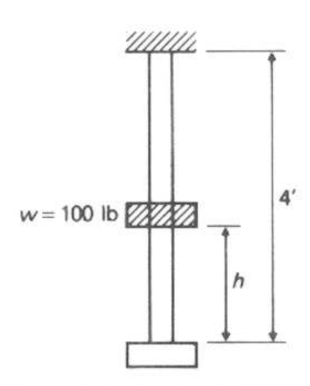


FIGURA P13.65

13.66 Un peso de 10 kg se suelta sobre el extremo de una viga en voladizo, como se indica en la Fig. P13.66. La sección transversal de la viga es rectangular, con $b = 100$ mm, $h = 60$ mm y $E = 80$ GPa. Determinar el esfuerzo máximo, la deflexión máxima, y el factor de impacto cuando

a) $h = 0$ mm,
b) $h = 10$ mm.

13.67 Determinar la altura máxima desde la cual puede soltarse el peso en el problema 13.66 si el esfuerzo máximo no debe exceder de 120 MPa.

13.68 Determinar la altura máxima h, desde la cual puede soltarse el peso de 25 lb si el esfuerzo máximo en la viga de la Fig. P13.68 no debe exceder de 36 klb/plg². La sección transversal de la viga es rectangular, con $b = 4$ plg, $d = 2$ plg y $E = 30 \times 10^6$ lb/plg².

13.69 Determinar el esfuerzo máximo, la deflexión máxima, y el factor de impacto para la viga del problema 13.68 cuando

a) $h = 0$ pies,
b) $h = 1$ pie.

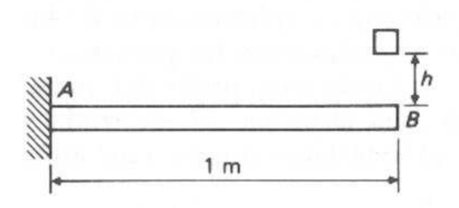


FIGURA P13.66

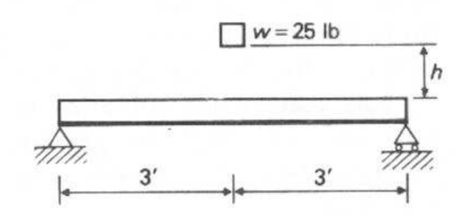


FIGURA P13.68

14

Conexiones

14.1 Introducción

El diseño de los elementos de una máquina, edificio u otra estructura se hace utilizando los principios presentados en los primeros capítulos de este libro. Una vez que se han diseñado, estos elementos deben unirse en varios lugares. La resistencia y los detalles de estas conexiones son algunos de los aspectos más importantes del diseño.

Hay varios métodos comunes para conectar miembros de estructuras metálicas. Pernos de alta resistencia, pernos sin acabado y soldaduras, son los métodos más comunes usados actualmente. Durante muchos años las conexiones remachadas fueron el método predominante usado para unir partes de una estructura. Sin embargo, en años recientes el remachado ha sido reemplazado por otros métodos más económicos. En la actualidad, rara vez se diseñan conexiones remachadas.

Las conexiones a base de pernos de alta resistencia, clasificadas algunas veces como conexiones de tipo fricción, son un método muy común de diseño de juntas. En una conexión de este tipo, pernos de alta resistencia a tensión se insertan en agujeros preperforados y se aprietan. La fuerza de tensión en los pernos comprime las placas de metal con una gran fuerza normal entre ellas. Las cargas aplicadas son resistidas mediante la resistencia al cortante desarrollada entre las placas.

Un tipo diferente de conexiones con pernos basa su resistencia en la transmisión de fuerzas de apoyo entre los pernos y las placas conectadas. En este tipo de junta, se insertan pernos sin acabado en los agujeros perforados de las placas planas y se aprietan. La fuerza de tensión en los pernos es pequeña, de modo que la junta se puede deslizar, produciendo esfuerzos de aplastamiento entre los pernos y las placas. La resistencia de la junta queda determinada por la resistencia al aplastamiento de los pernos sobre las placas y por la resistencia al cortante de los pernos.

Las conexiones soldadas se hacen calentando una parte del metal base con un electrodo, por medio de un arco eléctrico. El electrodo y el metal base se derriten y se mezclan. Al enfriarse queda una junta continua.

Este capítulo dará una introducción a las conexiones soldadas y con pernos. El intento es establecer una base para analizar las conexiones

mediante principios de mecánica. (No discutiremos muchos de los requisitos para estas conexiones. Estos requisitos pueden encontrarse en muchos libros excelentes sobre diseño estructural o diseño de soldaduras).

La Sección A discute conexiones soldadas, y la Sección B cubre conexiones remachadas y con pernos. Aunque reconocemos que las conexiones remachadas ya no son un método común para unir metales, muchas de estas conexiones ocurren en una gran variedad de estructuras existentes. Por consiguiente, se incluye una breve discusión de conexiones remachadas para analizar las capacidades de estas conexiones existentes. Además, el procedimiento para analizar conexiones con pernos es idéntico al de las conexiones remachadas. Unicamente difieren los valores del esfuerzo entre los dos tipos de conexiones.

Este capítulo usa exclusivamente el sistema inglés de unidades. En la actualidad aún no se han establecido valores definidos del SI por las organizaciones responsables. En vez de desarrollar un conjunto de valores de conversión, elegimos usar solamente los valores que comúnmente se encuentran en uso.

Conexiones soldadas SECCION A

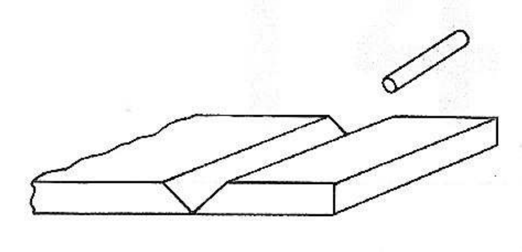
14.2 Conexiones soldadas

Recientemente la soldadura ha llegado a ser el método más común para unir entre sí componentes metálicos de estructuras debido a que las conexiones soldadas son eficientes, limpias y económicas. Además, frecuentemente permiten diseños más económicos pues el proceso de soldadura elimina las adiciones de material necesarias para compensar los agujeros de las conexiones con pernos.

En esta sección no se discutirá el procedimiento, técnicas o aspectos metalúrgicos del proceso de soldadura, sino más bien los factores relacionados con el diseño de conexiones soldadas. Sin embargo, como información básica, se describe brevemente el proceso de soldadura.

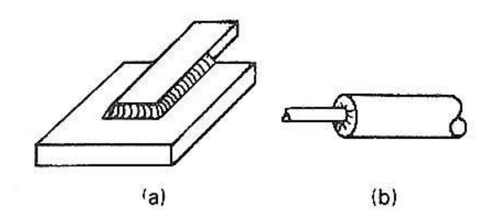
La soldadura por fusión es un proceso para unir metales mediante la aplicación de calor. En la soldadura de arco este calor se produce mediante un arco eléctrico entre los metales que se van a unir y un electrodo. El intenso calor generado por el arco eléctrico funde el metal base de las piezas a soldar y el electrodo; al dejar de aplicar el calor el metal se enfría y se obtiene una conexión continua. La Fig. 14.1 ilustra la formación de una conexión soldada.

El electrodo es una varilla de metal con un recubrimiento que se funde durante el proceso de soldadura aportando así metal a la junta. El recubrimiento al quemarse forma un escudo gaseoso que protege al arco eléctrico de las impurezas de la atmósfera y también actúa como fundente permitiendo que las impurezas floten hasta la superficie del metal fundido. Existen cientos de varillas y revestimientos para satisfacer requisitos muy especiales que han surgido en la industria de la soldadura.



(a) (b) (c)

FIGURA 14.1



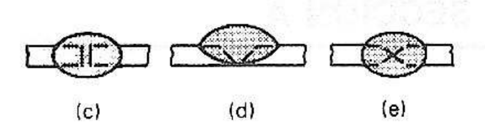


FIGURA 14.2

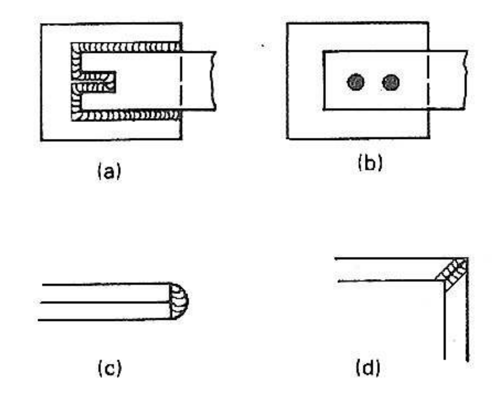


FIGURA 14.3 (a) Soldadura de ranura o de muesca, (b) soldadura de tapón, (c) soldadura de borde, (d) soldadura en esquina.

Hay dos tipos básicos de juntas: soldadas: juntas de traslape y juntas a tope. Una junta de traslape, como la mostrada en la Fig. 14.2 (a), se hace traslapando una placa sobre la otra y colocando un cordón (o filete) de soldadura en el ángulo recto comprendido entre el lado de una placa y la superficie plana de la otra. Los cordones de soldadura que rellenan el ángulo recto entre las superficies, también pueden usarse en superficies curvas, tal como se muestra en la Fig. 14.2 (b).

Las soldaduras a tope se hacen juntando a tope las dos placas y soldando la unión. La Fig. 14.2 (c) muestran una junta a tope de borde cuadrado; las partes (d) y (e) muestran una junta a tope de simple V y de doble V, respectivamente.

Ocasionalmente se describen otros tipos de juntas o soldaduras, pero éstas son simplemente versiones diferentes de las soldaduras a tope o de filete. Por ejemplo, una soldadura de ranura, como la mostrada en la Fig. 14.3 (a) se usa para obtener mayor longitud soldada en una conexión. Las soldaduras de tapón, como la mostrada en la parte (b), se usan para el mismo fin, o para soldar las placas a intervalos.

En la Fig. 14.3 (c) y (d) se muestran soldaduras de borde, o canto, y soldaduras en esquina. Las soldaduras por resistencia (que no se indican) se hacen uniendo las dos placas sin usar una varilla de soldadura. El metal de ambas placas se funde entre sí mediante la aplicación de calor y presión. Las soldaduras por puntos (que no se muestran) son soldaduras cortas, intermitentemente espaciadas, que se usan solamente en conexiones provisionales, como por ejemplo, en piezas que deberían conservarse unidas solamente durante el embarque. Estas soldaduras no se diseñan estructuralmente.

14.3 Diseño de soldaduras

Los ensayos han demostrado que una soldadura a tope, de penetración completa colocada adecuadamente, es tan resistente o más resistente que el metal de las piezas por soldar. Por consiguiente, las soldaduras a tope que generalmente actúan en tensión o en compresión, no se diseñan matemáticamente. Se determina la resistencia de una conexión soldada a tope usando la fórmula $P = \sigma A$, donde A es el área de la sección transversal de la placa más delgada y σ el esfuerzo permisible en las placas.

Por otra parte, las soldaduras de filete, están sometidas a esfuerzos cortantes y deben diseñarse adecuadamente. La resistencia de una soldadura de filete se determina mediante $\tau = P/A$, donde τ es el esfuerzo cortante admisible y A es el área sometida a fuerza cortante. Consideremos la soldadura de filete de la Fig. 14.4 y estudiemos la forma en que falla y los métodos para calcular su resistencia.

El tamaño de una soldadura de filete es el tamaño del cateto, o dimensión a, que se indica en la Fig. 14.4 (c). Se supone que cada cateto es de igual longitud. La corona de la soldadura debería ser ligeramente convexa (Fig. 14.4c). Sin embargo, como las dimensiones de la corona no pueden conocerse, es una práctica conservadora pero común, despreciar la corona en el diseño, y suponer que la soldadura va a lo largo de la superficie recta BDC.

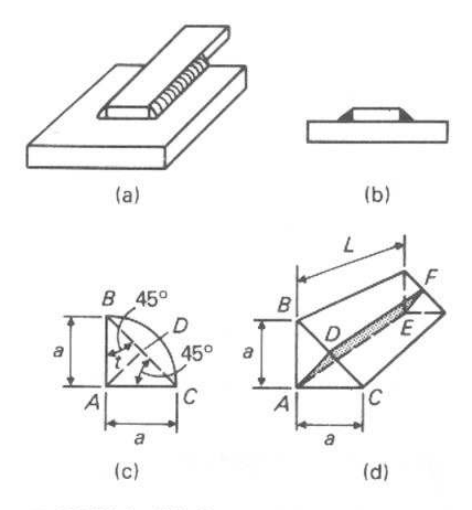


FIGURA 14.4

Una soldadura de filete se supone que falla a lo largo de su menor dimensión, llamada la "garganta" de la soldadura. La garganta es la dimensión t de la Fig. 14.4 (c). El área que queda sujeta a cortante es el área sombreada ADEF de la Fig. 14.4 (d), que se calcula como

$$A = tL = a \operatorname{sen} 45°L = 0.707aL.$$

El esfuerzo cortante admisible para soldaduras de filete es de 0.3 veces el esfuerzo último de tensión del electrodo. Los electrodos se clasifican como E60, E70, E80, etc. El valor numérico es la resistencia última a tensión del metal de soldadura. Los electrodos E70 son los que se usan más comúnmente en trabajo estructural. El esfuerzo cortante admisible para un electrodo E70 es (0.30) (70) = 21 klb/plg².

La resistencia de una soldadura de filete para un electrodo E70 es

$$P = \tau A = (21\ 000)(0.707)aL,$$

$$P = 14\ 850aL, \tag{a}$$

donde

P = fuerza cortante admisible, en lb,
a = tamaño de la soldadura, en plg,
L = longitud de la soldadura, en plg.

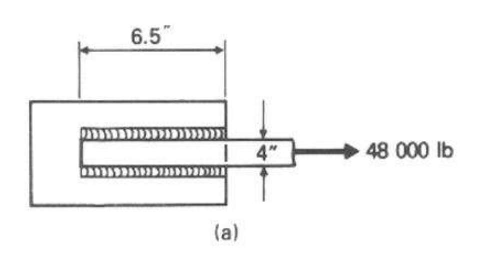
Para una longitud de 1 plg de soldadura, la ec. (a) se escribe como

$$q = 14\ 850a, \tag{14.1}$$

donde

q = carga que puede soportar cada plg de soldadura, en lb/plg,
a = tamaño de la soldadura, en plg.

EJEMPLO 14.1 Determinar la longitud total de soldadura necesaria para resistir la fuerza de 48 000 lb indicada en la Fig. 14.5. Usese una soldadura de ¼ plg.



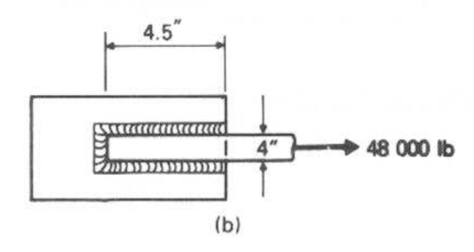


FIGURA 14.5

SOLUCION Una soldadura de ¼ plg es capaz de resistir:

$$q = 14\ 850a = 14\ 850(\tfrac{1}{4}),$$

$$q = 3\ 710 \text{ lb/plg de longitud.}$$

La longitud necesaria es

$$L = \frac{48\ 000\ \text{lb}}{3\ 710\ \text{lb/plg}} = 12.9\ \text{plg}.$$

La soldadura debe colocarse de modo que la línea de acción de la fuerza pase a través del centro de gravedad del patrón de soldadura. Cualquiera de los patrones (a) y (b) mostrados en la Fig. 14.5 serían satisfactorios. Frecuentemente es deseable colocar alguna soldadura en el respaldo de la placa, como en la parte (b). Se ha encontrado que las soldaduras colocadas perpendicularmente a la línea de acción de la carga son alrededor de 30% más resistentes que las soldaduras laterales de filete. Sin embargo, es común en la práctica suponer que estas soldaduras también fallan a través de la garganta, y se considera que tienen la misma resistencia que las soldaduras laterales de filete. ■

FIGURA 14.6

EJEMPLO 14.2 Un tubo de acero estándar de 4 plg está soldado a una placa plana, como se muestra en la Fig. 14.6. Si se coloca una soldadura alrededor de la base, determinar el tamaño de la soldadura necesaria para que resista igual que el tubo, cargado a un esfuerzo de 22 000 lb/plg².

SOLUCION Según el Apéndice H, el área de un tubo de acero estándar de 4 plg es 3.17 plg², y el diámetro exterior es de 4.5 plg.

La carga total que puede soportar el tubo es:

$$P = \sigma A = (22\ 000)(3.17), \qquad P = 69\ 800\ \text{lb}.$$

La circunferencia del tubo, que es la longitud de soldadura, es $C = \pi D = \pi(4.50) = 14.2$ plg. La carga que cada pulgada de soldadura debe soportar es:

$$q = \frac{P}{L} = \frac{69\ 800\ \text{lb}}{14.2\ \text{plg}} = 4\ 900\ \text{lb/plg}$$

Según la ec. (14.1), $q = 14\ 850\ a$, y

$$a = \frac{4\ 900}{14\ 850} = 0.33\ \text{plg}$$

Se elegiría una soldadura de ⅜ plg. ■

Problemas

En estos y en los demás problemas sobre análisis y diseño de soldaduras en este libro, supóngase que se usan electrodos de serie E–70. El esfuerzo cortante admisible para estas soldaduras es de 21 000 lb/plg².



FIGURA P14.1

14.1 Determinar la longitud total de soldadura necesaria para resistir la fuerza de 60,000 lb mostrada en la Fig. P14.1. El tamaño de la soldadura es:

a) ¼ plg, b) 5/16 plg, y c) ⅜ plg.

14.2 Determinar la longitud total de soldadura necesaria para que resista igual que una placa de 4 plg × ½ plg que soporta un esfuerzo de tensión de 22 000 lb/plg². Use una soldadura de:

a) ¼ plg, b) 5/16 plg, y c) ⅜ plg.

14.3 Dada una soldadura de 3/16 plg, determinar la fuerza máxima P que puede soportar la ménsula mostrada en la Fig. P14.3.

14.4 Determinar la fuerza máxima P que puede soportar la ménsula mostrada en la Fig. P14.4. El tamaño de la soldadura es de ¼ plg.

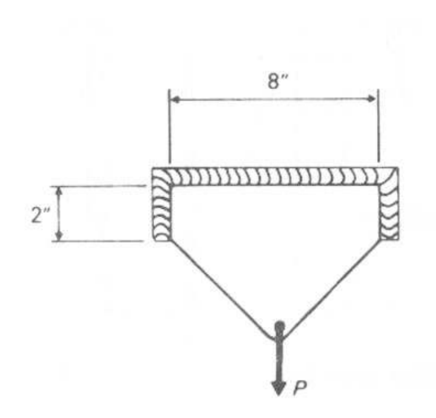


FIGURA P14.3

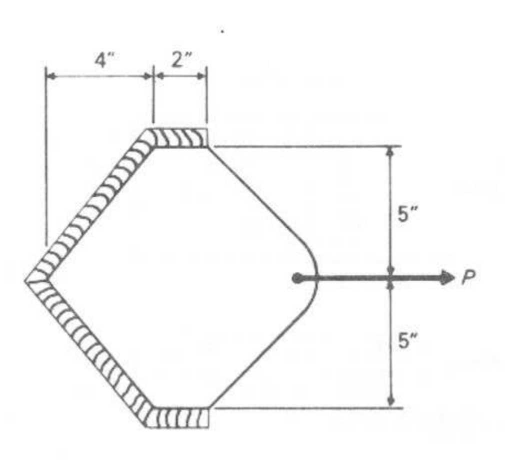


FIGURA P14.4

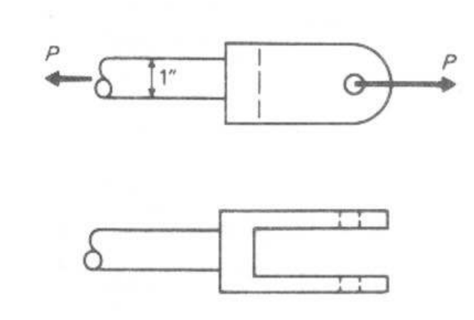


FIGURA P14.5

FIGURA P14.6

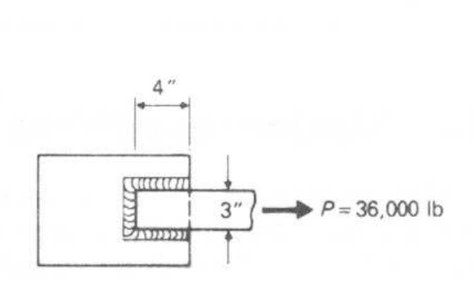


FIGURA P14.7

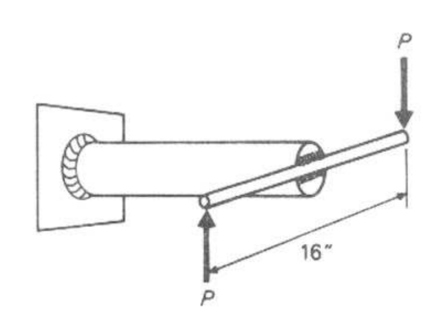



FIGURA P14.8

14.5 Se va a fabricar un miembro sujeto a tensión para una parte de máquina soldando los extremos maquinados a una varilla redonda de acero de 1 plg, como se muestra en la Fig. P14.5. Si la unión debe tener la misma resistencia que la varilla, ¿cuál es el tamaño necesario de la soldadura? El esfuerzo de tensión admisible de la varilla es de 18 000 lb/plg^2.

14.6 Determinar la fuerza admisible que puede aplicarse a la ménsula mostrada en la Fig. P14.6, que está soldada a una base de acero. La ménsula está soldada a todo alrededor con una soldadura de ¼ plg.

14.7 Determinar el esfuerzo cortante en la soldadura de ⅜ plg mostrada en la P14.7.

14.8 Un tubo estándar de acero de 5 plg está sujeto a una carga de torsión, como se muestra en la Fig. P14.8, donde $P = 6000$ lb y la base del tubo está soldada a una placa con una soldadura de ¼ plg a todo alrededor. Determinar el esfuerzo cortante en la soldadura.

14.9 Determinar la fuerza máxima P que puede aplicarse al tubo descrito en el problema 14.8 sin exceder el esfuerzo cortante admisible (21 000 lb/plg^2) en la soldadura.

14.10 Para soportar una carga de tensión se usa un perfil C10 × 15.3, como se muestra en la Fig. P14.10. Determinar la longitud necesaria de la soldadura para que resista igual que el canal con un esfuerzo 22 000 lb/plg^2. Usese soldadura de ¼ plg.

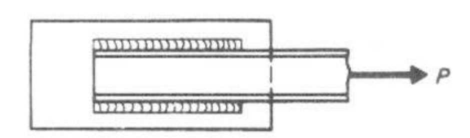


FIGURA P14.10

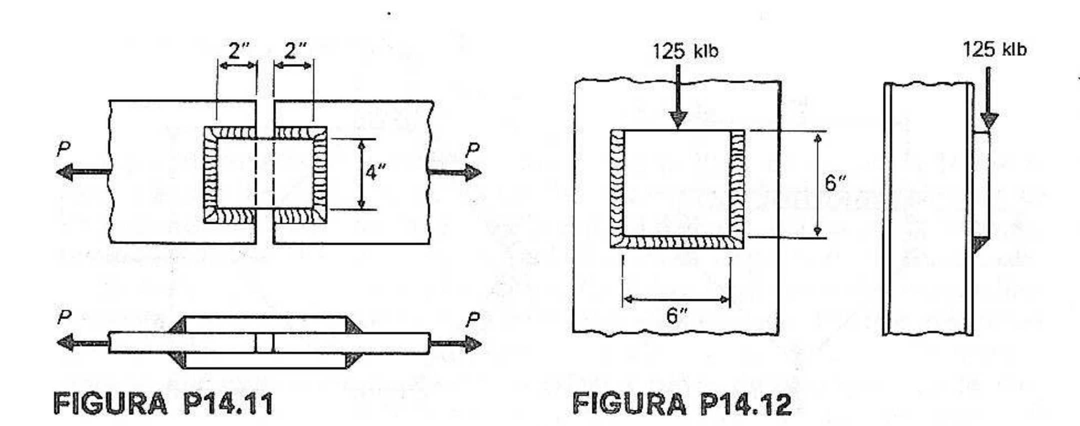


FIGURA P14.11 **FIGURA P14.12**

14.11 Determinar la carga máxima P que puede aplicarse a la conexión mostrada en la Fig. P14.11. El tamaño de la soldadura es de $\frac{5}{16}$ plg.
14.12 Una placa de 6 plg × 6 plg × 1 plg soporta una carga de 125 klb. La soldadura se coloca a lo largo de tres lados, como se muestra en la Fig. P14.12. Determinar el tamaño de la soldadura.

14.4 Miembros asimétricos

En el ejemplo 14.1 de la sección anterior se mencionó que el proyectista debería colocar las soldaduras de tal manera que la carga aplicada se pasara a través del centro de gravedad del patrón de soldadura. Si esto se hace, puede suponerse que el esfuerzo en las soldaduras está distribuido uniformemente, y pueden usarse en el diseño los procedimientos descritos en la sección 14.3. Si la carga no pasa a través del centro de gravedad del patrón de soldadura, la conexión se describe como cargada excéntricamente. El análisis de este tipo de problema se presenta posteriormente en este capítulo.

Si se usa una sección asimétrica, tal como el ángulo de la Fig. 14.7, es deseable que la fuerza resultante en el ángulo pase a través del centro de gravedad del patrón de soldadura. Como la fuerza resultante pasa a través del centroide del ángulo, queda más cerca del talón del ángulo que del borde del patín. Para cargar la conexión concéntricamente, las soldaduras deben estar balanceadas de acuerdo con las longitudes. Los ejemplos 14.3 y 14.4 ilustran un método conveniente de hacerlo.

EJEMPLO 14.3 Determinar las longitudes L_1 y L_2 de soldadura necesarias para conectar el ángulo de 3 × 3 × $\frac{3}{8}$ mostrado en la Fig. 14.7 a la placa plana. La carga aplicada es de 48 000 lb, y se usa una soldadura de $\frac{5}{16}$ plg.

SOLUCION Según el Apéndice J, la carga P que actúa a través del centroide del área, queda a 0.89 plg de talón del ángulo. Sean:

P_1 = fuerza ejercida por la longitud L_1 de soldadura, y
P_2 = fuerza ejercida por la longitud L_2 de soldadura.

Las fuerzas se determinan tomando momentos:

$$\sum M_{P_2} = 0: \qquad P_1(3) = (48\,000)(2.11),$$

$$P_1 = 33\,800 \text{ lb};$$

$$\sum M_{P_1} = 0: \qquad P_2(3) = (48\,000)(0.89),$$

$$P_2 = 14\,200 \text{ lb}.$$

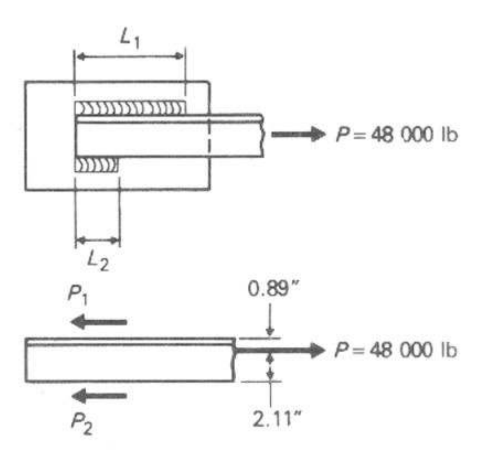


FIGURA 14.7

Conociendo las fuerzas necesarias en cada soldadura, se pueden calcular las longitudes L_1 y L_2. Una soldadura de $5/16$ plg puede soportar $q = 14\,850a = 14\,850(\frac{5}{16})$, $q = 4\,640$ lb/plg. Por consiguiente,

$$L_1 = \frac{P_1}{q} = \frac{33\,800}{4\,640} = 7.3 \text{ plg};$$

$$L_2 = \frac{P_2}{q} = \frac{14\,200}{4\,640} = 3.1 \text{ plg.} \quad ■$$

EJEMPLO 14.4 Resolver el ejemplo 14.3, suponiendo que también se coloca soldadura a lo largo del extremo del ángulo, como se indica en la Fig. 14.8.

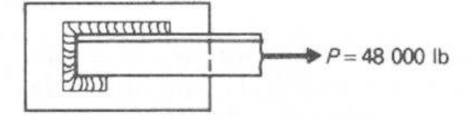
SOLUCION La fuerza en el extremo del ángulo se supone uniformemente distribuida. La fuerza resultante que actúa en el centro del ángulo es $P = (4\,640 \text{ lb/plg})\ (3 \text{ plg}) = 13\,920$ lb. Con esta fuerza conocida, los momentos se suman en igual forma que en el ejemplo anterior. Así

$$\sum M_{P_2} = 0: \qquad P_1(3) = 48\,000(2.11) - 13\,920(1.5),$$

$$P_1 = 26\,800 \text{ lb}$$

$$\sum M_{P_1} = 0: \qquad P_2(3) = 48\,000(0.89) - 9\,000(1.5),$$

$$P_2 = 7\,280 \text{ lb}.$$



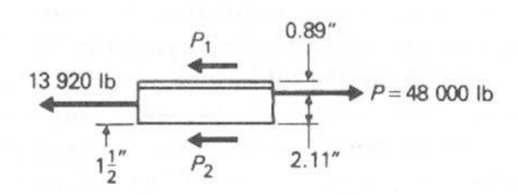


FIGURA 14.8

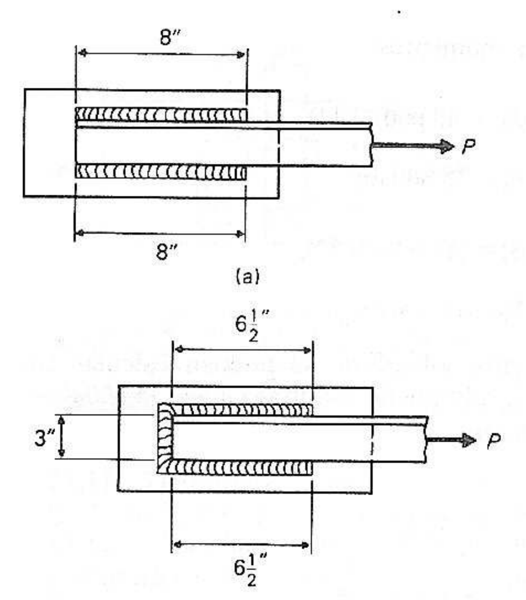


FIGURA 14.9

Las longitudes L_1 y L_2 son ahora:

$$L_1 = \frac{P_1}{q} = \frac{26\ 800}{34\ 640} = 5.8 \text{ plg},$$

$$L_2 = \frac{P_2}{q} = \frac{7\ 280}{4\ 640} = 1.6 \text{ plg}.$$

Si un ángulo se somete a cargas estáticas, las especificaciones han eliminado la necesidad de equilibrar las longitudes de soldadura, como se hizo en los ejemplos anteriores. Los ensayos han indicado que las excentricidades pequeñas, pero inevitables, que ocurren en este tipo de conexión no afectan significativamente la capacidad de la conexión. La soldadura puede colocarse como se muestra en la Fig. 14.9 (a) o (b). Sin embargo, si la conexión está sujeta a fatiga debido a cargas repetidas, las soldaduras deben equilibrarse como se hizo en los ejemplos de esta sección. ■

14.5 Comentarios adicionales sobre soldadura

Un procedimiento común para diseñar soldaduras consiste en elegir primero el tamaño de la soldadura y después determinar la longitud y la distribución necesarias para soportar la carga aplicada. Generalmente el proyectista queda en libertad de elegir uno de varios tamaños, con unas cuantas restricciones impuestas por economía y por requisitos de especificaciones. Los comentarios presentados en esta sección ayudarán al principiante a seleccionar los tamaños adecuados de soldadura.

Los tamaños de soldadura se dan en incrementos de $\frac{1}{16}$ plg, como por ejemplo $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, etc. Las especificaciones indican los tamaños mínimo y máximo de las soldaduras. Diferentes organizaciones especifican valores algo diferentes para reflejar algunas diferencias en su aplicación.

Por ejemplo, el tamaño mínimo permitido generalmente es de $\frac{3}{16}$ plg, pero también está limitado por el espesor de las placas.

Los tamaños mínimos de soldadura para varios espesores de placa, según lo especifica el AISC, se dan en la Tabla 14.1. El máximo permitido es $\frac{1}{16}$ plg menor que el espesor de la placa, excepto para placas de $\frac{1}{4}$ plg o menos, de espesor. En este caso, el tamaño máximo de la soldadura es igual al del espesor de la placa.

Tabla 14.1

Espesor del material de la parte soldada más gruesa en plg.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ a $1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$ a $2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$ a 6	más de 6
Tamaño mínimo del filete de soldadura en plg.	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$

Generalmente no es deseable elegir ni el mínimo ni el máximo tamaño de soldadura para diseño, excepto donde el espacio u otras consideraciones prácticas lo requieran. Esencialmente la economía en la colocación de la soldadura juega un papel más importante en la selección de los tamaños de soldadura. Es difícil colocar un cordón mayor de $\frac{5}{16}$ plg en una pasada (capa de soldadura). Las soldaduras mayores de $\frac{5}{16}$ plg consisten de varias capas, como se ilustra en la Fig. 14.10. Como este procedimiento es más costoso, debe evitarse, a menos que por limitaciones de espacio u otras restricciones, se requieran soldaduras de gran tamaño. Soldaduras, de $\frac{1}{4}$ plg o de $\frac{5}{16}$ plg son eficientes y económicas para la mayoría de los casos que se presentan comúnmente.

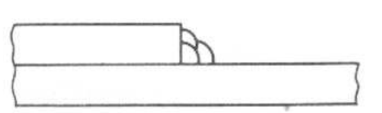


FIGURA 14.10

Problemas

14.13 Una soldadura de $\frac{5}{16}$ plg que tiene longitudes $L_1 = 6$ plg y $L_2 = 2$ plg se usa para conectar una ménsula fabricada con una plana, como se muestra en la Fig. P14.13. Determinar la distancia x a la línea de acción de P para que la junta se considere cargada concéntricamente. ¿Cuál es el valor admisible de P?

14.14 Determinar la distancia x que se necesita para que la fuerza P (de la Fig. P14.14) esté aplicada concéntricamente.

14.15 Determinar las longitudes de una soldadura de $\frac{1}{4}$ plg necesarias para soportar una carga $P = 60$ klb (véase Fig. P14.15). El ángulo es de $4 \times 4 \times \frac{3}{8}$. Supóngase que por tratarse de cargas repetidas se requiere equilibrar las longitudes de la soldadura.

14.16 Determinar las longitudes de una soldadura de $\frac{5}{16}$ plg necesarias para que resista igual que un ángulo de $5 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ cargado a 22 000 lb/plg^2. El lado de $3\frac{1}{2}$ plg es el que queda sobresaliendo, y las cargas repetidas requieren equilibrar las longitudes de soldadura.

14.17 Un miembro a tensión que soporta una carga de 46 klb se hace de un sólo ángulo. El esfuerzo de tensión admisible es de 22 000 lb/plg^2 y las soldaduras se deben equilibrar. Diseñe el ángulo y la conexión soldada.

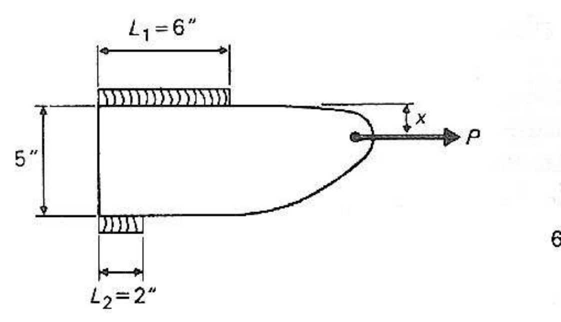


FIGURA P14.13

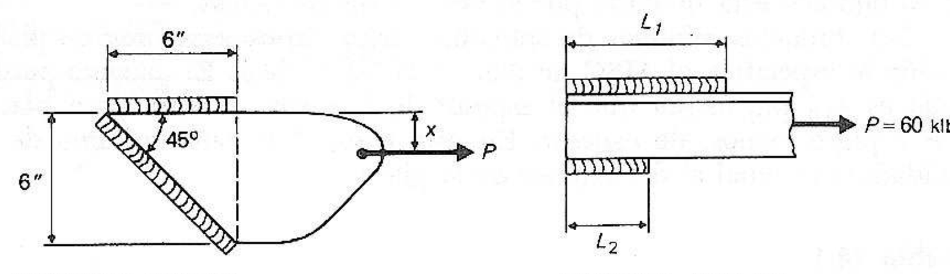


FIGURA P14.14

FIGURA P14.15

14.18 Un miembro a tensión que soporta una carga de 30 klb, se hace de un sólo ángulo. El esfuerzo de tensión admisible es de 22 000 lb/plg², y las soldaduras se deben equilibrar. Diseñe el miembro y la conexión soldada.

14.6 Conexiones soldadas cargadas excéntricamente

Una junta cargada excéntricamente es aquella en la cual la línea de acción de la carga no pasa a través del centroide del patrón de soldadura. Cuando esto ocurre la carga excéntrica se descompone en un par y una fuerza aplicados en el centroide del patrón de soldadura. Cada efecto se analiza independientemente y se superponen los resultados.

Para fines de análisis y diseño, una soldadura de filete se considera como una línea de resistencia que puede soportar una fuerza igual en cualquier dirección. Se supone que la falla ocurre a través de la garganta de la soldadura. Los cálculos se hacen más fácilmente considerando q, la fuerza por pulgada de soldadura, que se discutió en la sección 14.3.

La conexión soldada cargada excéntricamente de la Fig. 14.11 muestra la fuerza directa y el par en la Fig. 14.11 (c) y (d). El análisis del esfuerzo directo q_D es el mismo que se describió en la Sección 14.3. Es decir, cada punto de soldadura soporta una carga igual de q_D lb/plg. (Véase la Fig. 14.11 c). Algebraicamente, esto es

$$q_D = \frac{P}{\Sigma L}, \tag{14.2}$$

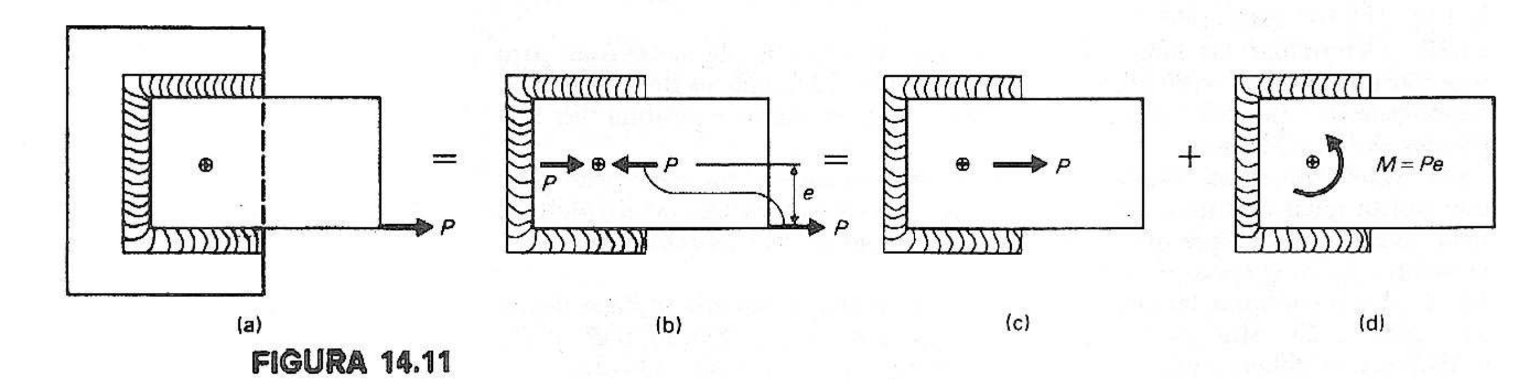


FIGURA 14.11

donde:

q_D = carga directa en cualquier punto en la soldadura, expresada en lb/plg,
P = carga aplicada, en lb,
ΣL = longitud total de soldadura en la conexión, en plg.

Las fuerzas producidas por el par de la Fig. 14.11 (d) varían en proporción a la distancia de la soldadura al centroide de las líneas de soldadura. El método de análisis más conveniente consiste en usar la fórmula de la torsión $\tau = Tc/J$.

El momento polar de inercia J es el de los segmentos de soldadura. Se calcula como $J = \Sigma(J_0 + Ad^2)$ para las longitudes de soldadura. Para investigar este término, considere un segmento de soldadura (Fig. 14.12). La longitud de esta soldadura es L, el espesor t, y las coordenadas del centro de este segmento medidas a partir del centroide del conjunto de soldaduras C son x y y.

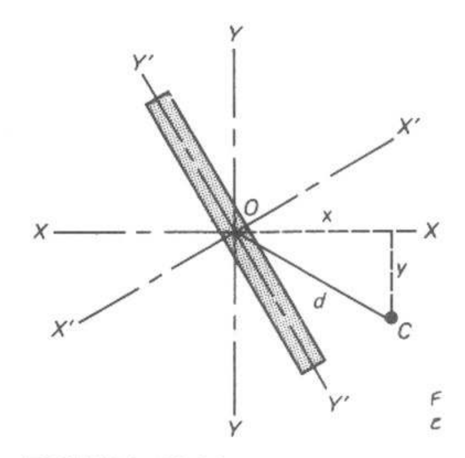


FIGURA 14.12

A partir de las definiciones de momentos de inercia, J_0 es el momento polar de inercia de la longitud de soldadura con respecto a su centro O. Por tanto,

$$J_O = I_X + I_Y = I_{X'} + I_{Y'},$$

$$I_{Y'} = \tfrac{1}{12}Lt^3 \approx 0, \qquad I_{X'} = \tfrac{1}{12}tL^3.$$

Por consiguiente, $J_0 = \frac{1}{12}\, tL^3$ para cualquier línea, sin importar la pendiente.

Como se quiere el momento polar de inercia con respecto a C, debe añadirse el término Ad^2 a J_0. Usando $d^2 = x^2 + y^2$ y $A = tL$, se expresa el momento polar de inercia como:

$$J = J_O + Ad^2 = \tfrac{1}{12}tL^3 + tL(x^2 + y^2).$$

Si se usan varias longitudes de soldadura, J es la suma de los términos para cada longitud.

La fórmula de la torsión aplicable a patrones de soldadura, puede entonces expresarse como:

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{MR}{\Sigma t[\frac{1}{12}L^3 + L(x^2 + y^2)]}. \qquad \text{(a)}$$

Es más conveniente usar la fuerza por pulgada de soldadura, q, en vez del esfuerzo cortante de la ec. (a). Como $q = \tau t$, ambos miembros de la ec. (a) pueden multiplicarse por t. La fórmula resultante es:

$$q_M = \frac{MR}{\Sigma[\frac{1}{12}L^3 + L(x^2 + y^2)]}, \qquad (14.3)$$

donde

q_M = fuerza/plg de soldadura en cualquier punto,
M = par aplicado, en lb-plg,
R = distancia radial entre el centroide del patrón de soldaduras y el punto considerado, en plg.

A menudo es más conveniente calcular las componentes x e y de q directamente, en lugar de descomponer la fuerza oblicua. Aplicando el Teorema de Varignon, descrito en el Apéndice A.7, se encuentra que las componentes x e y de q_M son:

$$q_{MX} = \frac{My}{\Sigma[\frac{1}{12}L^3 + L(x^2+y^2)]}, \tag{14.3a}$$

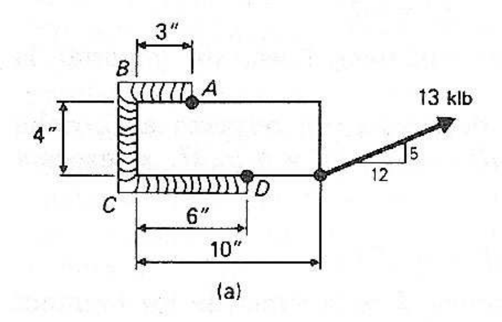
$$q_{MY} = \frac{Mx}{\Sigma[\frac{1}{12}L^3 + L(x^2+y^2)]}. \tag{14.3b}$$

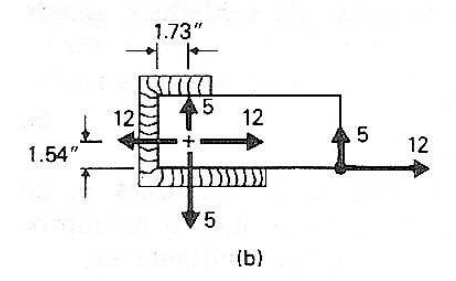
EJEMPLO 14.5 Determinar los valores de q en los puntos A y D de la conexión soldada de la Fig. 14.13.

SOLUCION El primer paso consiste en localizar el centro de gravedad. Los ejes de referencia se toman en la parte inferior y en el lado izquierdo extremo del patrón de soldaduras.

El eje de referencia a través de la soldadura inferior está a:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ly}{\Sigma L} = \frac{6(0)+4(2)+3(4)}{6+4+3} = 1.54 \text{ plg.}$$





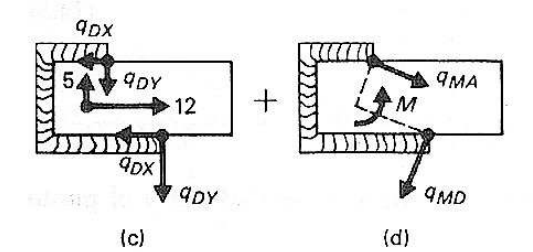


FIGURA 14.13

El eje de referencia a través de la soldadura vertical está a:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Lx}{\Sigma L} = \frac{6(3) + 4(0) + 3(1.5)}{6 + 4 + 3} = 1.73 \text{ plg.}$$

Las componentes x e y producidas por la fuerza directa de la Fig. 14.13 (c) son iguales en todos los puntos:

$$q_{DX} = \frac{P_x}{\Sigma L} = \frac{12}{13} = 0.93 \text{ klb/plg,}$$

$$q_{DY} = \frac{P_y}{\Sigma L} = \frac{5}{13} = 0.38 \text{ klb/plg.}$$

La ec. (14.3) se usa para calcular las fuerzas debidas al par de la Fig. 14.3 (d). El momento polar de inercia J se calcula como sigue:

$$J = \sum [\tfrac{1}{12}L^3 + L(x^2 + y^2)].$$

Soldadura AB:

$$\tfrac{1}{12}L^3 = \tfrac{1}{12}(3)^3 = 2.3$$

$$L(x^2 + y^2) = 3(\overline{0.23}^2 + \overline{2.46}^2) = 18.3$$

Soldadura BC:

$$\tfrac{1}{12}L^3 = \tfrac{1}{12}(4)^3 = 5.3$$

$$L(x^2 + y^2) = 4(\overline{1.73}^2 + \overline{0.46}^2) = 12.9$$

Soldadura CD:

$$\tfrac{1}{12}L^3 = \tfrac{1}{12}(6)^3 = 18.0$$

$$L(x^2 + y^2) = 6(\overline{1.27}^2 + \overline{1.54}^2) = 23.9$$

$$\text{Total } J = \overline{80.7}$$

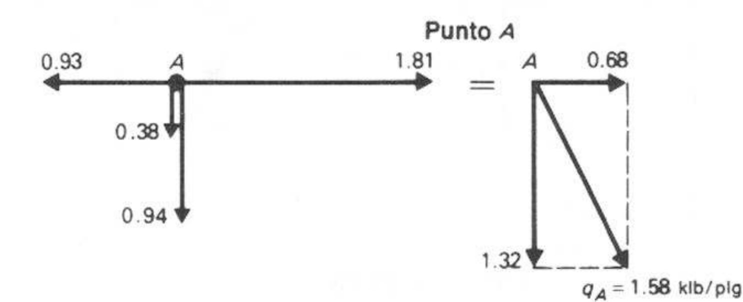
Ahora se pueden determinar los valores de q para los puntos A y D (véase figura). El momento se calcula como:

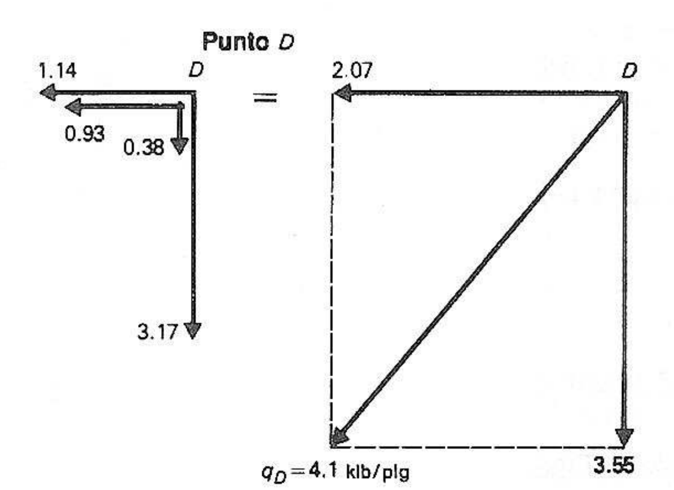
$$M = 12(1.54) + 5(8.27)$$
$$= 59.9 \text{ klb-pie}$$

Punto A:

$$q_{MXA} = \frac{My}{J} = \frac{(59.9)(2.46)}{80.7} = 1.81 \text{ klb/plg.}$$

$$q_{MYA} = \frac{Mx}{J} = \frac{(59.9)(1.27)}{80.7} = 0.94 \text{ klb/plg.}$$





Punto D:
$$q_{MXD} = \frac{My}{J} = \frac{(59.9)(1.54)}{80.7} = 1.14 \text{ klb/plg.}$$
$$q_{MYD} = \frac{Mx}{J} = \frac{(59.9)(4.27)}{80.7} = 3.17 \text{ klb/plg.}$$

Las fuerzas en estos puntos son las componentes vectoriales de los valores de q, como se indica en las figuras. ■

EJEMPLO 14.6 Determinar la carga máxima P que puede aplicarse a la conexión soldada mostrada en la Fig. 14.14. El tamaño de la soldadura es de $\frac{5}{16}$ plg.

SOLUCION El primer paso consiste en localizar el centroide del patrón de soldadura. Usando un eje de referencia vertical a través de B, se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Lx}{\Sigma L} = \frac{4(2) + (7.2)(2)}{4 + 7.2} = 2 \text{ plg}$$

Usando una referencia horizontal a través de la soldadura AB,

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ly}{\Sigma L} = \frac{4(0) + 7.2(3)}{4 + 7.2} = 1.93 \text{ plg}$$

El problema es determinar el lugar del punto de mayor esfuerzo en la soldadura y el valor de q en ese punto, en términos de la incógnita P. Este valor de q (en términos de P) se igualará el valor admisible de q para calcular P.

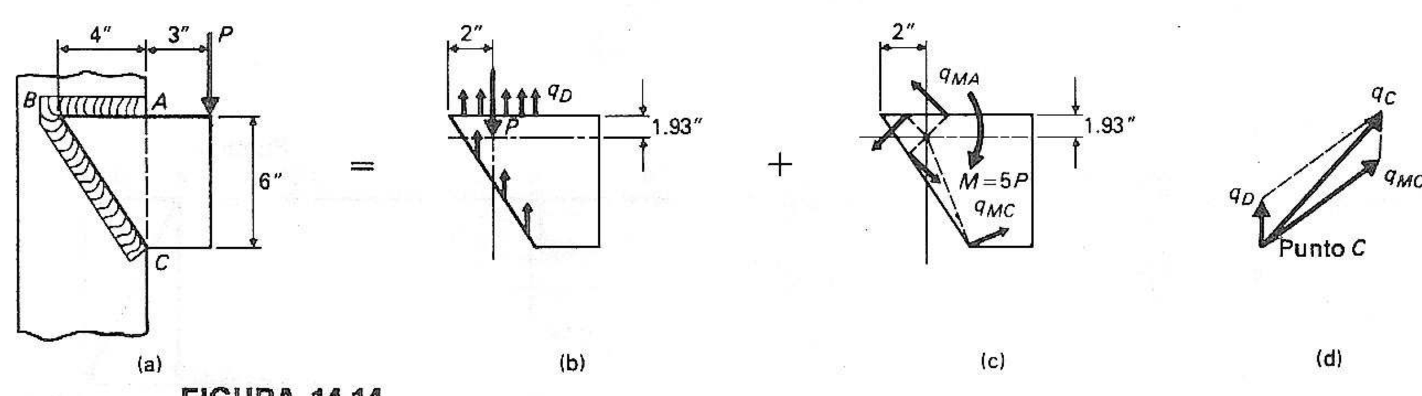


FIGURA 14.14

Determinamos el punto de esfuerzo máximo superponiendo los esfuerzos de la Fig. 14.14 (c) con los de la Fig. 14.14 (b) para encontrar la suma vectorial mayor. Después de considerar las ecs. 14.3 (a) y 14.3 (b), o investigando unos cuantos puntos, se ve que el punto de esfuerzo máximo ocurrirá en C. Se calcula el valor de q en ese punto como:

$$q_D = \frac{P}{\Sigma L} = \frac{P}{4+7.2} = 0.089P.$$

Para encontrar q_M, se debe primero determinar el momento polar de inercia de las líneas de soldadura. De nuevo se usa la ecuación:

$$J = \sum[\tfrac{1}{12}L^3 + L(x^2 + y^2)],$$

para encontrar:

Soldadura AB:

$$\tfrac{1}{12}L^3 = \tfrac{1}{12}(4)^3 = 5.3$$
$$L(x^2 + y^2) = 4(0^2 + 1.93^2) = 14.9$$

Soldadura BC:

$$\tfrac{1}{12}L^3 = \tfrac{1}{12}(7.2)^3 = 31.2$$
$$L(x^2 + y^2) = (7.2)(0^2 + 1.07^2) = 8.3$$
$$\text{Total } J = 59.7$$

Las componentes x e y de q en el punto C pueden calcularse a partir de las ecs. 14.3 (a) y 14.3 (b):

$$q_{MXC} = \frac{My}{J} = \frac{5P(4.07)}{59.7} = 0.342P,$$

$$q_{MYC} = \frac{Mx}{J} = \frac{5P(2)}{59.7} = 0.168P.$$

A partir de la Fig. 14.15, el valor máximo de q en el punto C es la suma vectorial de q_D, q_{MXC}, y q_{MYC}:

$$q = \sqrt{(0.342P)^2 + (0.257P)^2}, \qquad q = 0.428P.$$

Como $q_{\text{máx}} = 4\,640$ lb/plg para una soldadura de $\frac{5}{16}$ plg, la carga máxima que se puede aplicar es

$$0.428P = 4\,640, \qquad P = 10\,840 \text{ lb}.$$

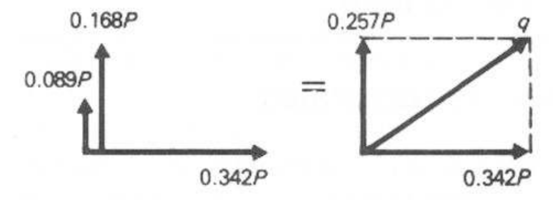


FIGURA 14.15 ■

Problemas

14.19-14.21 Determinar el punto de mayor esfuerzo y la magnitud de este esfuerzo para los patrones de soldadura indicados en las Figs. P14.19 a P14.21.
14.22-14.24 Determinar la carga máxima que puede aplicarse a los patrones de soldadura indicados en las Figs. P14.22 a P14.24. Supóngase que se usa una soldadura de $\frac{5}{16}$ plg en todos los casos.

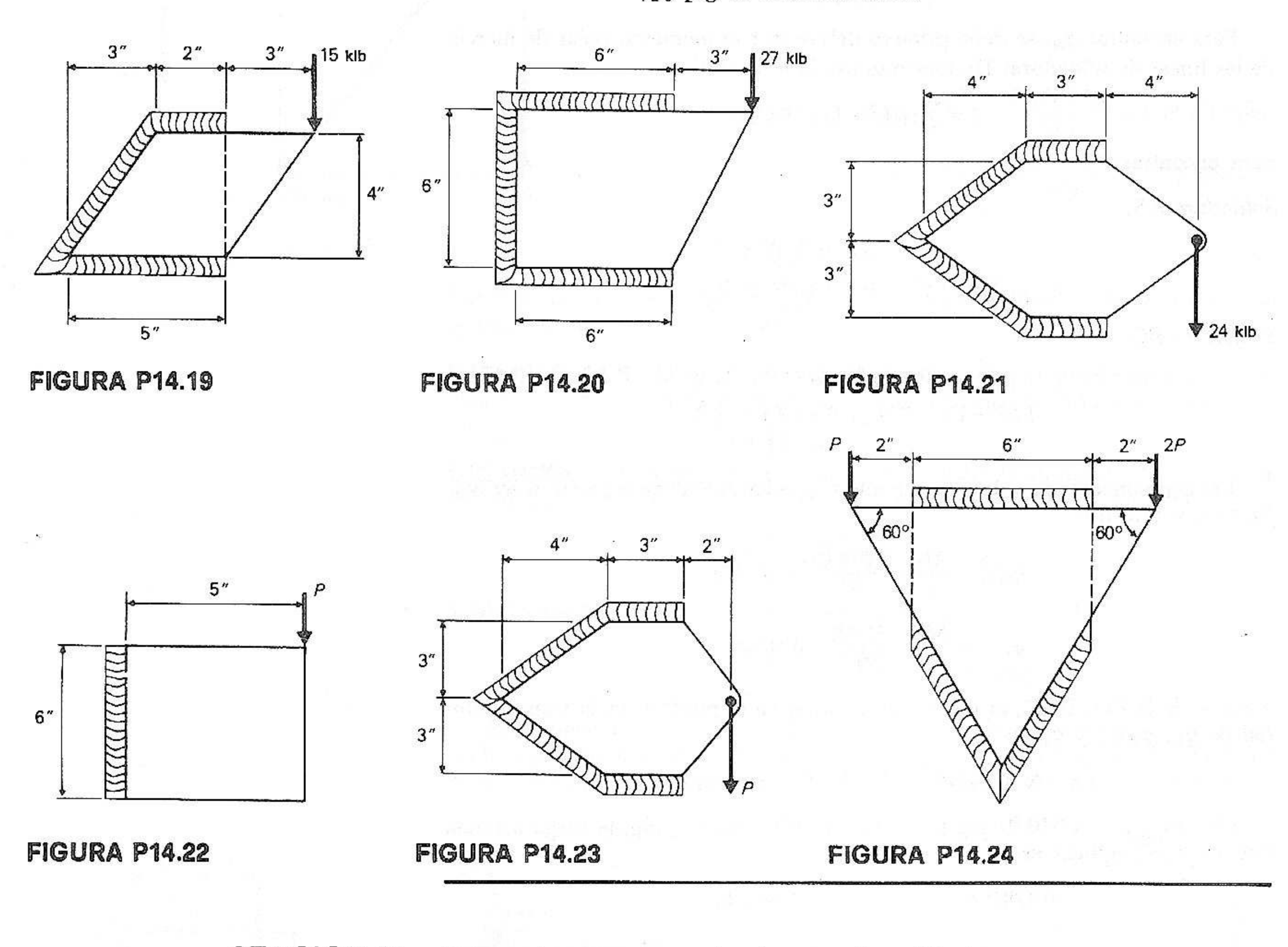


FIGURA P14.19

FIGURA P14.20

FIGURA P14.21

FIGURA P14.22

FIGURA P14.23

FIGURA P14.24

SECCION B Conexiones remachadas y atornilladas

14.7 Conexión de miembros estructurales

Las juntas remachadas y atornilladas se usan generalmente para conectar entre sí miembros de una estructura, especialmente si están hechos de elementos en forma de placa, tales como vigas *W* y *S*, canales, ángulos y

placas planas. El análisis teórico exacto de las juntas remachadas es extremadamente complejo. Sin embargo, un método práctico de análisis, que está basado en los posibles tipos de falla y que utiliza esfuerzos admisibles obtenidos a través de ensayos y experiencias, ha hecho que la solución sea relativamente sencilla.

En esta sección se discuten procedimientos de análisis de conexiones remachadas y atornilladas, cargadas concéntricamente; es decir, cuando la línea de acción de la carga aplicada pasa a través del centro de gravedad del patrón de remaches o de tornillos.

Como se estableció anteriormente, reconocemos que las conexiones remachadas se usan muy rara vez actualmente, pero que el procedimiento de análisis es igual tanto para conexiones atornilladas como para remachadas. Simplemente necesitamos usar los esfuerzos admisibles adecuados.

14.8 Conexiones remachadas

Para hacer una conexión remachada, se perforan o taladran agujeros en los elementos que van a unirse. Los agujeros se alinean y se colocan en ellos remaches calientes que generalmente se fijan (hincan), en su lugar con un martillo neumático. Los remaches son barras metálicas redondas con una cabeza hemisférica prefabricada en un extremo. La espiga o vástago del remache se hace lo suficientemente larga para que la porción que se extiende más allá de la placa, forme otra cabeza hemisférica después de que se ha hincado el remache.

Para facilitar esta operación, los remaches se calientan antes de hincarse; cuando se referían, se originan en ellos esfuerzos de tensión, debido al descenso de temperatura, que hace que el remache tienda a contraerse, lo cual es impedido por las placas rígidas. Estas fuerzas de tensión en el remache aprietan firmemente las placas una contra otra produciendo entre ellas una resistencia por fricción. Sin embargo, esta resistencia por fricción se desprecia en el diseño.

Las juntas remachadas transmiten la carga de una placa a la otra mediante un esfuerzo cortante en los remaches. Los remaches pueden estar sometidos a esfuerzo cortante simple o doble, dependiendo del número de planos de corte a los que quede sujeto el remache. Los remaches de la junta traslapada de la Fig. 14.16 (a) están sometidos a esfuerzo cortante simple, mientras que los de la junta a tope de la Fig. 14.16 (b) están a cortante doble. La Fig. 14.16 ilustra algunas conexiones que usan remaches o tornil'os para transmitir la carga de un miembro a otro.

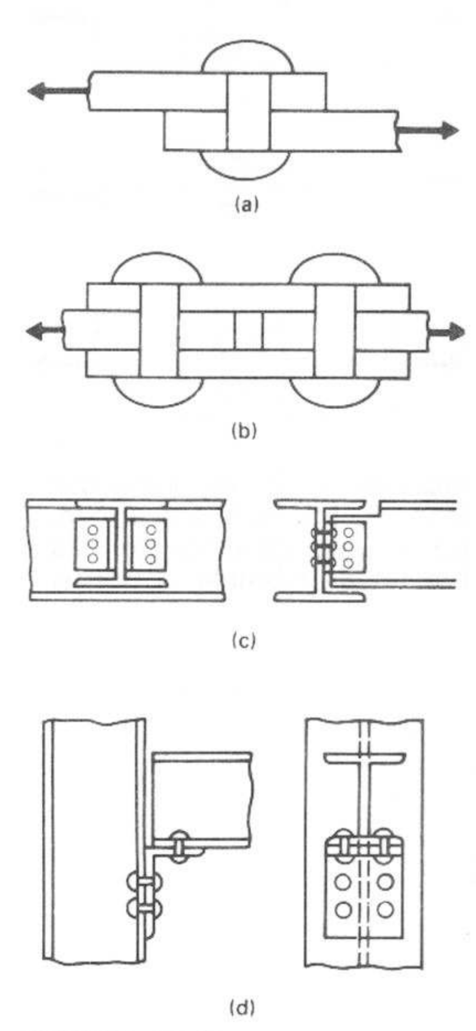


FIGURA 14.16

14.9 Análisis de juntas remachadas

El análisis de una junta remachada consiste en invesdigar los tipos posibles de falla de la junta. Consideremos la junta traslapada simple de la Fig. 14.17 para ilustrar los tipos posibles de falla y las cantidades relacionadas cor su investigación.

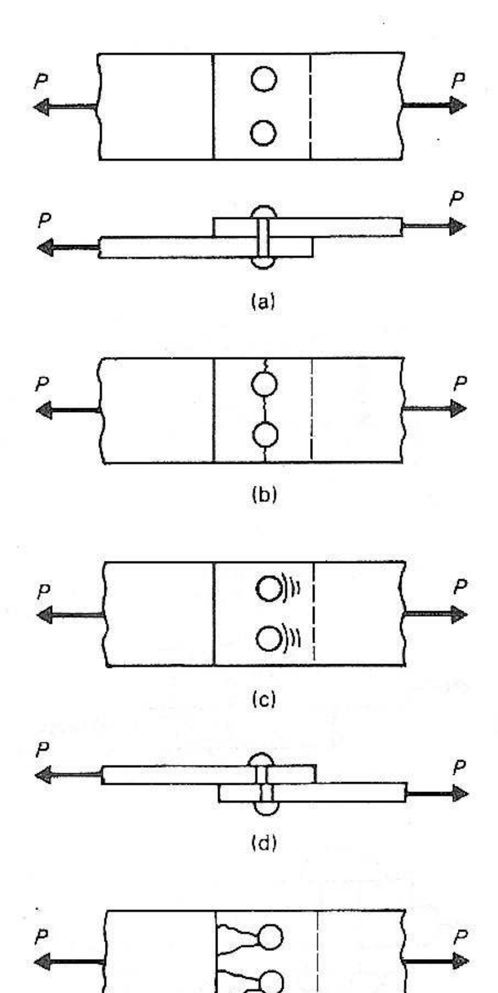


FIGURA 14.17 (b) Falla por tensión, (c) falla por apoyo, (d) falla por cortante (e) falla por poca distancia al borde.

La junta puede fallar por desgarramiento de la placa (falla por tensión), aplastamiento de la placa o el remache (falla por aplastamiento), o por corte de los remaches (falla por cortante). La capacidad de la junta es la mayor carga que la junta puede soportar con seguridad. Las cargas se calculan aplicando la fórmula $\sigma = P/A$ a los tres tipos de falla. Los esfuerzos permisibles se conocen, y las áreas son aquellas que están sujetas a los diferentes tipos de esfuerzo.

Falla por tensión Una falla por tensión o por desgarramiento ocurre en la sección sujeta al mayor esfuerzo de tensión, es decir, a través de los agujeros en la placa. El ancho neto es el ancho total de la sección menos los diámetros de los agujeros. Cuando hay varias hileras de remaches, deben investigarse varias secciones netas, como se ilustra en el ejemplo 14.9.

El diámetro de un agujero se toma como el tamaño nominal (sin hincar) del remache, más ⅛ plg. El área neta puede expresarse como:

$$A_{\text{neta}} = \left(b - \sum D\right)t, \tag{a}$$

donde:

b = ancho total de la sección neta,
ΣD = suma de los diámetros de los agujeros a través de la sección,
t = espesor de la placa.

Falla por aplastamiento El remache ejerce una fuerza de compresión, o de aplastamiento sobre la placa que está en contacto con ella, como se muestra en la Fig. 14.17 (c). La distribución real de este esfuerzo de aplastamiento es sumamente complicada. En vez de calcular el esfuerzo máximo real, usamos un valor ficticio del esfuerzo de aplastamiento. Esto involucra el área proyectada (el diámetro nominal del remache multiplicado por el espesor de la placa) que se discutió en la sección 2.11. Sin embargo, el uso de esta área para calcular el esfuerzo de aplastamiento es correcto, pues los valores del esfuerzo de aplastamiento admisible se determinan considerando el área proyectada.

El área proyectada de un remache para una falla por aplastamiento se expresa como:

$$A_b = dt, \tag{b}$$

donde:

d = diámetro nominal del remache en plg,
t = espesor de la placa en plg.

Falla por cortante El tercer tipo de falla que puede ocurrir en una junta remachada es por corte de los remaches. Los esfuerzos cortantes de este tipo se discutieron en la sección 2.10.

El área considerada al investigar una falla por cortante en un remache es:

$$A_s = \tfrac{1}{4}\pi d^2, \qquad \text{(c)}$$

donde d es el diámetro nominal del remache.

Falla por distancia insuficiente al borde Si los remaches están colocados demasiado cerca del borde de la placa, puede ocurrir una falla tal como se muestra en la Fig. 14.17 (c). Para impedir este tipo de falla, el centro de agujero debe estar a una distancia suficiente del borde de la placa. Las especificaciones proporcionarán valores detallados para la distancia mínima al borde, pero como guía, la distancia al centro del agujero debería ser aproximadamente 1¾ veces el diámetro del remache, si los bordes son laminados. En este libro supondremos que la distancia al borde es suficiente para impedir la falla, de modo que no se necesita hacer cálculos para este tipo de falla.

Los esfuerzos admisibles para los tres tipos de falla se obtienen mediante el código o las especificaciones bajo las cuales se está diseñando la conexión. Por ejemplo, las especificaciones del AISC de 1978 para acero A-36 y remaches de acero A-502-1, son:

Tensión: $\sigma_t = 22\,000$ lb/plg²

Aplastamiento: $\sigma_b = 87\,000$ lb/plg²

Cortante: $\tau = 15\,000$ klb/plg²

Los ejemplos que siguen ilustran el procedimiento para analizar las juntas remachadas cargadas concéntricamente. En todos los casos, es práctica común suponer que cada remache soporta una parte igual de carga.

EJEMPLO 14.7 Calcular la carga máxima que puede transmitir la junta traslapada mostrada en la Fig. 14.18. Las placas son de 5 plg × 5/16 plg y se usan remaches de ¾ plg.

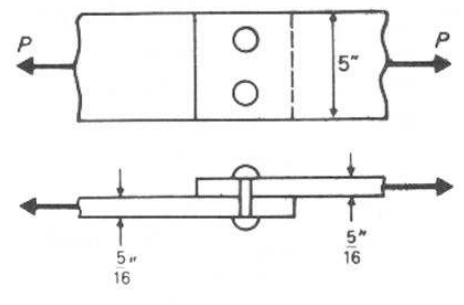


FIGURA 14.18

SOLUCION Analizamos la junta calculando la carga admisible para cada posible tipo de falla.

Tensión:

$$P_t = \sigma_t A_{\text{neta}} = (22\,000)[5 - (2 \times \tfrac{7}{8})](\tfrac{5}{16})$$
$$= 22\,300 \text{ lb.}$$

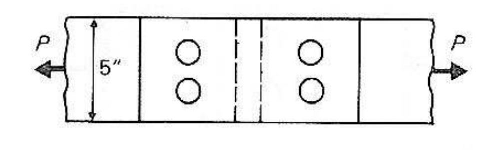
Aplastamiento:

$$P_b = \sigma_b A_{\text{neta}} = (87\,000)(\tfrac{3}{4})(\tfrac{5}{16}) \times 2 \text{ remaches}$$
$$= 40\,800 \text{ lb.}$$

Cortante:

$$P_s = \tau A_s = (15\,000)[\tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{3}{4})^2] \times 2 \text{ remaches}$$
$$= 13\,300 \text{ lb.}$$

La carga máxima que puede aplicarse a la conexión es de 13 300 lb y está limitada por el esfuerzo cortante en los remaches. ■



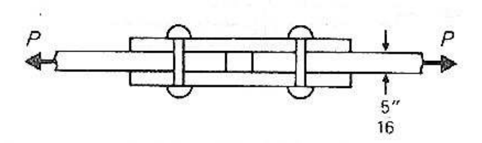


FIGURA 14.19

EJEMPLO 14.8 Calcular la carga máxima que puede transmitir la junta a tope mostrada en la Fig. 14.19. Las placas principales son de 5 plg × 5/16 plg y se usan remaches de ¾ plg. Las cubreplacas son de 5 plg × ¼ plg.

SOLUCION Las cubreplacas se hacen tan grandes o mayores que la placa principal para asegurar que la conexión no estará limitada por las cubre placas. Se procede como en el ejemplo 14.7.

Tensión:

$$P_t = \sigma_t A_{\text{neta}} = (22\ 000)[5 - (2 \times \tfrac{7}{8})](\tfrac{5}{16})$$
$$= 22\ 300 \text{ lb.}$$

Aplastamiento:

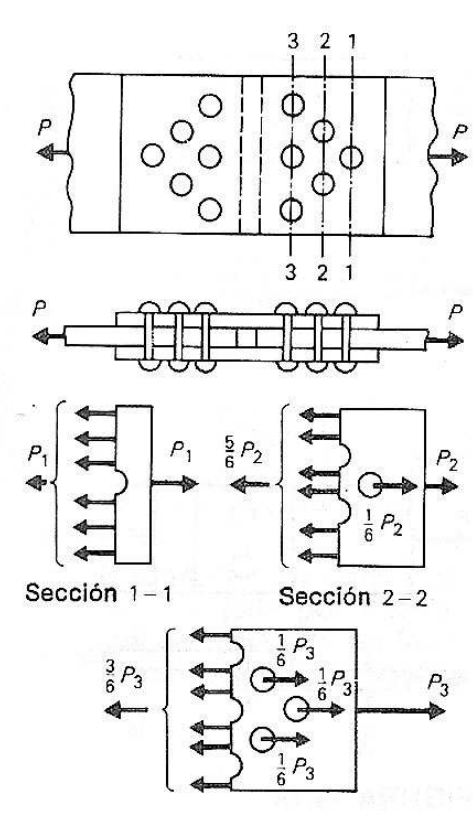
$$P_b = \sigma_b A_b = (87\ 000)(\tfrac{3}{4})(\tfrac{5}{16}) \times 2$$
$$= 40\ 800 \text{ lb.}$$

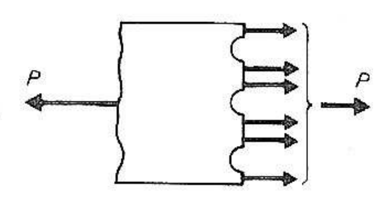
Cortante:

$$P_s = \tau A_s = (15\ 000)\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 2 \text{ remaches} \times 2 \text{ planos de cortante}$$
$$= 26\ 600 \text{ lb.}$$

La carga máxima que puede aplicarse a la conexión es de 22 300 lb, y está limitada por el esfuerzo de tensión.

Nótese que los cálculos son iguales a los del ejemplo 14.7, excepto para la resistencia a cortante. Sin embargo, en el presente ejemplo, los remaches están a corte doble en vez de a cortante simple, lo cual duplica el área sujeta a cortante. ■





Sección 3 – 3 de la cubre placa

FIGURA 14.20

EJEMPLO 14.9 Determinar la fuerza de tensión máxima que puede transmitirse mediante la conexión mostrada en la Fig. 14.20. Las placas principales son de 9 plg × 7/16 plg, las cubreplacas de 9 plg × 5/16 plg y se usan remaches de ⅞ plg.

SOLUCION Las cargas admisibles por cortante y por aplastamiento se calculan como en el ejemplo 14.6. Nuevamente se hace la suposición básica de que cada remache soporta una parte igual de la carga. En este caso, cada remache soporta 1/6 *P*. La determinación de la carga de tensión admisible requerirá el análisis de las secciones 1, 2 y 3 indicadas en la figura, ya que hay tres hileras de remaches.

Aplastamiento:

$$P_b = \sigma_b A_b = (87\ 000)(\tfrac{7}{8})(\tfrac{7}{16}) \times 6 \text{ remaches}$$
$$P_b = 199\ 000 \text{ lb.}$$

Cortante:

$$P_s = \tau A_s = (15\ 000)\tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{7}{8})^2 \times 2 \times 6 \text{ remaches}$$
$$P_s = 108\ 000 \text{ lb.}$$

Desgarramiento a lo largo de la sección 1-1:

$$P_t = \sigma_t A_{\text{neta}} = (22\,000)(9-1)(\tfrac{7}{16}),$$
$$P_t = 77\,000 \text{ lb.}$$

Desgarramiento a lo largo de la sección 2-2:

$$P_t = \sigma_t A_{\text{neta}} = (22\,000)[9-(2\times 1)](\tfrac{7}{16}) = 67\,400 \text{ lb},$$
$$\tfrac{5}{6}P_2 = 67\,400,$$
$$P_2 = 80\,900 \text{ lb.}$$

Desgarramiento a lo largo de la sección 3-3:

$$P_t = \sigma_t A_{\text{neta}} = (22\,000)[9-(3\times 1)](\tfrac{7}{16}) = 57\,750 \text{ lb},$$
$$\tfrac{1}{2}P_3 = 57\,750,$$
$$P_3 = 115\,500 \text{ lb.}$$

Si hay más de una hilera de conexiones, también deben analizarse las cubreplacas. Aquí, la sección 3-3 de las cubreplacas es crítica.

Desgarramiento a lo largo de la sección 3-3 de las cubreplacas:

$$P_t = \sigma_t A = (22\,000)[9-(3\times 1)](2\times \tfrac{5}{16}),$$
$$P_t = 82\,500 \text{ lb.}$$

La fuerza máxima que puede transmitir la junta es de 77 000 lb, y está limitada por el desgarramiento de la placa principal a lo largo de la sección 1-1. ■

14.10 Conexiones atornilladas

Una junta atornillada se analiza de la misma manera que las juntas remachadas de la sección 14.9, excepto que el valor del esfuerzo cortante admisible en los tornillos tiene un valor diferente al de los remaches. El AISC especifica el esfuerzo cortante admisible en tornillos ordinarios (ASTM A-307) como

$$\tau = 10\,000 \text{ lb/plg}^2$$

Los ejemplos 14.10 y 14.11 ilustran el análisis de una junta atornillada.

EJEMPLO 14.10 Resolver el ejemplo 14.9, suponiendo que se usan tornillos de ⅞ plg, en vez de remaches de ⅞ plg.

SOLUCION La carga permisible, limitada por aplastamiento y desgarramiento, es la misma que en el problema anterior. Los valores son

$$P_b = 199\,000 \text{ lb}, \qquad P_t = 77\,600 \text{ lb.}$$

La carga permisible por cortante en los tornillos es

$$P_s = \tau A_s = (10\,000)\tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{7}{8})^2 \times 2 \times 6 \text{ tornillos}$$
$$= 72\,100 \text{ lb.}$$

La carga máxima es ahora de 72 100 lb, y está limitada por el esfuerzo cortante en los tornillos. ■

EJEMPLO 14.11 Una viga W 14 × 30 está conectada al patín de una columna W 8 × 31 con dos ángulos de 4 × 3½ × 5/16, como se muestra en la Fig. 14.21. Se usan tres remaches de ¾ plg para unir los ángulos al alma de la viga, y seis tornillos ordinarios de ¾ plg para conectar los ángulos al patín de la columna. Calcular la reacción admisible en el extremo de la viga.

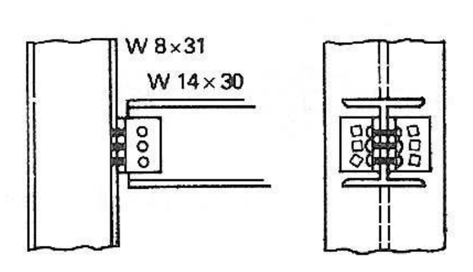


FIGURA 14.21

SOLUCION Una falla por tensión no puede ocurrir en este tipo de conexión. Por consiguiente, solamente se necesitan calcular los valores por cortante y por aplastamiento. El área de un remache o de un tornillo de ¾ plg es:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = 0.442 \text{ plg}^2$$

Analizamos la conexión remachada de los ángulos al alma de la viga:

Cortante:

$$P_s = \tau A_s = (15\,000)(0.442)(2)(3)$$
$$= 39\,800 \text{ lb.}$$

Aplastamiento sobre el alma de la viga:

$$P_b = \sigma_b A_b = (87\,000)\left(\tfrac{3}{4}\right)(0.270)(3)$$
$$= 57\,900 \text{ lb.}$$

El aplastamiento de los remaches sobre los ángulos no es crítico pues el espesor de los ángulos es mayor que 0.270 plg.

En seguida, analizamos la conexión atornillada de los ángulos al patín de la columna.

Cortante:

$$P_s = \tau A_s = (10\,000)(0.442)(6)$$
$$= 26\,500 \text{ lb.}$$

El aplastamiento de los tornillos sobre los ángulos, y de los tornillos sobre el patín de la columna no es crítico pues el espesor de cada uno de ellos es mayor de 0.270 plg.

Entonces, la reacción máxima admisible en el extremo es de 26 500 lb, y está limitada por el esfuerzo cortante de los tornillos. ■

Problemas

14.25-14.27 Determinar la fuerza máxima P que puede aplicarse a las conexiones remachadas indicadas en las Figs. P14.25 a P14.27. En todos los casos se usan remaches de ¾ plg, y los esfuerzos admisibles son los que se discutieron en la sección 14.9.

14.28 Un miembro a tensión (Fig. P14.28) se fabrica con dos ángulos de 5 × 3½ × 5/16 y transmite una fuerza de 100 klb. Determinar el número de remaches necesario para asegurar este miembro. Usense remaches de ¾ plg.

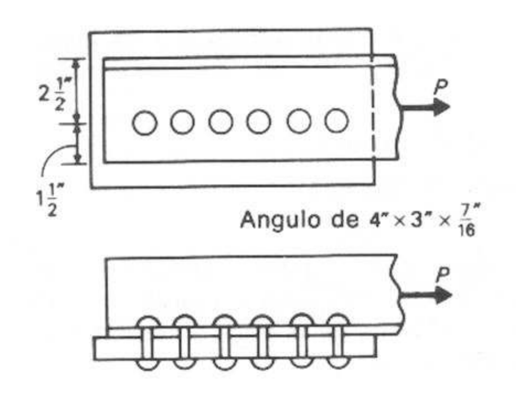


FIGURA P14.25

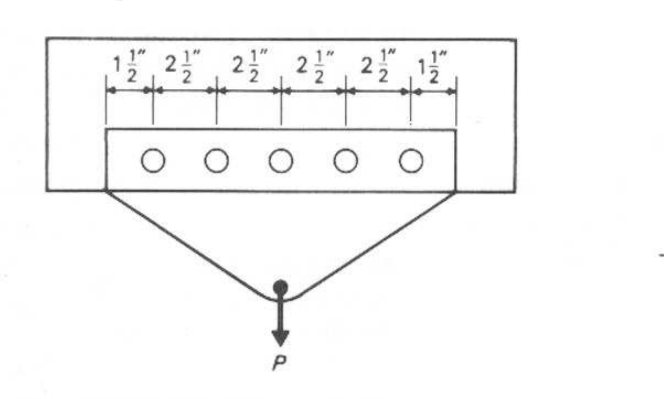
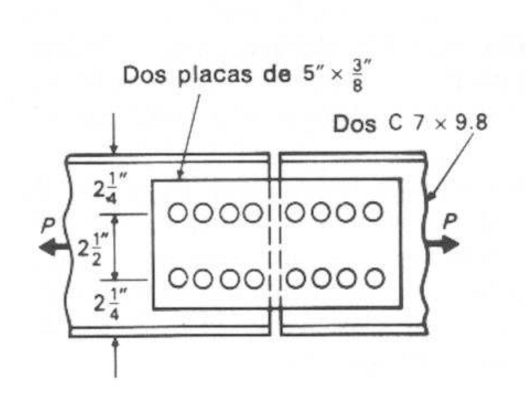


FIGURA P14.26



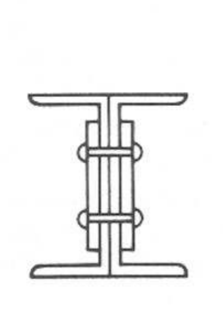


FIGURA P14.27

FIGURA P14.28

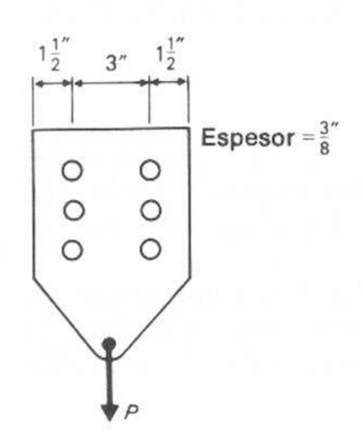


FIGURA P14.29

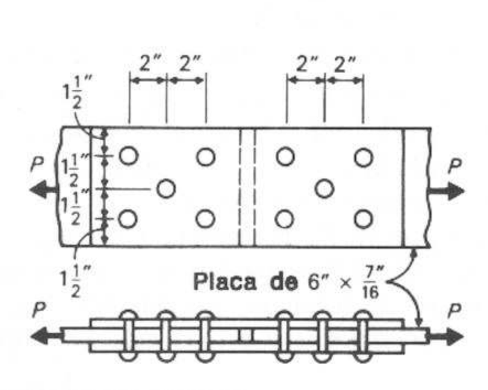


FIGURA P14.30

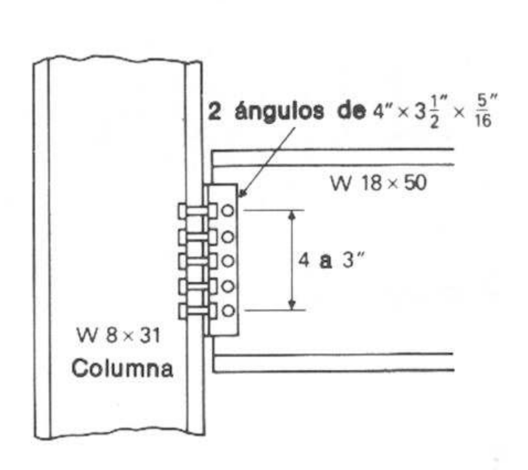


FIGURA P14.31

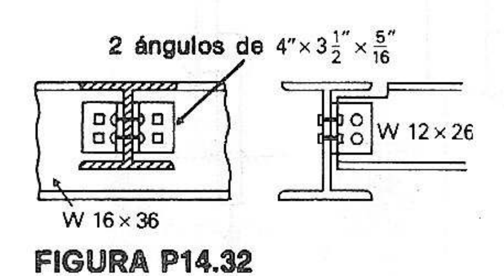


FIGURA P14.32

14.29-14.30 Determinar la fuerza máxima P que puede aplicarse a las conexiones atornilladas indicadas en las Figs. P14.29 y P14.30. Usense tornillos de ¾ plg. Los esfuerzos admisibles son:

$$\textit{Tensión}: \quad \sigma_t = 22\,000 \text{ lb/plg}^2;$$
$$\textit{Aplastamiento}: \quad \sigma_b = 87\,000 \text{ lb/plg}^2;$$
$$\textit{Cortante}: \quad \tau = 10\,000 \text{ lb/plg}^2.$$

14.31-14.32 Determinar la reacción máxima que se puede soportar en el extremo de las vigas de las Figs. P14.31 y P14.32. En todos los casos se usan remaches de ¾ plg para unir los ángulos con el alma de la viga, y se usan tornillos de ¾ plg para unir los ángulos a las columnas.

14.11 Conexiones remachadas y atornilladas cargadas excéntricamente

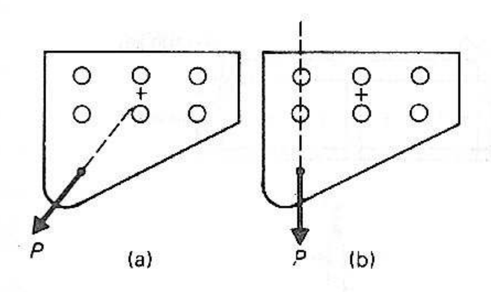


FIGURA 14.22

Una junta cargada excentricamente es aquella en la cual la línea de acción de la carga no pasa a través del centroide del patrón de tornillos o de remaches. La Fig. 14.22 (a) indica una junta remachada cargada concéntricamente; (b) indica la misma junta sujeta a una carga excéntrica.

En el análisis de juntas remachadas o atornilladas, cargadas excéntricamente, la carga excéntrica se descompone en una fuerza que pasa por el centroide del patrón de remaches, o tornillos y un par, como se muestra en la Fig. 14.23. La fuerza que pasa a través del centroide del patrón (Fig. 14.23 c) produce los esfuerzos directos descritos en la sec. 14.9. Es decir, cada remache, soporta una carga de igual magnitud:

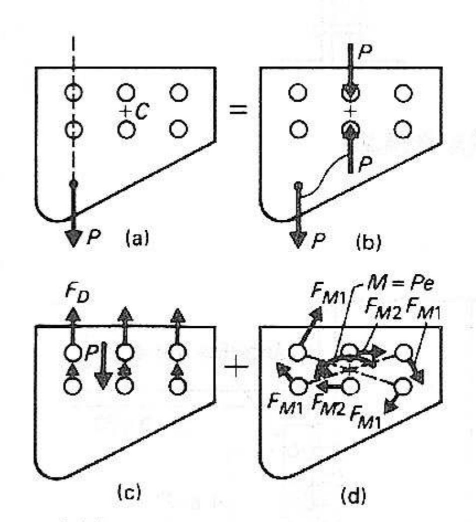


FIGURA 14.23

$$F_D = \frac{P}{N},$$

donde:

F_D = fuerza que actúa sobre cada remache, o perno, producida por la carga que pasa a través del centroide del grupo de remaches o tornillos, en lb,
P = carga aplicada en lb,
N = número de remaches o de tornillos.

El par de la Fig. 14.23 (d) tiende a hacer que la placa gire alrededor del centroide del grupo de conectores C. Estos impiden la rotación empujando la placa en una dirección perpendicular a un radio trazado desde el centro de rotación.

Las placas de la conexión se suponen rígidas. Por consiguiente, las fuerzas sobre los remaches o tornillos serán proporcionales a su distancia del centro de rotación. La relación entre las fuerzas sobre los remaches pueden determinarse a partir de la proporción:

$$\frac{F_{M1}}{r_1} = \frac{F_{M2}}{r_2} = \cdots,$$

donde F_{M1}, F_{M2}, ... son las fuerzas sobre los remaches o tornillos producidas por el par, y r_1, r_2, etc. son sus respectivas distancias de esos conectores, medidos desde el centro de rotación.

El procedimiento para calcular las fuerzas sobre los remaches o tornillos en una conexión cargada excéntricamente es como sigue:

1. Se localiza el centroide de las áreas de los remaches o tornillos. Esto puede hacerse por inspección en el caso de una disposición simétrica de los conectores o calculando las coordenadas según $\bar{x} = \Sigma Ax/\Sigma A$ y $\bar{y} = \Sigma Ay/\Sigma A$.
2. Se descompone la fuerza excéntrica en una fuerza y un par en el centroide del grupo de remaches o tornillos.
3. Se determina la fuerza F_D producida por la fuerza directa y las fuerzas F_M producidas por el par. Las direcciones son importantes en este paso.
4. Se combinan vectorialmente las fuerzas del paso 3, para determinar la fuerza total sobre cada remache o tornillo.

EJEMPLO 14.12 Determinar la carga soportada por cada remache en la conexión mostrada en la Fig. 14.24.

SOLUCION Por inspección, el centroide del grupo de remaches se localiza en el remache c. La fuerza excéntrica se descompone en una fuerza y un par, como se muestra en la Fig. 14.24 (b) y (c).

La fuerza directa F_D sobre cada remache es

$$F_D = \frac{P}{N} = \frac{15}{5} = 3 \text{ klb por remache.}$$

Las fuerzas producidas por el par variarán proporcionalmente a la distancia entre el remache y el centroide del grupo de remaches. Por consiguiente, la fuerza F_{M1} sobre el remache a es igual a la que actúa sobre el remache e, pues están equidistantes del centroide. Análogamente, la fuerza F_{M2} es la misma para los remaches b y d. Como el remache c coincide con el centroide, el par no produce fuerza sobre ese remache. La relación entre las fuerzas sobre los remaches se determina mediante la proporción que relaciona sus distancias a

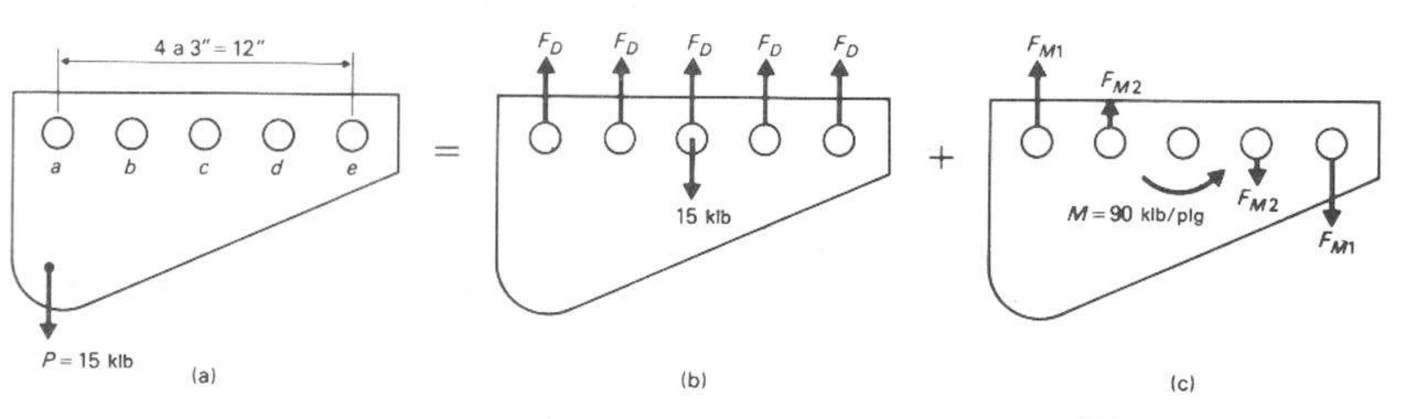


FIGURA 14.24

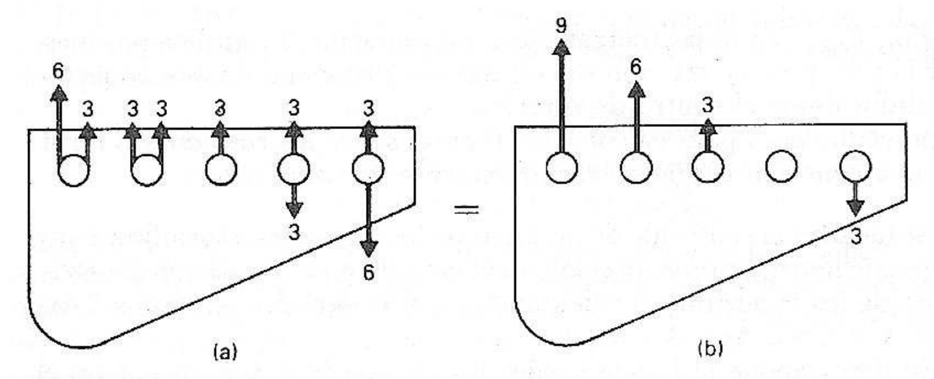


FIGURA 14.25

partir del centroide del grupo:

$$\frac{F_{M1}}{6} = \frac{F_{M2}}{3}; \qquad F_{M2} = \tfrac{1}{2}F_{M1}.$$

Se obtiene la otra relación entre estas fuerzas tomando momentos con respecto al centroide. Así:

$$\sum M_C = 0: \quad F_{M1}(6) + F_{M2}(3) + F_{M2}(3) + F_{M1}(6) = (15)(6),$$
$$12F_{M1} + 6(\tfrac{1}{2}F_{M1}) = 90,$$
$$F_{M1} = 6 \text{ klb},$$
$$F_{M2} = 3 \text{ klb}.$$

Las fuerzas sobre los remaches producidas por la carga excéntrica es entonces la suma vectorial de los dos efectos, y se muestra en la Fig. 14.25. ■

EJEMPLO 14.13 Para el grupo de remaches y la carga excéntrica aplicada que se muestra en la Fig. 14.26, determinar cuál remache está más cargado y la fuerza total sobre ese remache.

SOLUCION En este problema, el primer paso consiste en localizar el centroide del grupo de remaches. Por simetría sabemos que queda a lo largo del eje Y–Y. La coordenada y se calcula a partir de un eje de referencia que pasa a través de los tres remaches inferiores:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{3(0) + 2(4)}{3 + 2} = 1.6 \text{ plg}.$$

A partir de la Fig. 14.26 (b), la fuerza directa F_D sobre cada remache es:

$$F_D = \frac{P}{N} = \frac{10}{5} = 2 \text{ klb por remache}.$$

Las distancias d_1, d_2 y d_3 se encuentran por medio del teorema de Pitágoras:

$$d_1 = \sqrt{(3)^2 + (2.4)^2} = 3.84 \text{ plg}$$
$$d_2 = \sqrt{(3)^2 + (1.6)^2} = 3.40 \text{ plg}$$
$$d_3 = 1.6 \text{ plg}.$$

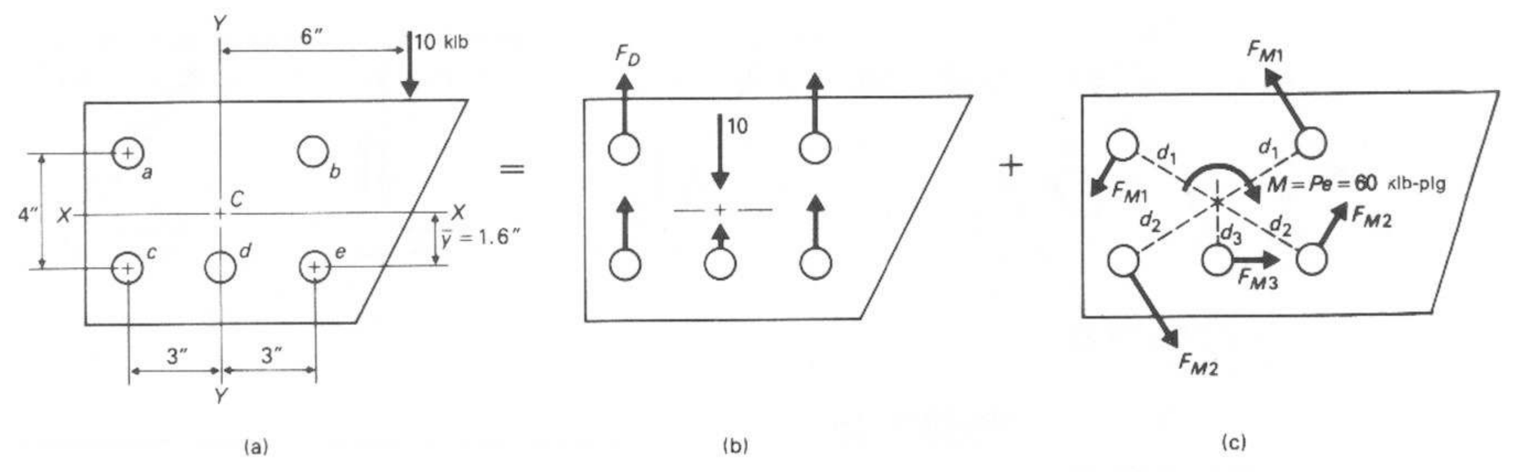


FIGURA 14.26

Se determinan las fuerzas F_M producidas por el par de la Fig. 14.26(c) tomando momentos con respecto al centroide:

$$\sum M_C = 0: \qquad 2F_{M1}(3.84) + 2F_{M2}(3.40) + F_{M3}(1.60) = 60.$$

Las relaciones entre las fuerzas se conocen a partir de la proporcionalidad de las distancias:

$$\frac{F_{M1}}{3.84} = \frac{F_{M2}}{3.40} = \frac{F_{M3}}{1.60};$$

$$F_{M3} = \frac{1.6}{3.84} F_{M1};$$

$$F_{M2} = \frac{3.40}{3.84} F_{M1}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de momentos se llega a:

$$2F_{M1}(3.84) + 2\left(\frac{3.40}{3.84} F_{M1}\right)(3.40) + \left(\frac{1.60}{3.84} F_{M1}\right)(1.60) = 60,$$

según la cual

$$F_{M1} = 4.2 \text{ klb};$$

$$F_{M2} = 3.7 \text{ klb};$$

$$F_{M3} = 1.8 \text{ klb}.$$

Las componentes directa y rotacional se superponen en la Fig. 14.27. Puede verse que el remache *b* es el más fuertemente cargado. La fuerza sobre el remache *b* es:

$$F = \sqrt{(5.37)^2 + (2.70)^2},$$

$$F_{máx} = 6.0 \text{ klb} \text{ (sobre el remache } b\text{).} \blacksquare$$



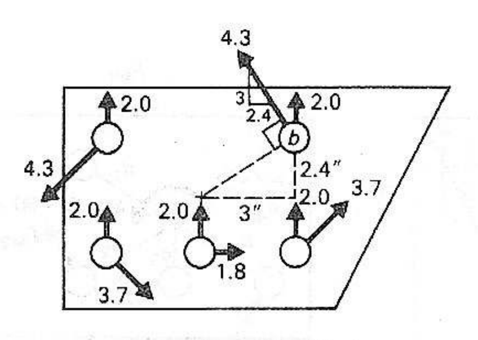
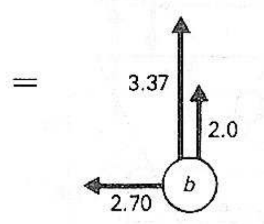
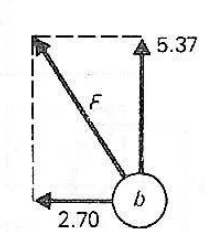


FIGURA 14.27





Problemas

14.33-14.35 Determinar la fuerza resultante soportada por cada tornillo en las conexiones indicadas en las Figs. P14.33 a P14.35.

14.36-14.38 Para los patrones de remaches o tornillos y las fuerzas aplicadas indicadas en las Figs. P14.36 a P14.38, determinar el conector que está más cargado, y la fuerza total sobre ese remache o tornillo.

14.39-14.41 La fuerza máxima que puede desarrollar un tornillo en cualquiera de los patrones indicados en las Figs. P14.39 a P14.41 es de 4.42 klb. Determinar la carga admisible en cada conexión.

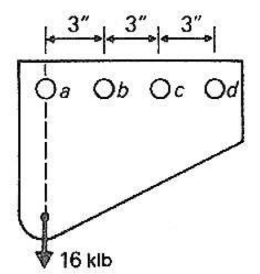


FIGURA P14.33

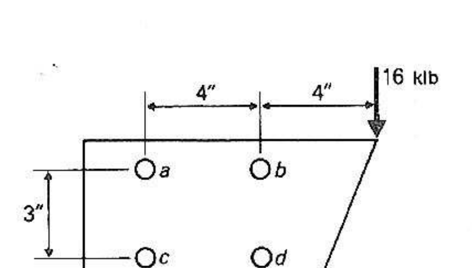


FIGURA P14.34

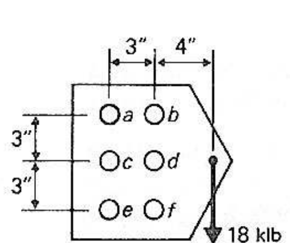


FIGURA P14.35

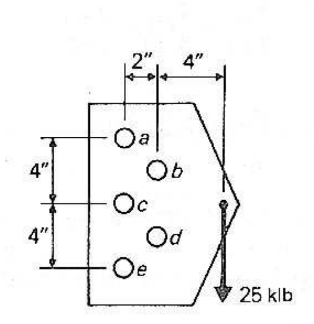


FIGURA P14.36

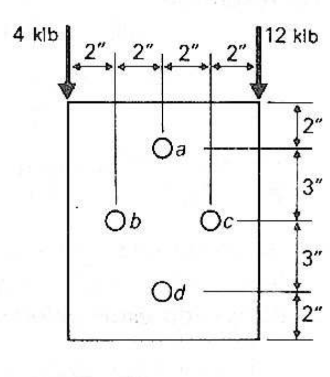


FIGURA P14.37

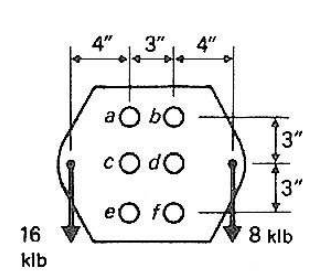


FIGURA P14.38

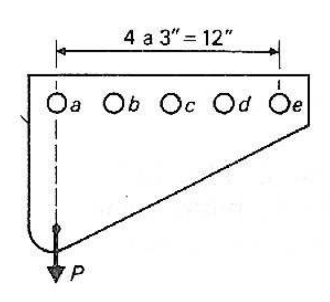


FIGURA P14.39

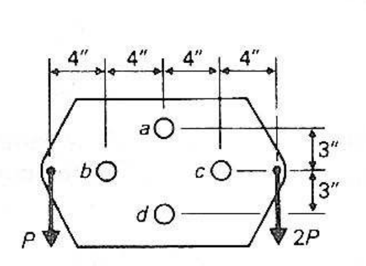


FIGURA P14.40

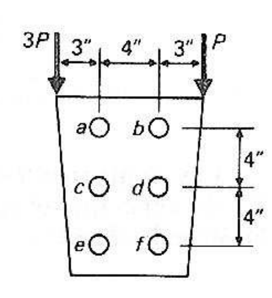


FIGURA P14.41

14.12 Conexiones remachadas y atornilladas cargadas excéntricamente (solución alternativa)

El método estático para calcular las fuerzas producidas por un par, como se discutió en la sección anterior, requiere mucho tiempo si el número de remaches o tornillos es grande. Sin embargo, como la acción del par sobre el conjunto de remaches es semejante a la acción de la torsión explicada en el capítulo 3, la fórmula de torsión puede adaptarse para usarla en problemas de este tipo.

Considere el grupo de remaches de la Fig. 14.28, que está sujeto a un par M. La fórmula para esfuerzos de torsión, $\tau = Tc/J$, puede usarse para calcular el esfuerzo o la fuerza sobre un remache. Aquí, el esfuerzo cortante τ es el remache en cuestión, y el par es el valor del par. M. La distancia c corresponde a la distancia radial medida desde el centroide del grupo de remaches hasta el remache en cuestión.

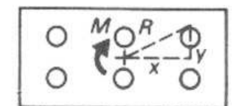


FIGURA 14.28

El momento polar de inercia en el caso de áreas de remaches puede calcularse mediante $J = \Sigma(J_0 + AR^2)$. Sin embargo, el término J_0 que es el momento polar de inercia del área del remache o tornillo en sí, puede despreciarse sin producir un error significativo. Por consiguiente, $J = \Sigma AR^2$.

$$J = \sum AR^2.$$

Se calcula el esfuerzo cortante sobre cada remache como:

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \qquad \tau = \frac{MR}{\Sigma\, AR^2} = \frac{MR}{\Sigma\,(x^2 + y^2)A}.$$

La fuerza sobre el remache o tornillo se obtiene multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por A. El resultado es:

$$F_M = \frac{MR}{\Sigma(x^2 + y^2)}. \qquad (14.4)$$

donde:

F_M = la fuerza sobre el remache producida por el par, en lb o en klb,
M = resistencia del par, en lb·plg o en klb-plg,
R = distancia radial medida desde el centroide del grupo de conectores hasta el remache o tornillo que se está considerando, en plg,
$\Sigma(x^2 + y^2)$ = la suma de x^2 y y^2 para todos los remaches o tornillos en el grupo. (Los términos x y y son las coordenadas de los remaches o tornillos a partir de un origen coincidente con el centroide del grupo de conectores.)

Los ejemplos 14.14 y 14.15 ilustran la aplicación de la ec. (**14.4**).

EJEMPLO 14.14 Determinar la fuerza sobre cada uno de los remaches, debida al par del ejemplo 14.12 y que se ilustra en la Fig. 14.24.

SOLUCION En esta solución solamente se calcula el efecto del par en la Fig. 14.24 (c). Los otros pasos en la solución completa son los mismos que para el ejemplo 14.12.

La cantidad $\Sigma\,(x^2 + y^2)$ se calcula a continuación para el grupo de remaches de la Fig. 14.24 (c). En este caso, todas las coordenadas y son cero:

$$\sum x^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (0)^2 + (3)^2 + (6)^2 = 90$$
$$\sum y^2 = 0$$
$$\sum (x^2 + y^2) = 90$$

Aplicando la Ec. (14.4) tenemos:

$$F_{M1} = \frac{MR}{\Sigma(x^2 + y^2)} = \frac{(90)(6)}{90} = 6 \text{ klb}$$

y

$$F_{M2} = \frac{MR}{\Sigma(x^2 + y^2)} = \frac{90(3)}{90} = 3 \text{ klb.}$$ ■

EJEMPLO 14.15 Determinar la fuerza en el remache sobre el cual el par del ejemplo 14.13 ejerce el mayor esfuerzo (véase la Fig. 14.26.)

SOLUCION Como en el ejemplo anterior, solamente se calcula el efecto del par en la Fig. 14.26 (c). Los otros pasos en la solución completa son los mismos que en el ejemplo 14.13. Sumando las coordenadas, se obtiene:

$$\sum x^2 = 4(3)^2 + (0)^2 = 36.0$$
$$\sum y^2 = 3(1.6)^2 + 2(2.4)^2 = 19.2$$
$$\sum (x^2 + y^2) = 55.2$$

Aplicando la Ec. (14.4) tenemos:

$$F_{Mb} = \frac{MR}{\Sigma(x^2 + y^2)} = \frac{(60)(3.84)}{55.2} = 4.2 \text{ klb}$$ ■

Problemas

14.42 Resolver el problema 14.34 usando la ec. (14.4).
14.43 Resolver el problema 14.35 usando la ec. (14.4).
14.44 Resolver el problema 14.37 usando la ec. (14.4).
14.45 Resolver el problema 14.38 usando la ec. (14.4).
14.46-14.49 Determinar la fuerza sobre el remache más cargado en los patrones de las Figs. P14.46 a P14.49.

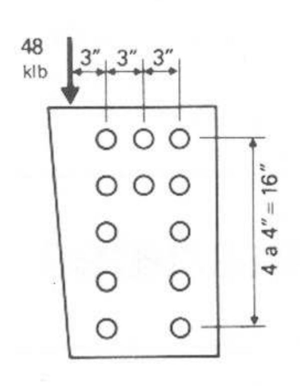


FIGURA P14.46

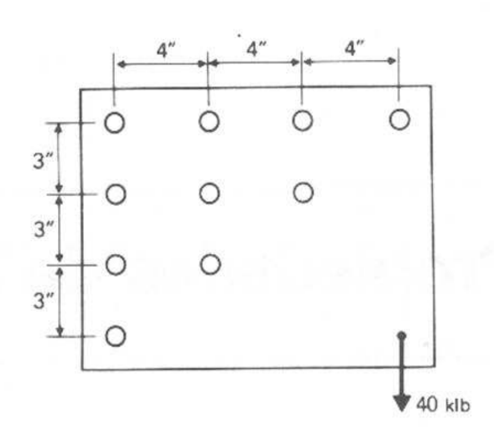


FIGURA P14.47

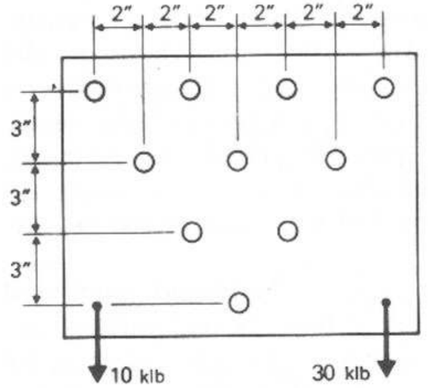


FIGURA P14.48

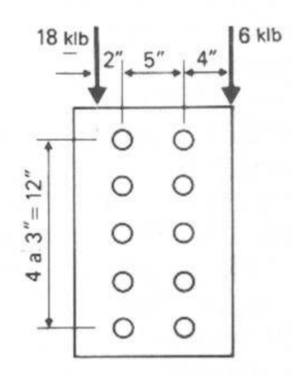


FIGURA P14.49

15

Propiedades de los materiales

15.1 Introducción

En la selección de un material para un miembro de un sistema estructural son muy importantes las características físicas del comportamiento del material sometido a esfuerzos. Estas características se conocen como las *propiedades mecánicas* del material. Además de las propiedades mecánicas, los materiales poseen propiedades químicas, eléctricas, térmicas, ópticas y otras. Aunque estas otras propiedades son de interés entre los requisitos de diseño especializado, las propiedades mecánicas son las que más interesan al ingeniero proyectista.

Las propiedades mecánicas, tales como rigidez, ductilidad, fragilidad y maquinabilidad, para nombrar algunas, describen el comportamiento del material cuando se somete a cargas. Estas propiedades afectan las características de funcionamiento de los miembros de los sistemas estructurales. Creemos que una breve descripción de estas propiedades ayudará a entender los factores que conducen a la selección de un material particular para una función particular.

Continuamente se están produciendo nuevos materiales para satisfacer las nuevas y diferentes aplicaciones de ingeniería que constantemente surgen en nuestras tecnologías en evolución. Cada uno de estos nuevos materiales, junto con los materiales comunes que ya están en uso, tiene sus propias propiedades físicas. Por esta razón se dará una breve introducción a la terminología y a las propiedades de los materiales de ingeniería en las siguientes secciones.

Hay disponibles varios excelentes libros que describen los materiales, especímenes y aparatos de ensaye, así como los procedimientos que deben seguirse para llevar a cabo las diversas pruebas. En particular hay dos obras de referencia muy completas en cuanto a métodos de ensaye de materiales se refiere. La primera es *Selected ASTM Engineer ing Materials Standards for Use in College Curricula*, publicado por la American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pennsylvania E.U.A. La otra es *Testing and Inspection of Engineering Materials* por H. E. Davis, G. E. Troxell y C. T. Wiskocil, publicada en inglés por la McGraw-Hill Publishing Company.

15.2 Propiedades mecánicas

La primera propiedad mecánica que se considerará es la resistencia. La *resistencia* de un material indica su capacidad de resistir carga y generalmente se toma como sinónimo del esfuerzo. Más específicamente, se considera que es el esfuerzo máximo que un material puede soportar antes de que ocurra la falla. Como se recordará a partir de la descripción hecha en la sección 2.12, un miembro se considera que ha fallado si cesa de realizar la función para la cual se diseñó. Esto puede deberse a llegar al esfuerzo último en los materiales frágiles que no se deforman grandemente antes de la fractura, o puede ser debido a haber alcanzado el esfuerzo de fluencia en los materiales dúctiles que se deforman plásticamente una gran cantidad, antes de que se alcance el esfuerzo último.

Otra propiedad de interés, particularmente con respecto a las consideraciones de flexibilidad, es la *rigidez*. Se dice que una parte estructural es rígida si soporta un gran esfuerzo con una deformación relativamente pequeña. El módulo de elasticidad de un material es una medida de su rigidez.

Propiedades adicionales de gran importancia en la selección de los miembros que soportan carga son la *ductilidad*, *maleabilidad*, y *fragilidad*. Un material es dúctil y maleable si puede soportar grandes deformaciones inelásticas (plásticas) antes de la fractura. La ductilidad está asociada con los esfuerzos de tensión (por ejemplo, un material puede ser estirado en alambres); la maleabilidad está asociada con los esfuerzos de compresión (por ejemplo, un material puede ser laminado en hojas delgadas). La mayoría de los materiales que son dúctiles también son maleables. La fragilidad es la propiedad opuesta a la ductilidad; un material frágil se fracturará a deformaciones unitarias relativamente bajas. Una línea divisoria usual que separa los materiales dúctiles de los frágiles es una deformación unitaria de 5%; es decir, si un material se fractura a una deformación unitaria de 5% o menos, se considera como quebradizo.

Los materiales usados en miembros que están sujetos al impacto de cargas dinámicas deben ser capaces de absorber la energía y el choque de las cargas. La *resiliencia* y la *tenacidad* son las propiedades que describen la capacidad de un material para absorber energía. La resiliencia de un material es la capacidad de absorber energía en el intervalo elástico de esfuerzos, mientras que la tenacidad es su capacidad de absorber energía en el intervalo inelástico de esfuerzos.

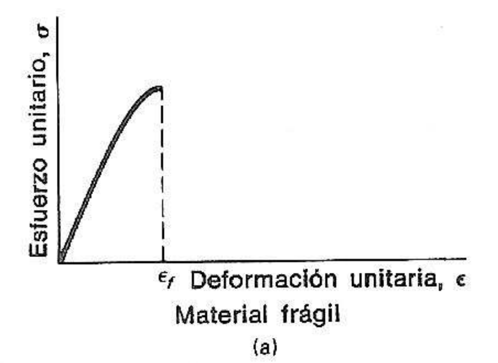
Otra propiedad de interés en consideraciones de diseño es la *dureza*, que es una medida de la capacidad del material para resistir rayaduras. La dureza de un material puede modificarse grandemente mediante varios procesos de manufactura, tales como tratamientos térmicos, trabajo en frío, templado y revenido.

La *maquinabilidad* es una medida de la facilidad con que un material puede maquinarse mediante operaciones tales como el barrenado, fresado, roscado, etc. La maquinabilidad de un material puede cambiarse considerablemente aleando el material con otros elementos y mediante operaciones tales como los tratamientos térmicos y el estirado en frío.

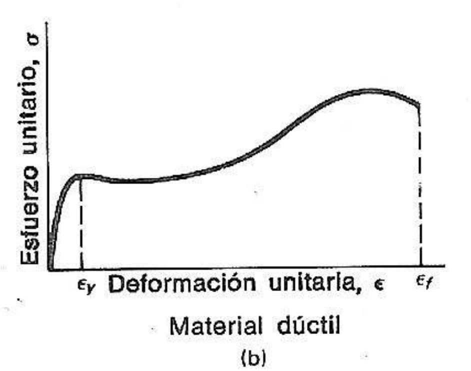
15.3 Ductilidad y fragilidad

La presencia o la ausencia de la ductilidad tiene un marcado efecto sobre la capacidad última de soportar carga de un miembro. Por consiguiente, consideramos que se necesita una discusión más completa de estas propiedades para apreciar mejor su función en el diseño.

La ductilidad y la fragilidad pueden ilustrarse fácilmente mediante diagramas esfuerzo-deformación unitaria, como los de la Fig. 15.1.



Material frágil
(a)



Material dúctil
(b)

FIGURA 15.1

La Fig. 15.1 (a) muestra el diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un material frágil o quebradizo. Puede verse que el alargamiento total antes de la fractura es considerablemente menor que el del material dúctil mostrado en la Fig. 15.1 (b). Esto es importante en el diseño por dos razones principales. Primero, antes de la fractura, un material frágil prácticamente no avisa, mientras que un material dúctil se deforma una gran cantidad antes de fallar. Un segundo factor más significativo es que un material dúctil, debido a su gran alargamiento después de la fluencia, tiene la cualidad de redistribuir esfuerzos en lugares de concentraciones altas de esfuerzos. Esto es particularmente importante en el diseño de conexiones y flechas con cuñas o con clavijas donde ocurren altas concentraciones de esfuerzos.

Consideremos, por ejemplo, la placa plana mostrada en la Fig. 15.2. Siempre que ocurran cambios bruscos en el área de la sección transversal de un miembro, tal como en la sección 1-1, los esfuerzos no están uniformemente distribuidos. Los esfuerzos más altos ocurren cerca de los bordes del agujero. Si el material es dúctil, las fibras cercanas al agujero se esfuerzan hasta el valor de fluencia. Estas fibras se deforman, pero mantienen ese esfuerzo, como se muestra mediante el diagrama esfuerzo-deformación unitaria de la Fig. 15.1 (b). El exceso de esfuerzo que se habría aplicado a estas fibras, es soportado por las fibras adyacentes. Este es un ejemplo de redistribución de esfuerzos.

En la redistribución de esfuerzos de un material dúctil, algunas fibras de la sección transversal fluyen. Esto no va en detrimento para un miembro, a menos que la fluencia ocurra sobre una porción sustancial de la sección transversal. Sin embargo, si el material fuera fágil, no sería capaz de soportar las altas concentraciones de esfuerzos y algunas fibras se romperían. Esto reduce el área neta, haciendo que los esfuerzos en las fibras restantes se incrementen, y que se desarrolle una grieta en la sección.

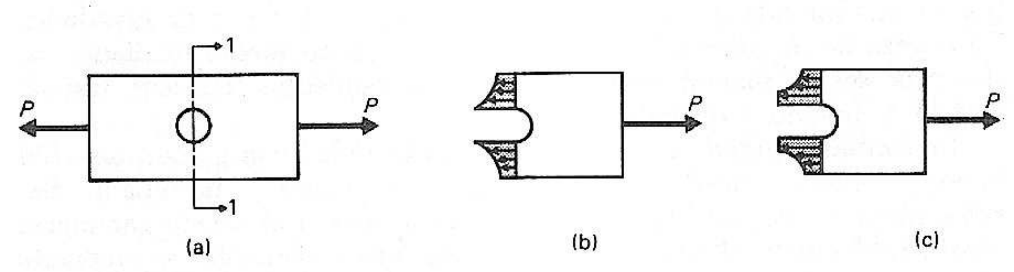


FIGURA 15.2

Los materiales frágiles, como por ejemplo la fundición de hierro tienen muchas aplicaciones. El proyectista deberá ser cuidadoso para evitar aplicarlo en situaciones que den lugar a concentraciones de esfuerzos que puedan producir la falla.

15.4 Ensaye de materiales

Las propiedades mecánicas mencionadas en la sección 15.2 describen cualidades de un material con respecto a ciertas características. Para comparar materiales, se deben tener evaluaciones numéricas de estas cualidades. Se han desarrollado varias pruebas que establecen estas cantidades numéricas para las propiedades mecánicas.

Los resultados de los ensayes hechos sobre un material dado son afectados por cierto número de factores, tales como la rapidez de aplicación de la carga, el tamaño y la forma de los especímenes, y la disposición del aparato. Para permitir una comparación de los resultados de ensayes sobre un material con los obtenidos a partir de ensayes sobre otro material, los procedimientos de ensaye están normalizados. La American Society for Testing Materials (cuya sigla es ASTM) es una organización que establece normas para llevar a cabo los ensayes.

La ASTM realmente efectúa dos funciones principales de normalización. Especifica procedimientos que deben seguirse en los laboratorios de ensaye, y también establece especificaciones de calidad y comportamiento de materiales específicos. Por ejemplo, el acero estructural al que se le da la designación ASTM de A-36 debe ajustarse a requisitos específicos con respecto a la composición química, esfuerzos mínimos de fluencia y de tensión última, propiedades en flexión, porcentaje de alargamiento, marcado, etc. Para asegurarse de que el material designado como acero A-36 cumple estos requisitos, los especímenes se ensayan de acuerdo con un programa definido.

15.5 Máquinas de ensaye

Para ejecutar los ensayes que darán por resultado las cantidades numéricas que miden las propiedades mecánicas, uno debe tener especímenes disponibles, medios para medir deformaciones unitarias y máquinas de ensaye. Las máquinas de ensaye ejecutan dos funciones principales: aplican la carga al espécimen y luego miden la carga aplicada. Para medir los cambios de longitud del espécimen, debidos a la aplicación de la carga, se usan medidores de deformación de varios tipos.

Existen, por supuesto, muchos y diferentes tipos de máquinas para efectuar los diferentes ensayes. Algunas máquinas, llamadas máquinas *para un solo propósito* están diseñadas para efectuar solamente una función particular, tal como el ensaye de dureza o el ensaye de impacto. Otras máquinas se diseñan para ejecutar un cierto número de ensayes diferentes, tales como tensión, compresión y flexión. Las máquinas de este tipo se llaman máquinas de ensaye *universal*. La Fig. 15.3 muestra

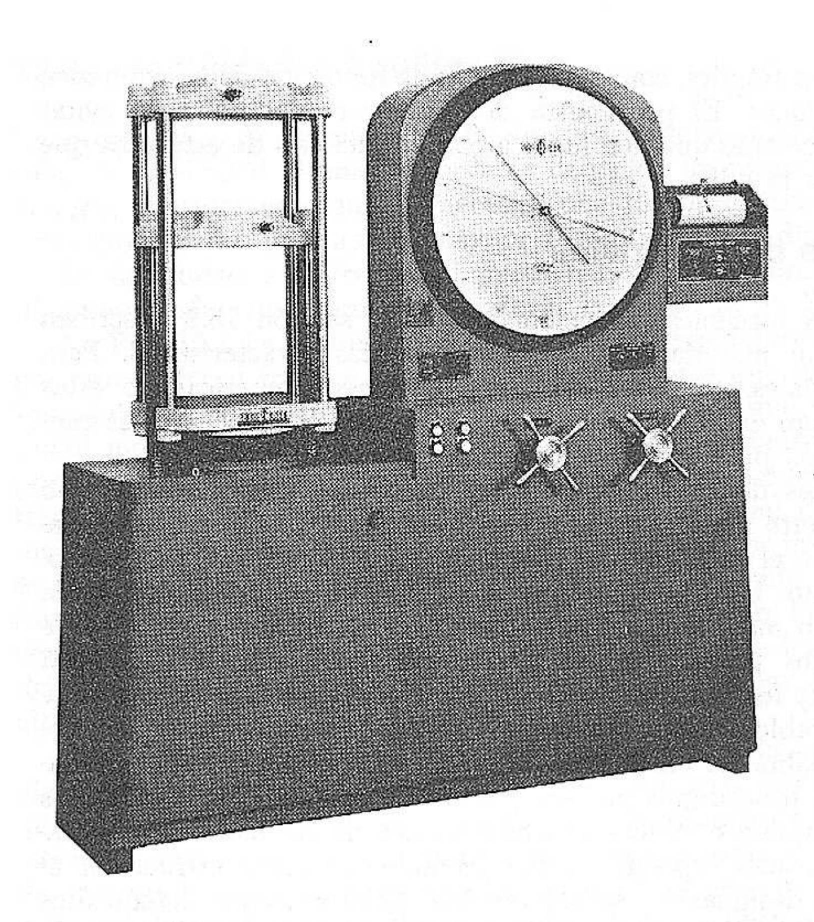


FIGURA 15.3 Una máquina universal de ensaye. (Fotografía cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co.)

una máquina de ensaye universal que es capaz de aplicar cargas hasta de 60 000 lb. Las Figs. 15.4 a 15.6 muestran máquinas de ensaye por impacto, por torsión, y para determinar la dureza.

Por supuesto, es imperativo que una máquina de ensaye aplique la carga con el alineamiento adecuado y a una velocidad uniforme y controlable. La máquina también debe ser capaz de medir exactamente la carga aplicada en las etapas necesarias de carga. Es igualmente importante para el experimentador ser capaz de medir los pequeños cambios de longitud con la exactitud requerida. Para este fin, se usan medidores de deformaciones. Existen muchos tipos de medidores de deformaciones. Su operación puede estar basada en principios mecánicos, ópticos o de resistencia eléctrica.

El principio en que se basan los medidores mecánicos de deformación se muestra en la Fig. 15.7 mediante el esquema de un extensómetro y en la Fig. 15.8 mediante el esquema de un medidor de carátula. El extensómetro está unido al espécimen mediante un aditamento de sujeción y mediante dos patas colocadas dentro de pequeñas marcas perforadas

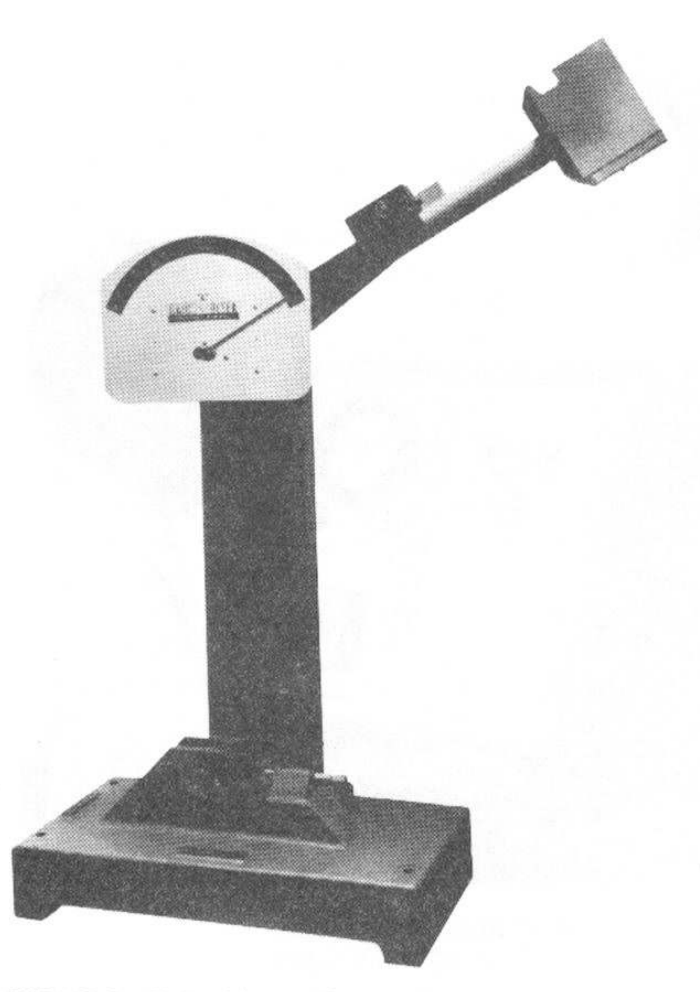


FIGURA 15.4 Una máquina de ensayo al impacto. (Foto cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.)

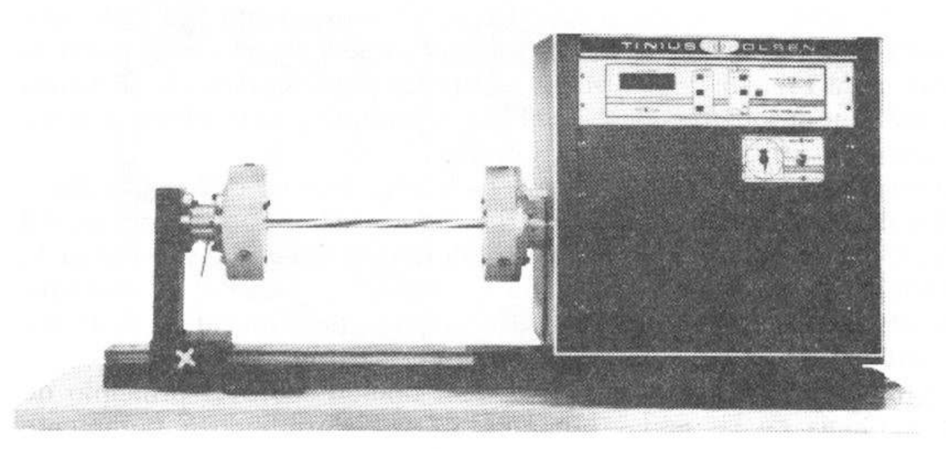


FIGURA 15.5 Una máquina de ensayo a torsión. (Foto cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.)

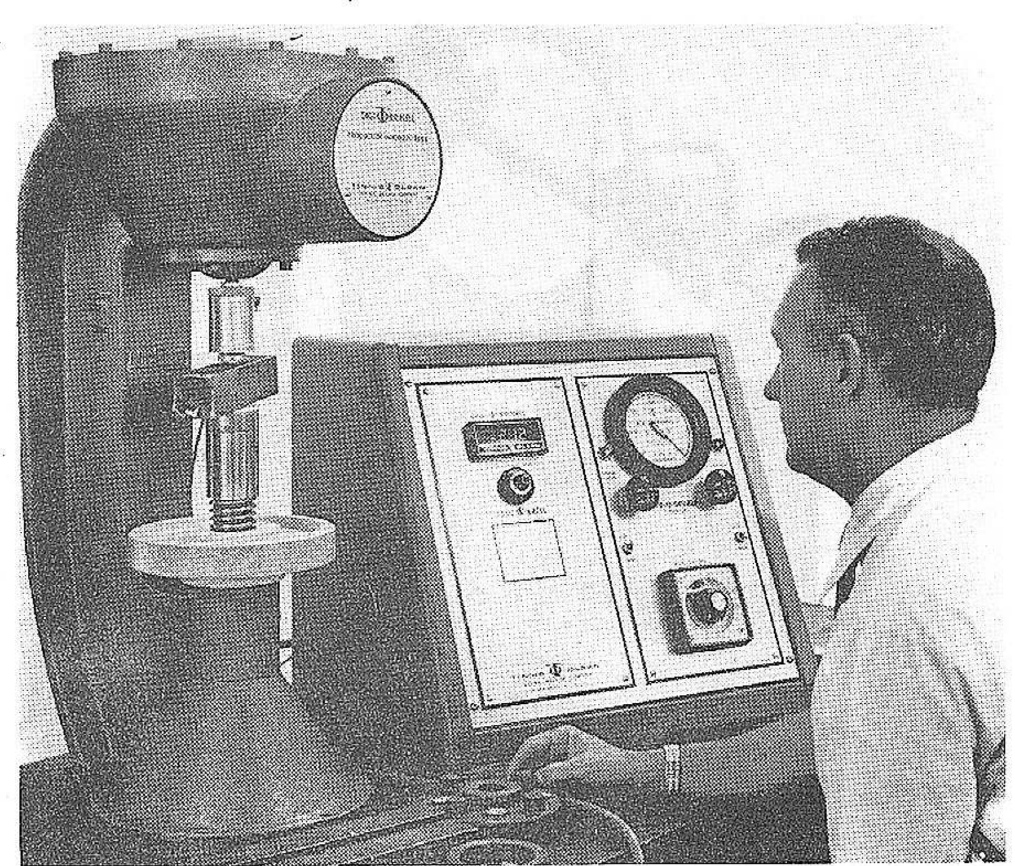


FIGURA 15.6 Una máquina de ensayo de dureza. (Foto cortesía de Tinius Olsen Testing Machines Co., Inc.)

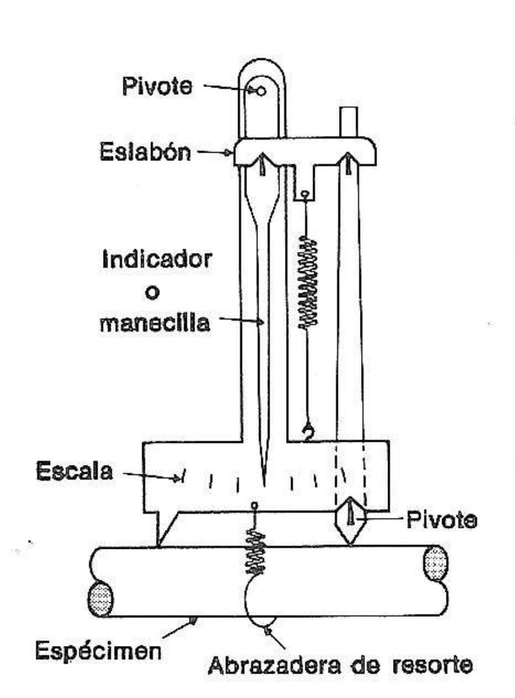


FIGURA 15.7 Esquema de un extensómetro mecánico.

sobre el espécimen. Cuando el espécimen se deforma, el indicador señala sobre la magnitud de la deformación. El movimiento del indicador amplifica la deformación mediante un mecanismo de palancas, como se muestra en la Fig. 15.7. La distancia entre las patas se llama la distancia de escantillón, o longitud de escantillón, y aunque puede variar, son valores comunes los de 1 plg, 2 plg y 8 plg.

El medidor de carátula, mostrado en la Fig. 15.8 no está unido directamente al espécimen, sino que mide las deformaciones por depresión del husillo. Cuando el husillo se mueve hacia dentro, la aguja que indica la deformación se mueve mediante una cremallera y piñón y un mecanismo de engranajes. Se pueden leer directamente deformaciones de 0.001 plg y pueden estimarse deformaciones de 0.0001 plg.

Los medidores de deformación ópticos operan sobre el principio de la interferencia de las ondas luminosas. Los deformímetros puramente ópticos se usan rara vez para medir la deformación de un espécimen. Sin embargo, se usan algunos deformímetros cuya operación está basada en una combinación de principios mecánicos y ópticos. Como estos de-

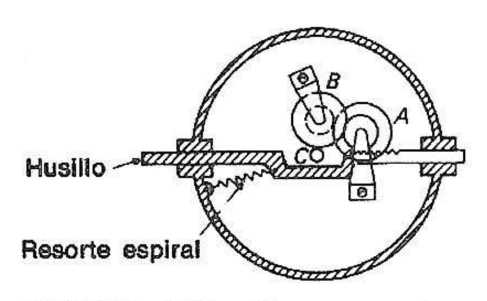


FIGURA 15.8. Esquema de un medidor de carátula.

formímetros no son tan comunes como los mecánicos o los de resistencia eléctrica, no discutiremos sus principios de operación.

Los medidores de deformación que operan sobre el principio de que la resistencia eléctrica de un alambre cambia cuando el alambre se deforma han llegado a ser muy comunes recientemente. De ellos, los medidores de deformación SR-4 producidos por la Baldwin-Lima-Hamilton Corporation son los más comúnmente usados.

El medidor de deformación SR-4 está hecho de un alambre muy delgado, arreglado en una serie de lazos, como se muestra en la Fig. 15.9. El alambre está pegado entre un papel de respaldo (para unirse al espécimen) y una cubierta de fieltro (para protección de los alambres). El alambre del deformímetro es de solamente 1 mil (0.001 plg) de diámetro. Su fabricación, composición y propiedades se controlan cuidadosamente. Se sueldan al alambre del deformímetro alambres de mayor calibre de modo que se puedan hacer las medidas eléctricas sin romper el alambre.

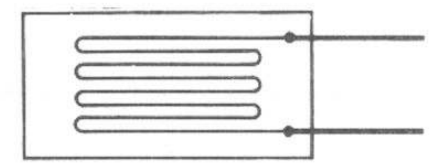


FIGURA 15.9 Esquema de un medidor de deformaciones SR-4.

El deformímetro se pega tan firmemente al espécimen que se está ensayando, que cuando el espécimen se deforma, los alambres del deformímetro sufren la misma deformación. Cuando el diámetro de los alam-

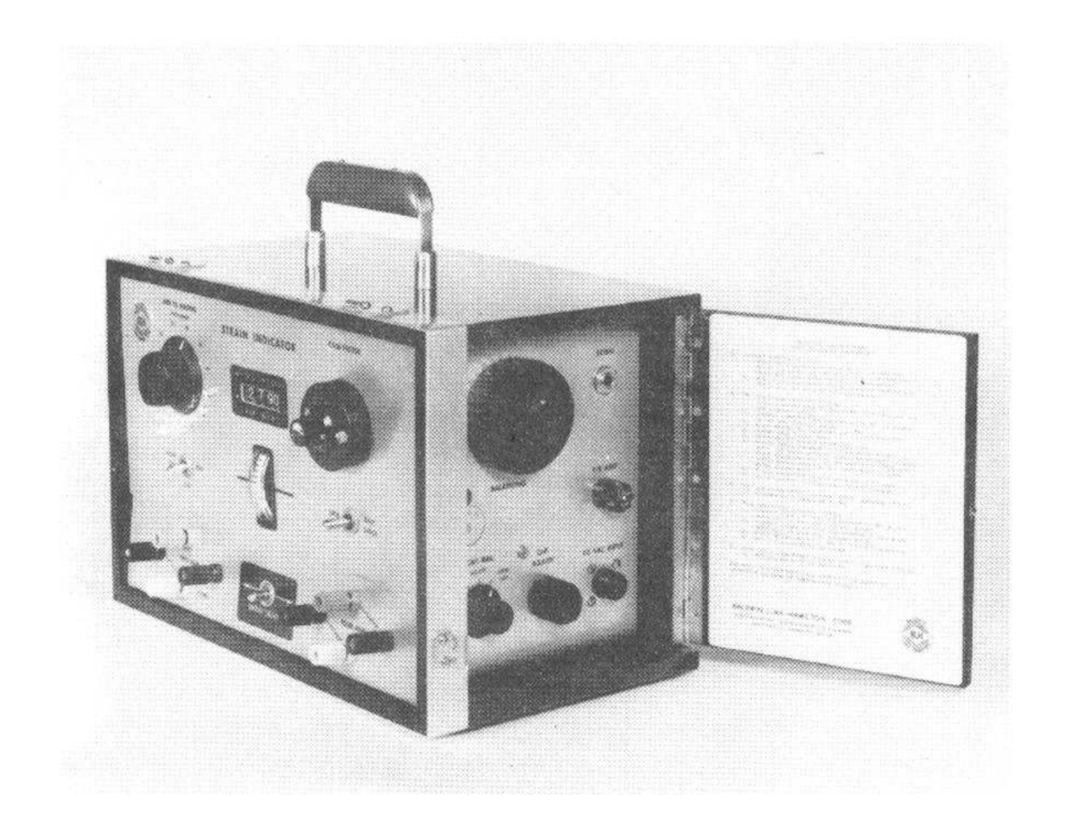


FIGURA 15.10 Un indicador de deformaciones unitarias. (Foto cortesía de la Baldwin-Lima-Hamilton Corporation.)

bres cambia debido a la deformación, la resistencia eléctrica cambia. Este pequeño cambio en la resistencia eléctrica se mide mediante un indicador de deformímetros, como el de la Fig. 15.10.

El indicador de deformímetros opera utilizando el principio del puente de Wheatstone, comúnmente estudiado en física elemental. El indicador convierte las medidas eléctricas en los cambios correspondientes de longitud del espécimen de modo que la deformación unitaria puede leerse directamente sobre la carátula del indicador de deformímetros.

Los deformímetros de resistencia eléctrica están volviéndose cada vez más comunes en el ensaye de materiales. Ofrecen muchas ventajas sobre otros métodos de medida de las deformaciones. Entre las más importantes de estas ventajas están la gran exactitud de la medida de la deformación, la facilidad de instalación y la facilidad de usarse en estructuras remotas o en lugares de difícil acceso. Es decir, un observador puede leer la deformación unitaria sobre un indicador a una distancia considerable del lugar real donde está instalado el propio deformímetro.

APENDICES



Repaso de estática

A.1 Introducción

En el estudio de la mecánica de materiales es necesario tener un conocimiento fundamental de las leyes de la estática. En dicho curso, la solución de un problema se basa principalmente en los conceptos de estática. Repasaremos brevemente aquellos conceptos de estática que son más útiles en la mecánica de materiales.

Este capítulo puede estar o no incluido en los requisitos formales del curso, dependiendo de los conocimientos previos del estudiante. Sin embargo, aunque el capítulo no esté incluido dentro del trabajo del curso, resultará conveniente en el estudio de ciertos temas especializados, o puede considerarse como un recurso conveniente para repasar.

A.2 Fuerzas y vectores

Una fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro. Puede empujar o jalar. Una fuerza tiene tres características, todas las cuales deben conocerse para definirla completamente. Estas características son magnitud, dirección (incluyendo el sentido) y punto de aplicación.

Por ejemplo, considere el hombre de la Fig. A.1 (a) empujando la mesa. La fuerza es la acción de sus manos sobre la mesa. La magnitud de la fuerza es el número de libras o newtons de fuerza con que empuja. La dirección se compone tanto de la dirección angular con respecto a algún eje de referencia (60° con respecto al eje horizontal en este caso) como del sentido (empujando, en vez de jalando). El punto de aplicación es la esquina *A*.

Debido a que una fuerza no puede ser dibujada convenientemente se representa mediante un vector que tiene las mismas características que una fuerza. Es decir, tiene magnitud (longitud del vector a escala), dirección (medida angular de la línea de acción del vector con respecto a algún eje de referencia), sentido (indicado por la posición de la cabeza de flecha) y punto de aplicación.

Los términos "fuerza" y "vector" se intercambian frecuentemente. En tanto que el significado sea claro, esto no causará ningún inconve-

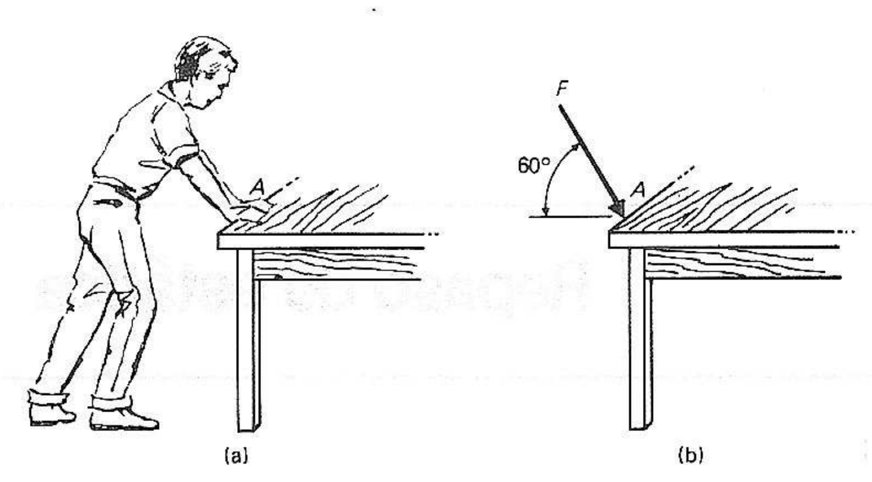


FIGURA A.1

niente. Por ejemplo, la representación de la Fig. A.1 (b) se llama comúnmente una fuerza más bien que un vector. Además, la magnitud de un vector se expresa frecuentemente escribiendo el número de libras, kilolibras, newtons, kilonewtons, etc., a un lado de la flecha, en lugar de trazar el vector a escala. Esto es conveniente en las soluciones analíticas. Debería notarse, sin embargo, que los vectores que tienen tanto magnitud como dirección también se usan para representar otras cantidades, como pares, velocidades, deplazamientos, etc.

Las fuerzas se combinan o se descomponen de varias maneras para facilitar la solución de los problemas. En las secciones siguientes se repasan algunas de las técnicas más útiles para el tratamiento de las fuerzas.

A.3 Resultantes de sistemas de fuerzas concurrentes

La resultante de un sistema de fuerzas cuyas líneas de acción se intersecan en un punto (fuerzas concurrentes) se define como la fuerza única que reemplazará completamente todas las fuerzas originales. Usando la ley del paralelogramo, podemos determinar la resultante, ya sea gráfica o matemáticamente.

Considérense las dos fuerzas mostradas en la Fig. A.2 (a). La resultante, R, de estas fuerzas es la diagonal de un paralelogramo que tenga

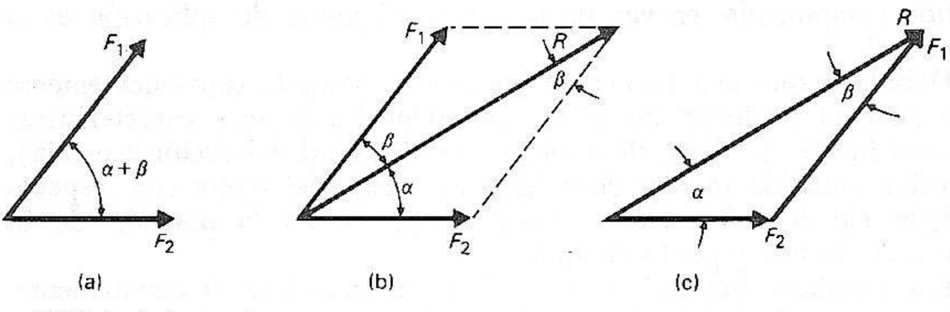


FIGURA A.2

a F_1 y F_2 como dos lados adyacentes (Fig. A.2 b). Como los lados opuestos de un paralelogramo son de igual longitud, solamente se necesita usar la porción triangular mostrada en la Fig. A.2 (c) para determinar la resultante. La magnitud de la resultante R puede determinarse por medios gráficos o usando la ley de los senos o la ley de los cosenos.

A.4 Componentes de una fuerza

La ley del paralelogramo descrita en la sección A.3 es útil para reemplazar dos fuerzas por una sola fuerza, la resultante. Sin embargo, una aplicación más útil de la ley del paralelogramo es la que consiste en descomponer una sola fuerza en dos fuerzas, llamadas las *componentes* de la fuerza.

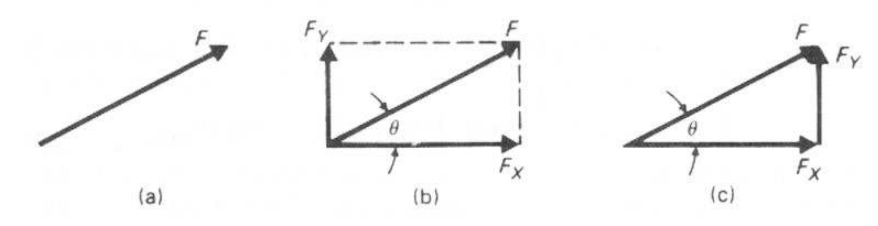


FIGURA A.3

Aunque es posible descomponer cualquier fuerza dada en un número infinito de componentes, el caso en que las líneas de acción de las componentes están en ángulos rectos entre sí tiene el mayor significado práctico. Las dos componentes de una fuerza cuyas líneas de acción están en ángulo recto entre sí se llaman las *componentes rectangulares* de la fuerza. Aplicando la ley del paralelogramo podemos determinar las componentes rectangulares F_X y F_Y de la fuerza F (Fig. A.3). El paralelogramo se convierte en un rectángulo (Fig. A.3 b), y F_X y F_Y se calculan mediante la trigonometría de los triángulos rectángulos (Fig. A.3 c).

La dirección de la fuerza se da en la forma de alguna medida angular, en grados, con respecto a un eje de referencia, como en la Fig. A.4 (a), o mediante la pendiente de la recta, como en la Fig. A.4 (b). Aunque ambos métodos se usan comúnmente, el método de la pendiente es generalmente más conveniente y común para calcular las componentes de una fuerza.

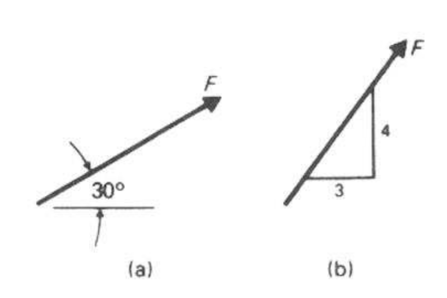


FIGURA A.4

EJEMPLO A.1 Determinar las componentes rectangulares de la fuerza de 100 lb mostrada en la Fig. A.5.

SOLUCION Considerando el triángulo rectángulo de la Fig. A.5 (c), calcu-

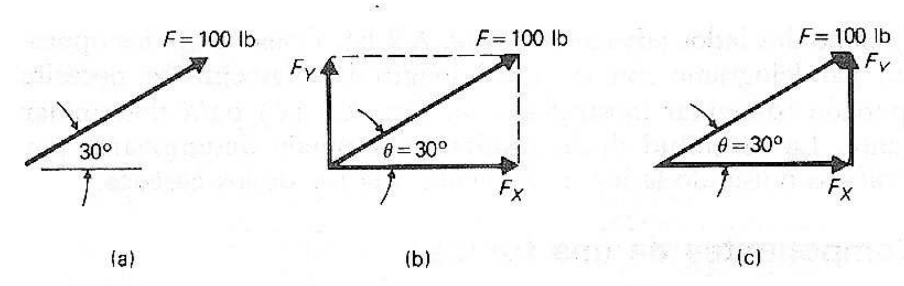


FIGURA A.5

lamos las componentes rectangulares, como sigue:

$$F_X: \quad \cos 30° = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{F_X}{F},$$

$$F_X = F \cos 30° = 100(0.866), \qquad F_X = 86.6 \text{ lb};$$

$$F_Y: \quad \text{sen } 30° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{F_Y}{F},$$

$$F_Y = F \text{ sen } 30° = 100(0.500), \qquad F_Y = 50.0 \text{ lb}.$$

Se recomienda que el lector no memorice las componentes como $F_X = F \cos \theta$ y $F_Y = F$ sen θ, pues el ángulo de referencia puede darse a partir de un eje de referencia distinto al eje horizontal. Si el triángulo rectángulo no puede visualizarse a simple vista, entonces se trazaría sobre un esquema separado para asegurarse que se usan las funciones trigonométricas correctas. ■

EJEMPLO A.2 Determinar las componentes rectangulares de la fuerza de 2 000 N mostrada en la Fig. A.6.

SOLUCION A partir de la Fig. A.6 (c), las componentes son

$$F_X = F \text{ sen } 25° = 2\,000(0.424), \qquad F_X = 848 \text{ N};$$

$$F_Y = F \cos 25° = 2\,000(0.907), \qquad F_Y = 1\,814 \text{ N}. ■$$

El segundo método para indicar la dirección de una fuerza es mediante la pendiente de la línea de acción. La solución es semejante a la

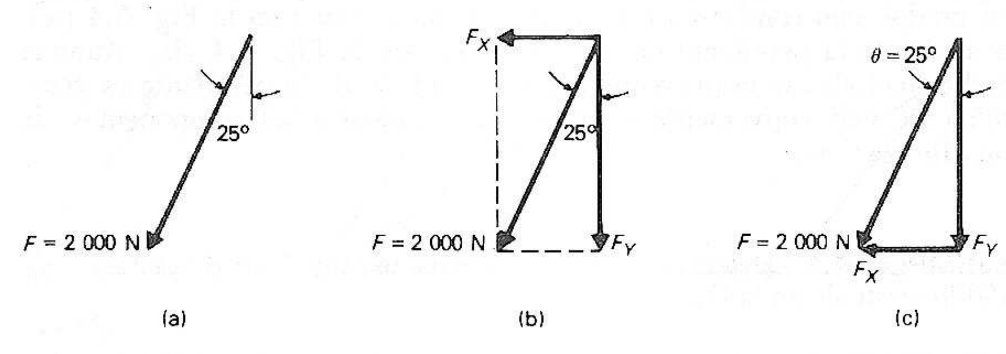


FIGURA A.6

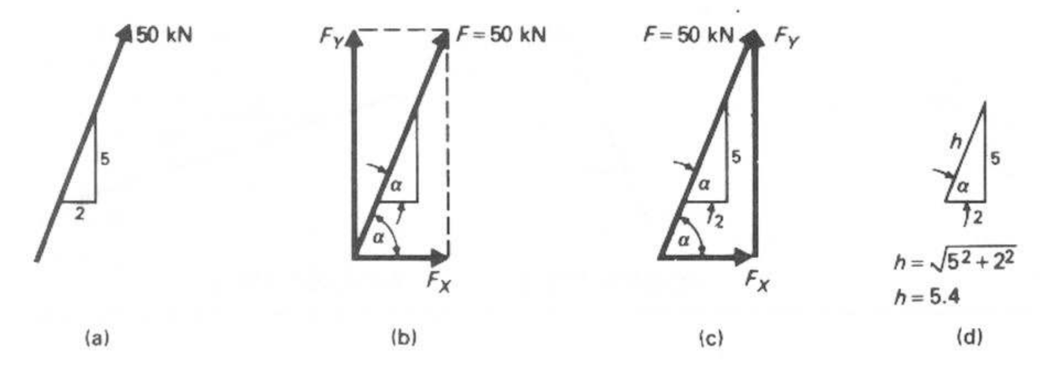


FIGURA A.7

dada anteriormente, excepto que no se necesitan las funciones trigonométricas.

EJEMPLO A.3 Determinar las componentes rectangulares de la fuerza de 50 kN indicada en la Fig. A.7.

SOLUCION A partir de la Fig. A.7 (c),

$$F_X = F \cos \alpha, \qquad F_Y = F \operatorname{sen} \alpha.$$

Como el triángulo que indica la pendiente es semejante al triángulo de fuerzas, se usan las definiciones básicas de la trigonometría para determinar cos α y sen α:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2}{5.4}, \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{5.4}.$$

Conociendo las funciones trigonométricas, determinamos las componentes como sigue:

$$F_X = F \cos \alpha = 50 \frac{2}{5.4}, \qquad F_X = 18.5 \text{ kN};$$

$$F_Y = F \operatorname{sen} \alpha = 50 \frac{5}{5.4}, \qquad F_Y = 46.5 \text{ kN}.$$

En este ejemplo se obtuvieron los valores trigonométricos directamente por definición. Para facilitar el cálculo de las componentes, notamos que la componente horizontal siempre tiene la magnitud de la fuerza multiplicada por la relación del cateto horizontal del triángulo de la pendiente a la hipotenusa de dicho triángulo. Análogamente, la componente vertical siempre tiene la magnitud de la fuerza multiplicada por la relación del cateto vertical del triángulo de la pendiente a la hipotenusa de dicho triángulo. ∎

Problemas

A.1-A.4 Determinar las componentes rectangulares de las fuerzas indicadas en las Figs. PA.1 a PA.4.

4 000 N
50°

FIGURA PA.1

390 lb
5
12

FIGURA PA.2

7
3
10 kN

FIGURA PA.3

24
7
20 000 N

FIGURA PA.4

A.5 Uso de componentes para determinar resultantes

La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes puede determinarse sumando las componentes rectangulares de las fuerzas. El procedimiento general consiste en descomponer todas las fuerzas en sus respectivas componentes rectangulares y después sumar esas componentes vectorialmente. La componente horizontal de la resultante es la suma de las componentes horizontales de las fuerzas; la componente vertical de la resultante es la suma de las componentes verticales de las fuerzas. Establecido matemáticamente:

$$R_X = \sum F_X, \qquad R_Y = \sum F_Y.$$

EJEMPLO A.4 Determinar la resultante de las tres fuerzas mostradas en la Fig. A.8.

SOLUCION Las componentes rectangulares de las fuerzas de la Fig. A.8 (a) se muestran en la Fig. A.8 (b). Estas componentes se obtuvieron mediante los métodos descritos en la sección A.4.

Las componentes de la resultante son:

$$R_X = \sum F_X = 260 + 120 - 240, \qquad R_X = 140 \text{ lb}\leftarrow;$$

$$R_Y = \sum F_Y = 150 + 100 - 160, \qquad R_Y = 90 \text{ lb}\uparrow.$$

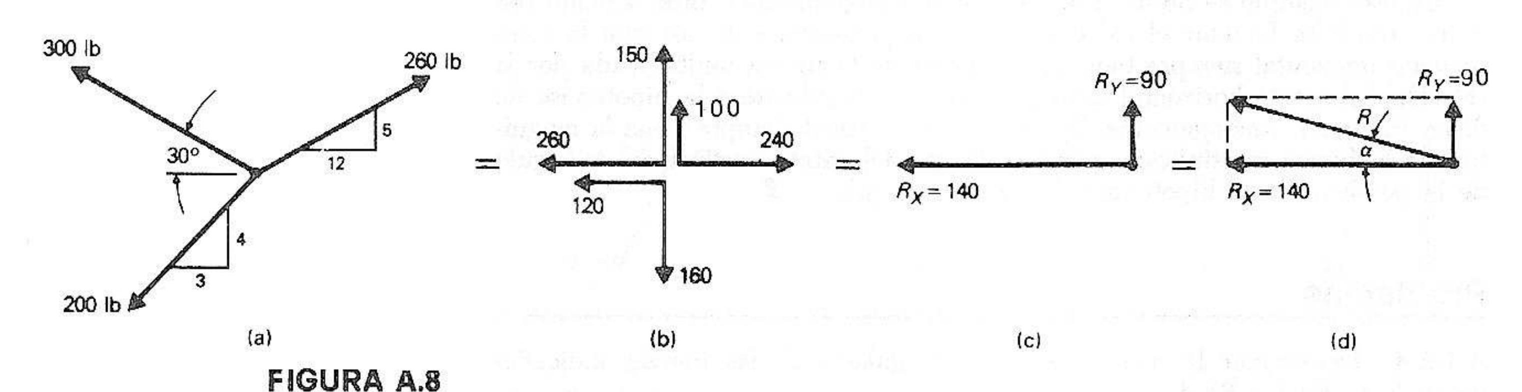


FIGURA A.8

Las fuerzas mostradas en la Fig. A.8 (c) son las componentes de la resultante. Si se quiere determinar la resultante misma, estas dos componentes permiten obtenerla usando la ley del paralelogramo, como se discutió en la sección A.4. La resultante se muestra en la Fig. A.8 (d), y se calcula como:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} = \sqrt{(140)^2 + (90)^2}, \qquad R = 166.4 \text{ lb.}$$

La dirección de la resultante puede definirse mediante el ángulo α de la Fig. A.8 (d), y se calcula como

$$\tan \alpha = \frac{R_Y}{R_X} = \frac{90}{140} = 0.643,$$

$$\alpha = 32.74°. \quad ■$$

Problemas

A.5-A.8 Determinar la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas concurrentes indicadas en las Figs. PA.5 a PA.8.

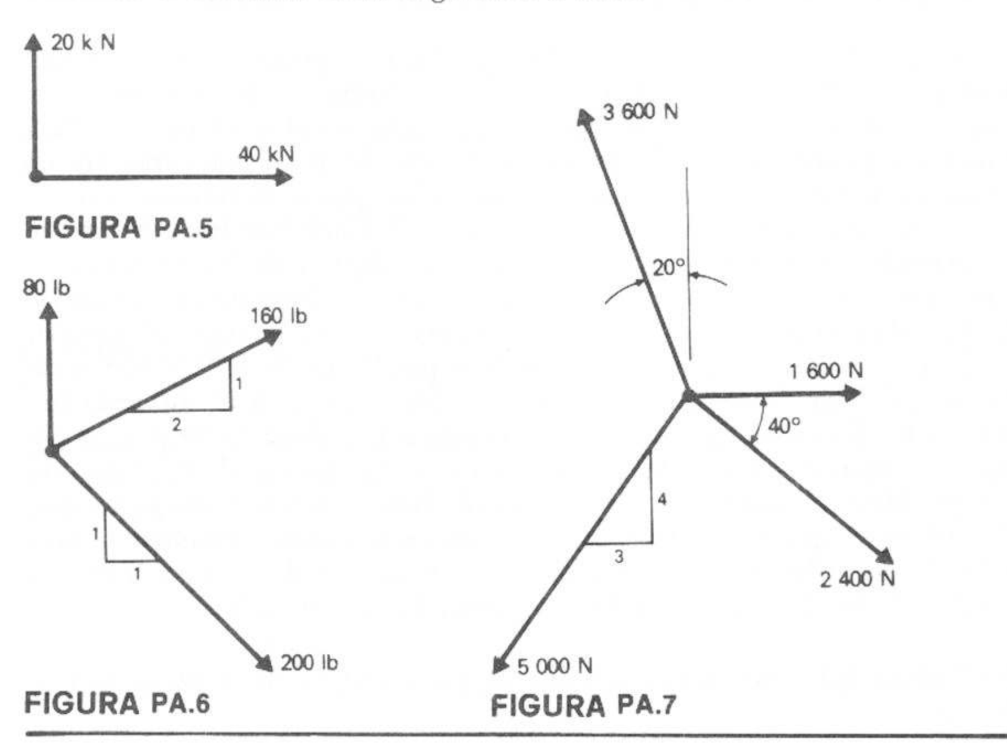


FIGURA PA.5

FIGURA PA.6

FIGURA PA.7

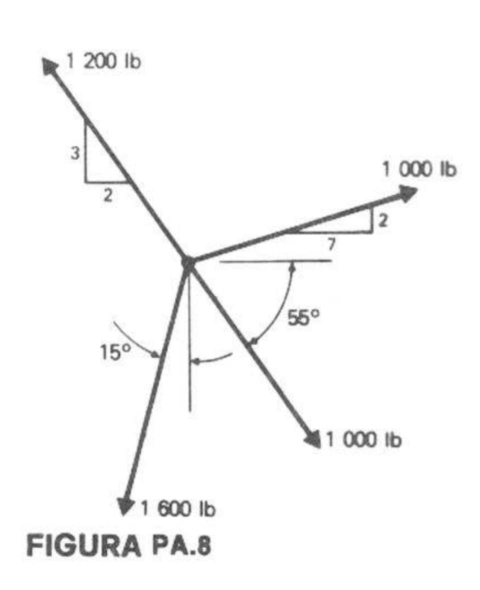


FIGURA PA.8

A.6 Equilibrio de fuerzas concurrentes

Si un cuerpo está en equilibrio, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero. Si este es el caso, las ecuaciones de la sección A.5 se convierten en:

$$\sum F_X = 0, \tag{A.1}$$

$$\sum F_Y = 0. \tag{A.2}$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones generales de equilibrio para sistemas de fuerzas concurrentes. Se aplican a las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo o moviéndose sobre una línea recta con velocidad constante. Como sólo se dispone de dos ecuaciones, no pueden determinarse más de dos incógnitas en un sistema de fuerzas concurrentes en un plano.* Si ocurren más de dos incógnitas en un sistema de fuerzas concurrentes, no pueden determinarse todas las incógnitas a partir de las ecuaciones de la estática, solamente. Los problemas de este tipo se describen como estáticamente indeterminados.

Los pasos a seguir en la solución de problemas que involucran equilibrio de fuerzas concurrentes son:

1. Se traza un diagrama de cuerpo libre.
2. Se descomponen todas las fuerzas en componentes rectangulares.
3. Se aplican las ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_X = 0$, $\Sigma F_Y = 0$) a las componentes de las fuerzas.
4. Se resuelve algebraicamente el sistema de ecuaciones.

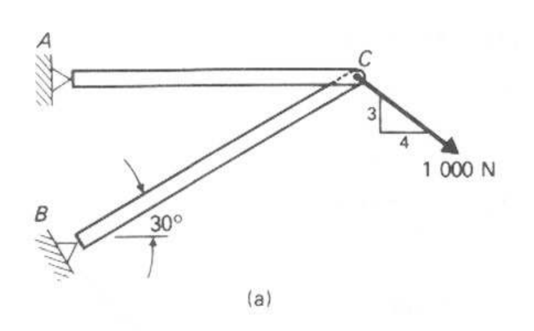
En la solución de problemas de equilibrio, el primer paso es el más importante. Para cualquier problema, el estudiante debería hacer un esquema indicando todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para fuerzas concurrentes, el diagrama de cuerpo libre se convierte en un esquema de todas las fuerzas que actúan en un punto de intersección.

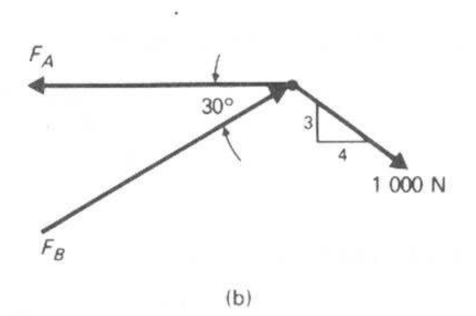
Al dibujar diagramas de cuerpo libre, se hallará que frecuentemente es imposible suponer el sentido correcto de algunas de las fuerzas desconocidas. Si esto ocurre, se supone el sentido (colocando la cabeza de flecha sobre el vector) de la fuerza desconocida. Si el signo algebraico de la respuesta es negativo, el sentido supuesto de la fuerza fue incorrecto; es decir, la fuerza actúa en dirección opuesta a la supuesta inicialmente. En casos de este tipo, es práctica útil dejar la respuesta negativa y marcar un círculo en la cabeza de flecha en el diagrama de cuerpo libre. El círculo en la cabeza de flecha significa entonces que el sentido es opuesto al mostrado. Es una mala práctica cambiar el sentido de las cabezas de flecha sobre el diagrama de cuerpo libre sin cambiar todos los signos algebraicos afectados en los cálculos.

EJEMPLO A.5 Determinar la fuerza en los miembros *AC* y *BC* de la Fig. A.9 (a).

SOLUCION Siguiendo los pasos de la solución descrita anteriormente, determinemos las fuerzas desconocidas trazando primero el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas (Fig. A.9b) y después descomponiendo esas fuerzas en componentes (Fig. A.9 c). Como las fuerzas en los miembros *AC* y *BC* se desconocen, se usan las letras F_A y F_B para indicar su magnitud. El sentido de las

* Si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo no son coplanares; es decir, no todas quedan en un sólo plano, se dispone de una tercera ecuación, $\Sigma F_Z = 0$. lo cual permite la determinación de una tercera incógnita.





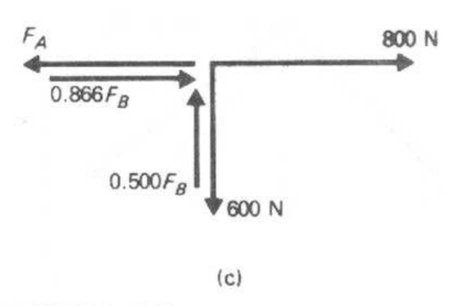


FIGURA A.9

fuerzas se supone como el mostrado en la Fig. A.9 (b) y (c). Si el signo algebraico de F_A y F_B resulta ser positivo, los sentidos supuestos son correctos. Considerando la Fig. A.9 (c):

$$\sum F_Y = 0: \qquad 0.5F_B - 600 = 0,$$

$$F_B = 1\,200 \text{ N};$$

$$\sum F_X = 0: \qquad F_A - 0.866F_B - 800 = 0$$

$$F_A = 800 + 0.866(1\,200)$$
$$F_A = 1\,840 \text{ N}.$$

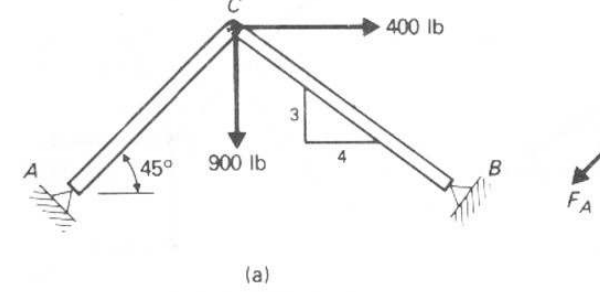
En este caso, los sentidos de F_A y F_B mostrados en los diagramas de cuerpo libre fueron correctos. El miembro AC está en tensión y BC está en compresión.

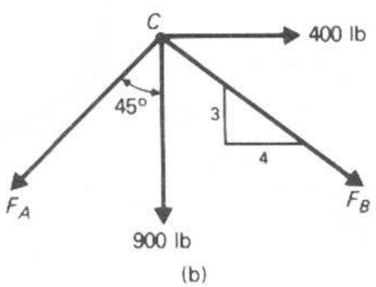
EJEMPLO A.6 Determinar las fuerzas en los miembros AC y BC de la estructura mostrada en la Fig. A.10 (a).

SOLUCION Los diagramas de cuerpo libre de las fuerzas y las componentes de las fuerzas se muestran en la Fig. A.10 (b) y (c). Nuevamente, suponemos el sentido de las fuerzas desconocidas F_A y F_B como se muestra en los diagramas de cuerpo libre. Aplicando las ecs. (A.1) y (A.2) a la Fig. A.10 (c) se llega a:

$$\sum F_X = 0: \qquad 0.800F_B - 0.707F_A + 400 = 0;$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad 0.600F_B + 0.707F_A + 900 = 0.$$





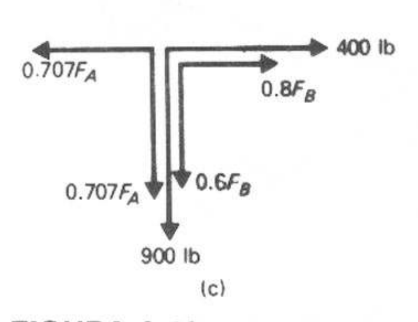


FIGURA A.10

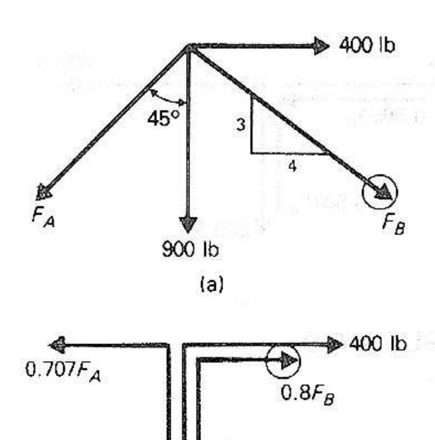


FIGURA A.11

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} 0.800F_B - 0.707F_A = -\ 400 \\ 0.600F_B + 0.707F_A = -\ 900 \end{cases}$$
$$1.4 \quad F_B \qquad = -1\,300,$$
$$F_B = -\ 930 \text{ lb.}$$

La fuerza F_A es, entonces:

$$0.600(-930) + 0.707F_A = -500,$$
$$0.707F_A = -500 + 558,$$
$$F_A = +58 \text{ lb.}$$

En este caso, F_B tiene signo negativo, lo que significa que su sentido, tal como se supuso en los diagramas de cuerpo libre anteriores, era incorrecto. Las cabezas de flecha sobre el cuerpo libre original pueden marcarse con un círculo para indicar que su sentido no estaba correcto. En la Fig. A.11 (a) y (b) se vuelven a dibujar los diagramas de cuerpo libre para ilustrar este hecho. Esto se hace simplemente para indicar el procedimiento, y los diagramas adicionales no se necesitan en la solución de problemas. ■

Problemas

A.9-A.14 Determinar las fuerzas en los miembros *AC* y *BC* en las Figs. PA.9 a PA.14. Indicar si los miembros están en tensión o en compresión.
A.15 Un cilindro que pesa 1 000 lb se apoya entre dos paredes, como se indica en la Fig. PA.15. Determinar la fuerza de las paredes sobre el cilindro en los dos puntos de contacto.
A.16 Determinar la fuerza en el miembro *CD* del sistema indicado en la Fig. PA.16. El miembro *CD* tiene 1 m de longitud.

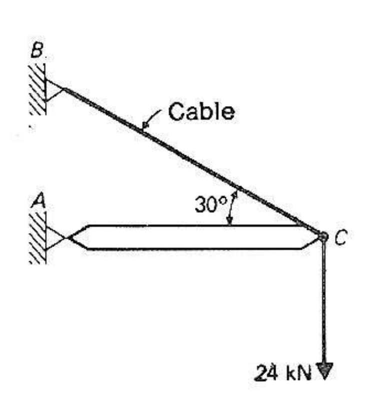


FIGURA PA.9

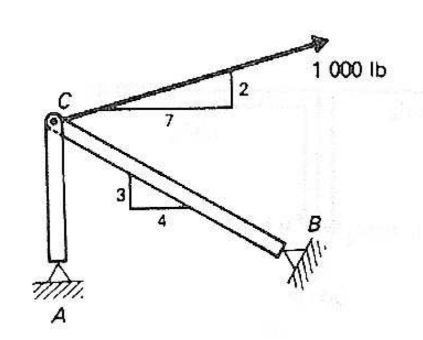


FIGURA PA.10

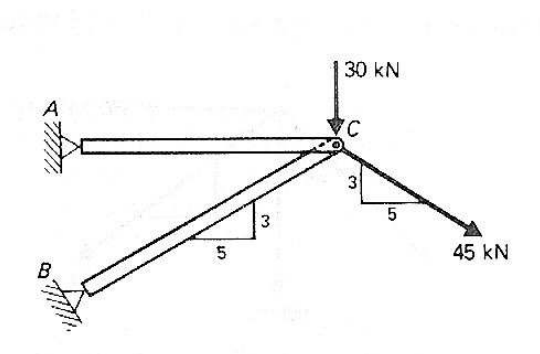


FIGURA PA.11

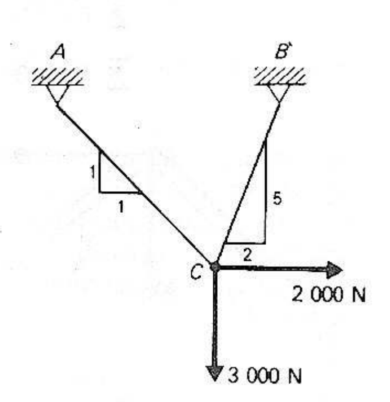


FIGURA PA.12

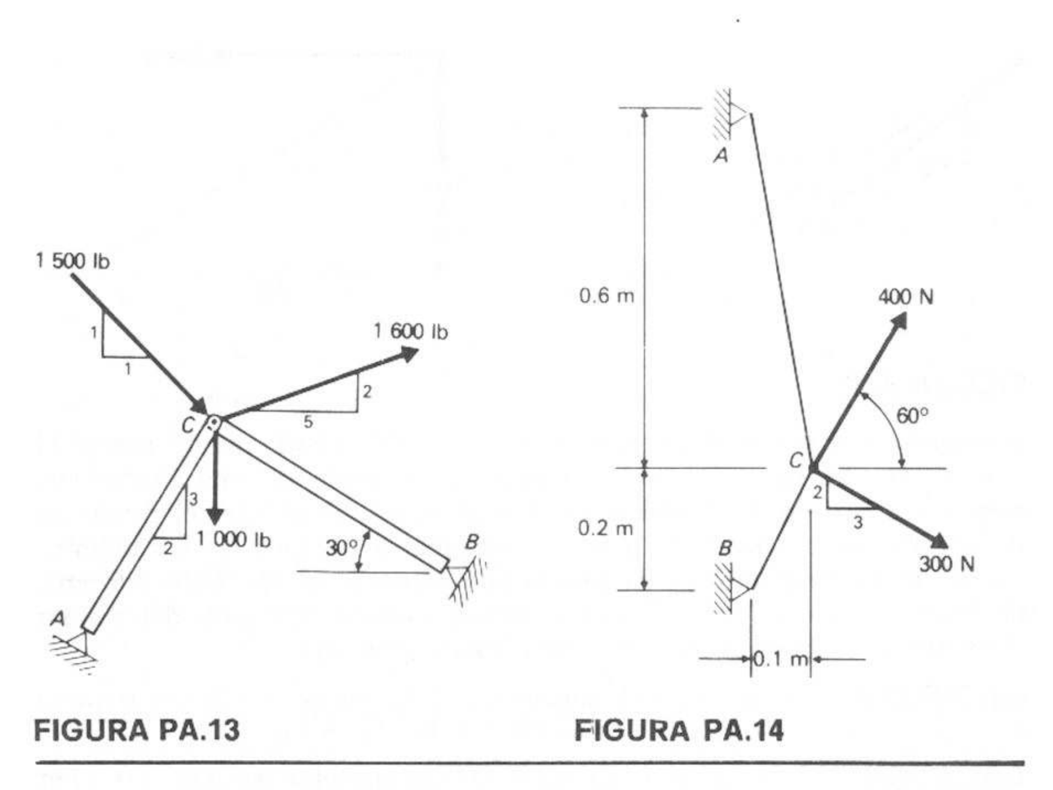


FIGURA PA.13

FIGURA PA.14

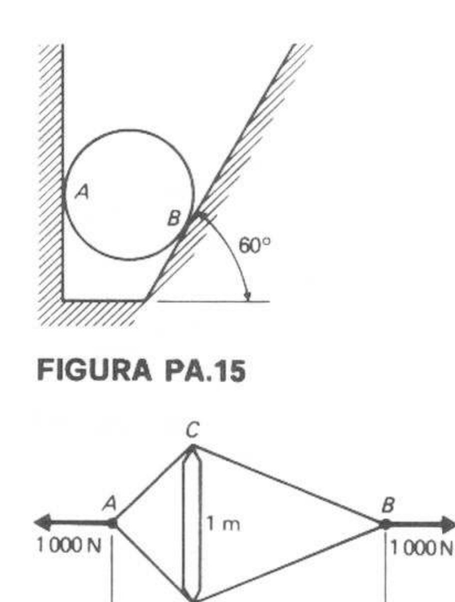


FIGURA PA.15

FIGURA PA.16

A.7 Momento de una fuerza

Un concepto importante en la solución de problemas sobre sistemas de fuerzas no concurrentes (es decir, cuando no todas las fuezas se intersecan en un punto) es el del momento de una fuerza. El *momento de una fuerza* se define como la tendencia de la fuerza a girar alrededor de algún eje. La magnitud del efecto de giro de la fuerza alrededor de un eje se llama la *intensidad del momento y se define como* $\boldsymbol{M = Fd}$.

$$M = Fd,$$

donde

M = intensidad del momento, en pies-lb, o en N · m,
F = magnitud de la fuerza considerada, en lb o en N,
d = distancia perpendicular del eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, en pies o en m.

Las unidades de un momento son fuerza-distancia, tales como lb-pie, klb-pie, lb-plg, N · m, etc.

El momento de la fuerza de la Fig. A.12 con respecto al eje que pasa por A es $M_A = Fd_A$, y el momento de la fuerza con respecto a un eje que pasa por B es $M_B = Fd_B$. Un momento, similarmente a una fuerza, tiene sentido. El sentido de M_A es el del giro de las manecillas del reloj, mientras que el de M_B es contrario al del giro de las manecillas del reloj.

La determinación de la distancia d a menudo involucra bastante

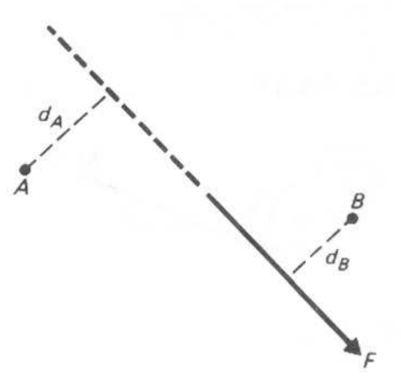


FIGURA A.12

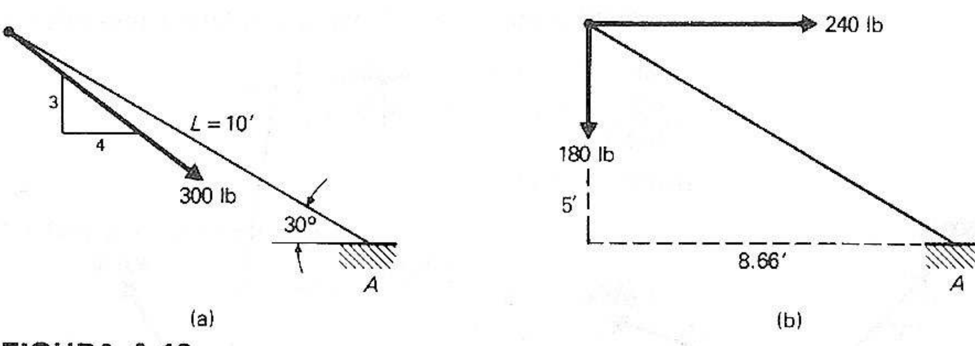


FIGURA A.13

geometría y trigonometría. Para evitar esta dificultad, puede usarse el teorema de Varignon y así determinar el momento de una fuerza con respecto a un eje. El teorema de Varignon establece que el momento de una fuerza con respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al eje. Este teorema, ilustrado en el ejemplo A.7, es un método conveniente para determinar el momento de fuerzas oblicuas con respecto a un eje.

EJEMPLO A.7 Determinar el momento de la fuerza de 300 lb con respecto a un eje que pasa por *A*, como se muestra en la Fig. A.13.

SOLUCION La fuerza se descompone en componentes rectangulares (Fig. A.13 b). El momento de estas componentes con respecto a *A* es igual al momento de la fuerza original con respecto a *A*. Sin embargo, la determinación de las distancias perpendiculares es considerablemente más fácil. Calculamos el momento con respecto a *A*, como

$$M_A = 180(8.66) - 240(5)$$

$= 360$ lb-pie, sentido contrario al del giro de las manecillas del reloj. ■

Problemas

A.17-A.20 Determinar el momento de la fuerza con respecto a los puntos *A* y *B* en las Figs. PA.17 a PA.20.

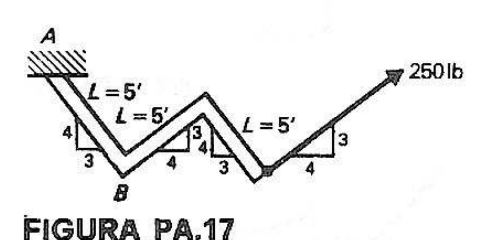


FIGURA PA.17

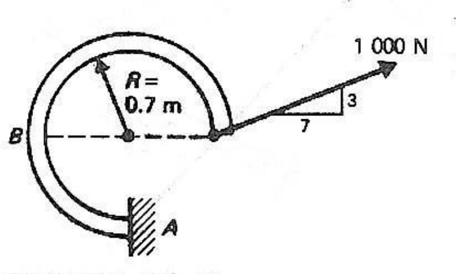


FIGURA PA.18

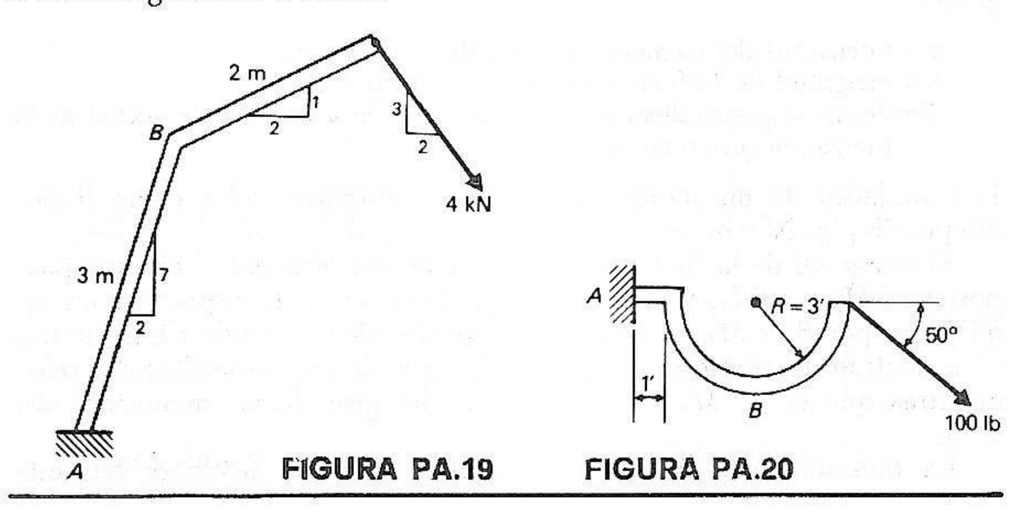


FIGURA PA.19 FIGURA PA.20

A.8 Pares

Un *par* se define como dos fuerzas, iguales en magnitud, de sentidos opuestos, con líneas de acción paralelas, separadas una cierta distancia. La Fig. A.14 muestra un par. La *intensidad de un par* es una medida de su tendencia a girar, y se define como $M = Fd$. La distancia d es la distancia perpendicular entre las fuerzas.

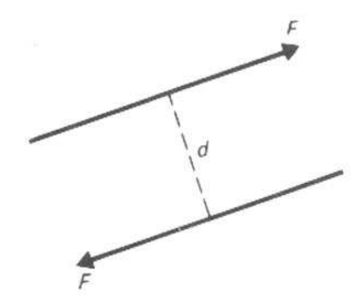


FIGURA A.14

Un par y un momento, tienen ambos una tendencia a la rotación. Aunque a ambos se les asigna la misma letra M, conceptualmente son ligeramente diferentes. Para ilustrar esta diferencia, consideremos la barra de la Fig. A.15 (a). En el diagrama de cuerpo libre de esta barra (Fig. A.15 (b), R_V es la reacción vertical de la mano, y las fuerzas F indican el par.

La fuerza de 60 N aplicada en B tiende a hacer girar a la barra en el sentido de las manecillas del reloj. El producto de esta fuerza por la distancia perpendicular a partir de algún punto, tal como el A, sería el momento con respecto a A. Este momento es resistido por el par aplicado en A, que actúa en sentido contrario al del giro de las manecillas del reloj para mantener la barra en equilibrio.

Debido a que frecuentemente es difícil determinar las fuerzas reales y las distancias de un par, y puesto que generalmente sólo se necesita conocer su intensidad, es práctica común representar el par mediante una línea curva, como en la Fig. A.15 (c). La línea curva y la cabeza de flecha representan el par y su sentido, mientras que el valor numérico indica su intensidad. Así, la Fig. A.15 (c) sería otro método (preferible) para indicar el par en A. Se usa esta representación de un par en todo el libro.

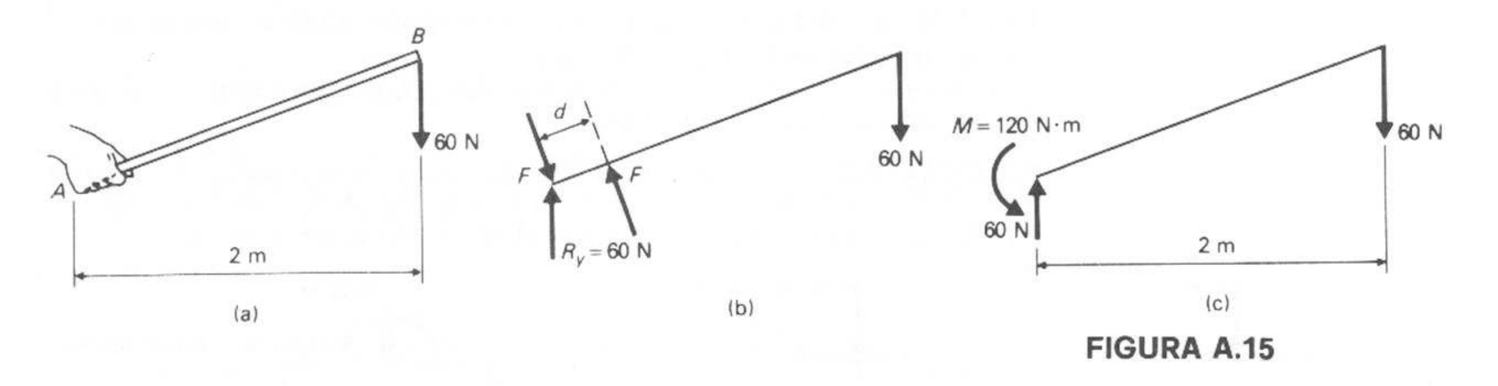


FIGURA A.15

A.9 Descomposición de una fuerza en otra fuerza que pasa por otro lugar y un par

A menudo, debemos estudiar el efecto de una fuerza en un lugar diferente a aquel donde tiene su punto real de aplicación. Cuando debe analizarse el efecto de la fuerza original y su punto de aplicación, es

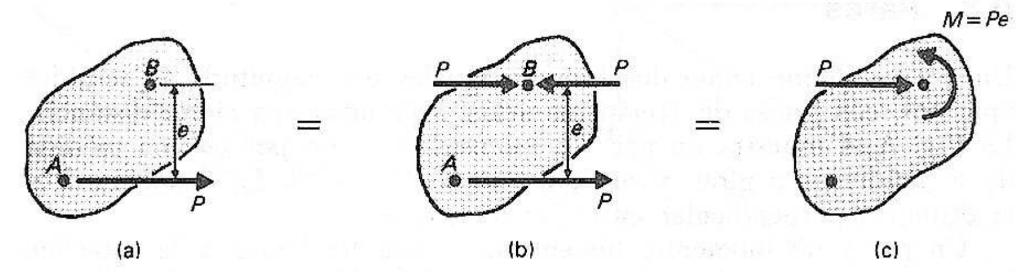


FIGURA A.16

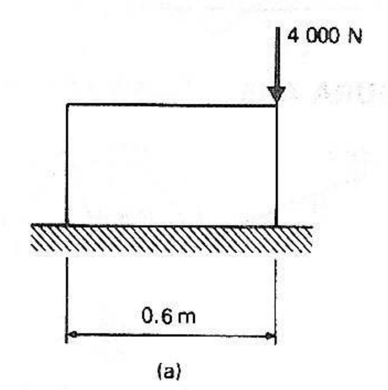
preciso desarrollar un equivalente a la fuerza original. Para hacer equivalente el efecto sobre el cuerpo al de las condiciones originales, el sistema de fuerzas debe modificarse. Esta técnica de modificación del sistema de fuerzas se ilustra en la Fig. A.16.

Consideremos cualquier cuerpo, como el de la Fig. A.16 (a), con una fuerza P aplicada en el punto A. Supongamos que por alguna razón se quiere considerar la fuerza aplicada en B en vez de en A. Sin embargo, el efecto sobre el cuerpo debe ser equivalente. Se aplican en B (Fig. A.16 b) dos fuerzas iguales y opuestas de magnitud P, que tienen una línea de acción paralela a la de la fuerza original. Estas fuerzas, son iguales en magnitud pero de sentidos opuestos y no tienen efecto sobre el cuerpo. Cuando consideramos las tres fuerzas mostradas en la Fig. A.16 (b), la fuerza que actúa hacia la derecha en A o la fuerza que actúa hacia la izquierda en B constituyen un par de intensidad Pe. La fuerza P que actúa hacia la derecha en B se conserva.

Esta técnica ha modificado, en efecto, el sistema de fuerzas original y lo ha convertido en una fuerza en B (lo que se deseaba) y un par de intensidad $M = Pe$. Este nuevo sistema de fuerzas mostrado en la Fig. A.16 (c), tiene exactamente el mismo efecto sobre el cuerpo que el sistema original de la Fig. A.16 (a).

Los ejemplos A.8 y A.9 ilustran este procedimiento e indican algunas de las aplicaciones de esta técnica.

EJEMPLO A.8 Una fuerza de 4 000 N se aplica a una arista de un poste corto de 0.6 m de ancho, como se indica en la Fig. A.17 (a). Descomponer esta fuerza en una fuerza que pase por el centro del poste, y un par.



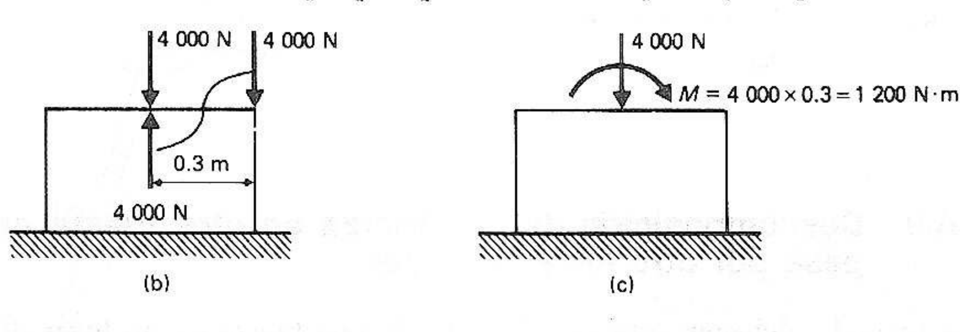


FIGURA A.17

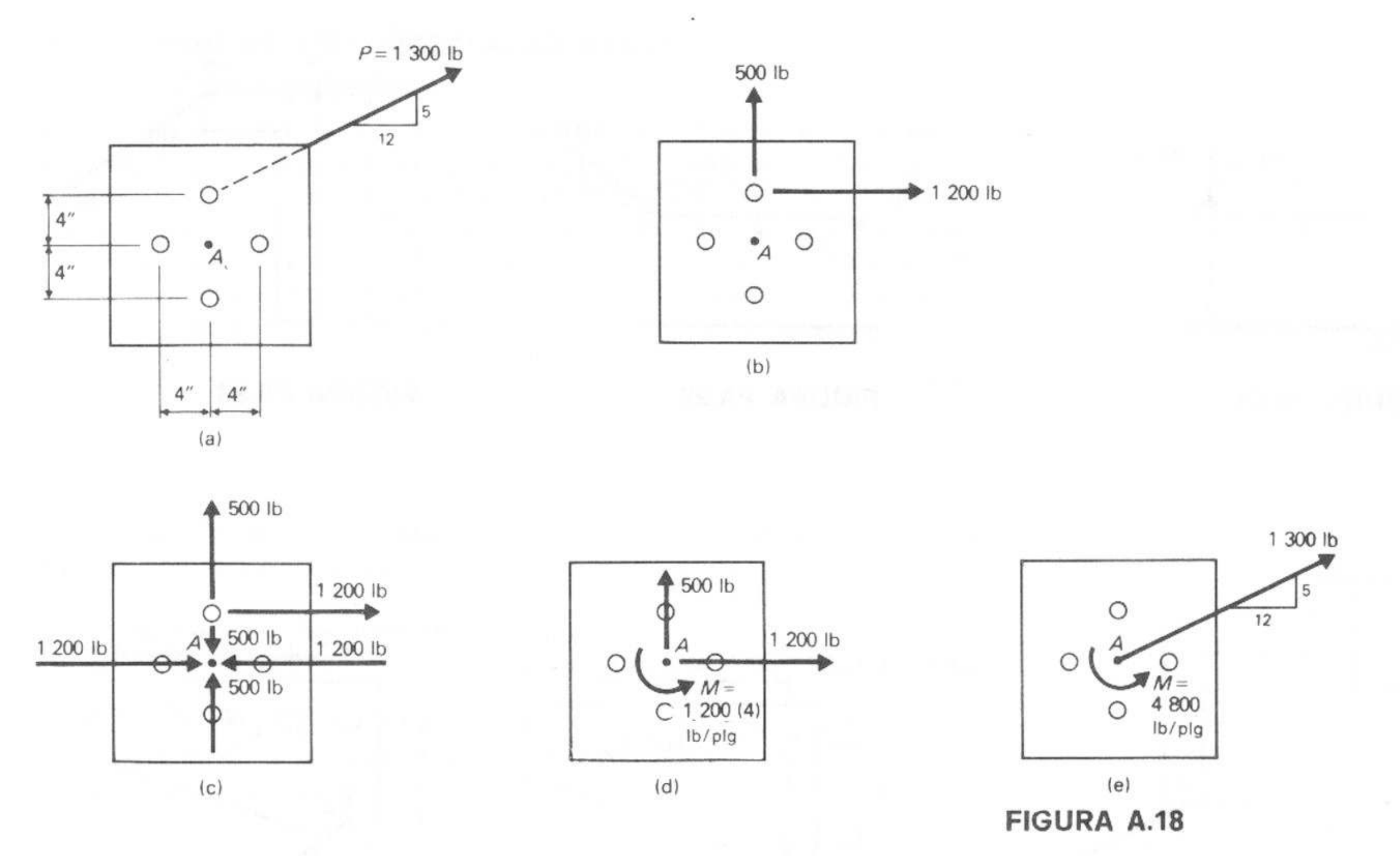


FIGURA A.18

SOLUCION Se aplican en el centro dos fuerzas iguales y opuestas, de 4 000 N lb, como se muestra en la Fig. A.17 (b). La fuerza original y la fuerza hacia arriba en el centro constituye un par. Este par y la fuerza hacia abajo que queda en el centro se muestran en la Fig. A.17 (c).

EJEMPLO A.9 Una fuerza $P = 1\,300$ lb se aplica a una placa plana que tiene cuatro tornillos (Fig. A.18). Descomponer la fuerza en una fuerza que pasa por el centro A del grupo de tornillos y un par.

SOLUCION Por conveniencia, la fuerza de 1 300 lb puede descomponerse en componentes en cualquier punto a lo largo de su línea de acción. En este caso la fuerza se descompone en componentes en el remache superior, como se muestra en la Fig. A.18 (b). En *A* se aplican fuerzas iguales y opuestas de 500 lb y 1 200 lb (Fig. A.18 c). Se desarrollan pares de 4 800 lb-plg y 0 lb-plg. Estos pares y las fuerzas restantes se muestran en la Fig. A.18 (d) y (e).

Problemas

A.21-A.28 Descomponer la fuerza aplicada en el punto *A* en una fuerza aplicada en *B* y un par, en las Figs. PA.21 a PA.28.

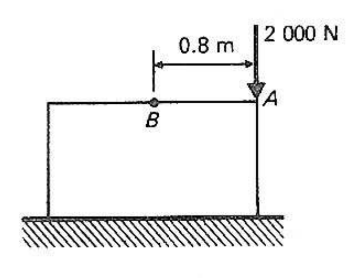


FIGURA PA.21

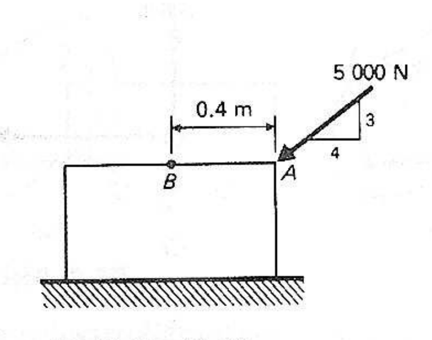


FIGURA PA.22

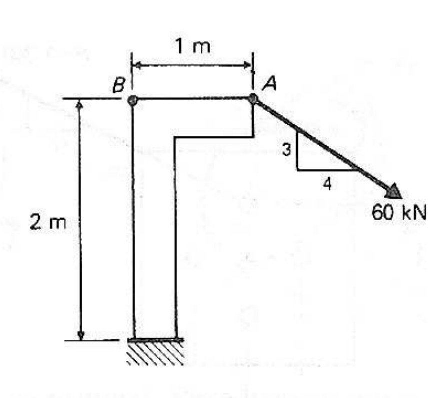


FIGURA PA.23

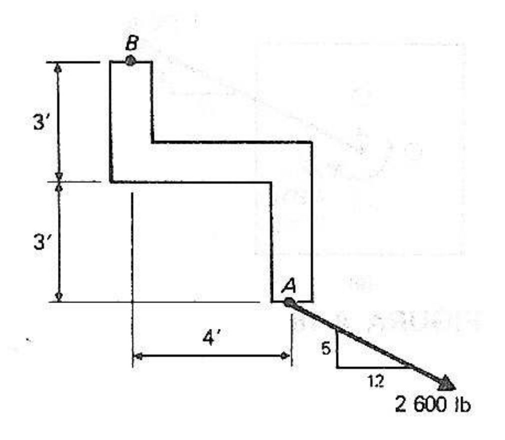


FIGURA PA.24

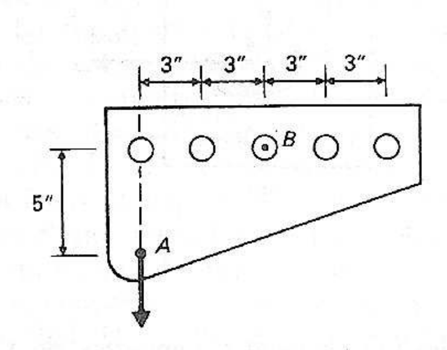


FIGURA PA.25

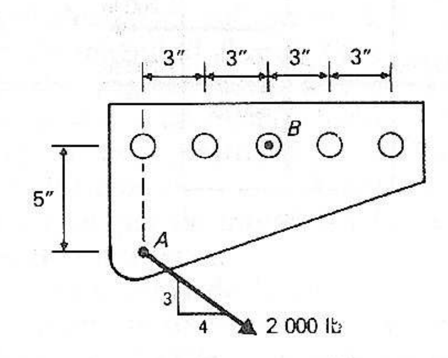


FIGURA PA.26

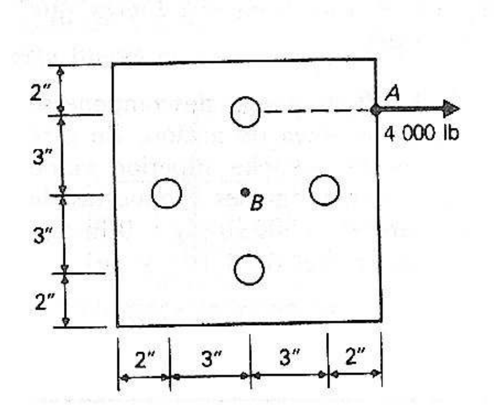


FIGURA PA.27

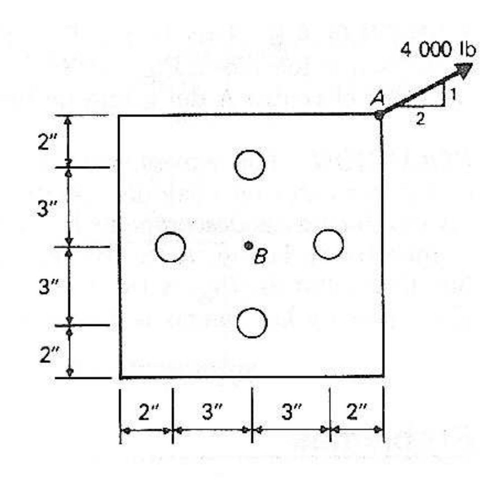


FIGURA PA.28

A.10 Equilibrio de sistemas de fuerza no concurrentes

Un cuerpo, sometido a la acción de un sistema de fuerzas no concurrentes (es decir, cuando las líneas de acción de todas las fuerzas no se intersecan en un punto común) está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a cero. Es decir, el sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo no tiene resultante ni en forma de fuerza ni en forma de par. Bajo estas condiciones, las ecuaciones de equilibrio del cuerpo son:

$$\sum F_X = 0, \tag{A.1}$$

$$\sum F_Y = 0, \tag{A.2}$$

$$\sum M = 0. \tag{A.3}$$

El método general de solución para problemas de equilibrio con fuerzas no concurrentes consiste de los siguientes pasos:

1. Se traza un diagrama de cuerpo libre.
2. Se descomponen las fuerzas en componentes rectangulares, si es necesario.
3. Se aplican las tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_X = 0$, $\Sigma F_Y = 0$, $\Sigma M = 0$) a las fuerzas sobre el cuerpo libre.
4. Se resuelven las ecuaciones de equilibrio para las cantidades desconocidas.

Como solamente hay tres ecuaciones de equilibrio, no pueden determinarse más de tres incógnitas a partir de cualquier diagrama de cuerpo libre. Una técnica eficaz de solución no sigue un patrón determinado, sino que debe ajustarse a los requisitos del problema. Sin embargo, el paso más importante en la solución es la construcción de un diagrama de cuerpo libre completo y correcto. Debido a la importancia de los diagramas de cuerpo libre, se discuten brevemente en la sección siguiente.

A.11 Diagramas de cuerpo libre

Al resolver problemas de mecánica de materiales, es muy importante representar correctamente las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Si existen fuerzas que no se indican, o si se indican fuerzas que no existen, el problema nunca podrá resolverse correctamente. La técnica de representar correctamente las fuerzas sobre un esquema del cuerpo en cuestión (diagrama de cuerpo libre) es vital para un entendimiento de la mecánica en ingeniería.

Los pasos en la construcción de un diagrama de cuerpo libre son:

1. Se aisla el cuerpo en cuestión. Es decir, se traza la forma general del cuerpo sin las fuerzas aplicadas ni las reacciones.

2. Se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Estas fuerzas son, tanto las fuerzas aplicadas como las fuerzas producidas por las reacciones.

Se incluye la Tabla A.1 para ilustrar el número de componentes de reacción para varios tipos de apoyos.

Tabla A.1

Tipo de reacción	Símbolo	Número de incógnitas	Reacciones en el diagrama de cuerpo libre	Observaciones
Rodillo o apoyo libre		1	θ, F	La línea de acción de la fuerza es perpendicular a la superficie de contacto.
		1	F	
Superficie lisa		1	F	
Cable o eslabón	θ	1	T, θ	La línea de acción de la fuerza coincide con el eje del cable o eslabón.
Articulación	(a)	2	(a) F_x, F_y	Tanto la magnitud como la dirección de la fuerza son desconocidas. La fuerza se representa por medio de sus dos componentes rectangulares.
Superficie rugosa	(b)	2	(b) F_f, F_N	
Apoyo fijo o empotramiento		3	F_x, M, F_y	La fuerza, teniendo tanto la magnitud como la dirección desconocidas, se representa por medio de sus dos componentes rectangulares. También existe un par en un empotramiento.

La Fig. A.19 muestra varios ejemplos de sistemas estructurales, junto con sus correspondientes diagramas de cuerpo libre. Todos estos ejemplos son estáticamente determinados (es decir, pueden resolverse simplemente mediante la aplicación de la estática). Los miembros de los sistemas se consideran sin peso, a menos que se haga alguna anotación en contrario. Si el peso de un cuerpo no es despreciable con respecto a las otras fuerzas, se muestra actuando a través del centro de gravedad del cuerpo.

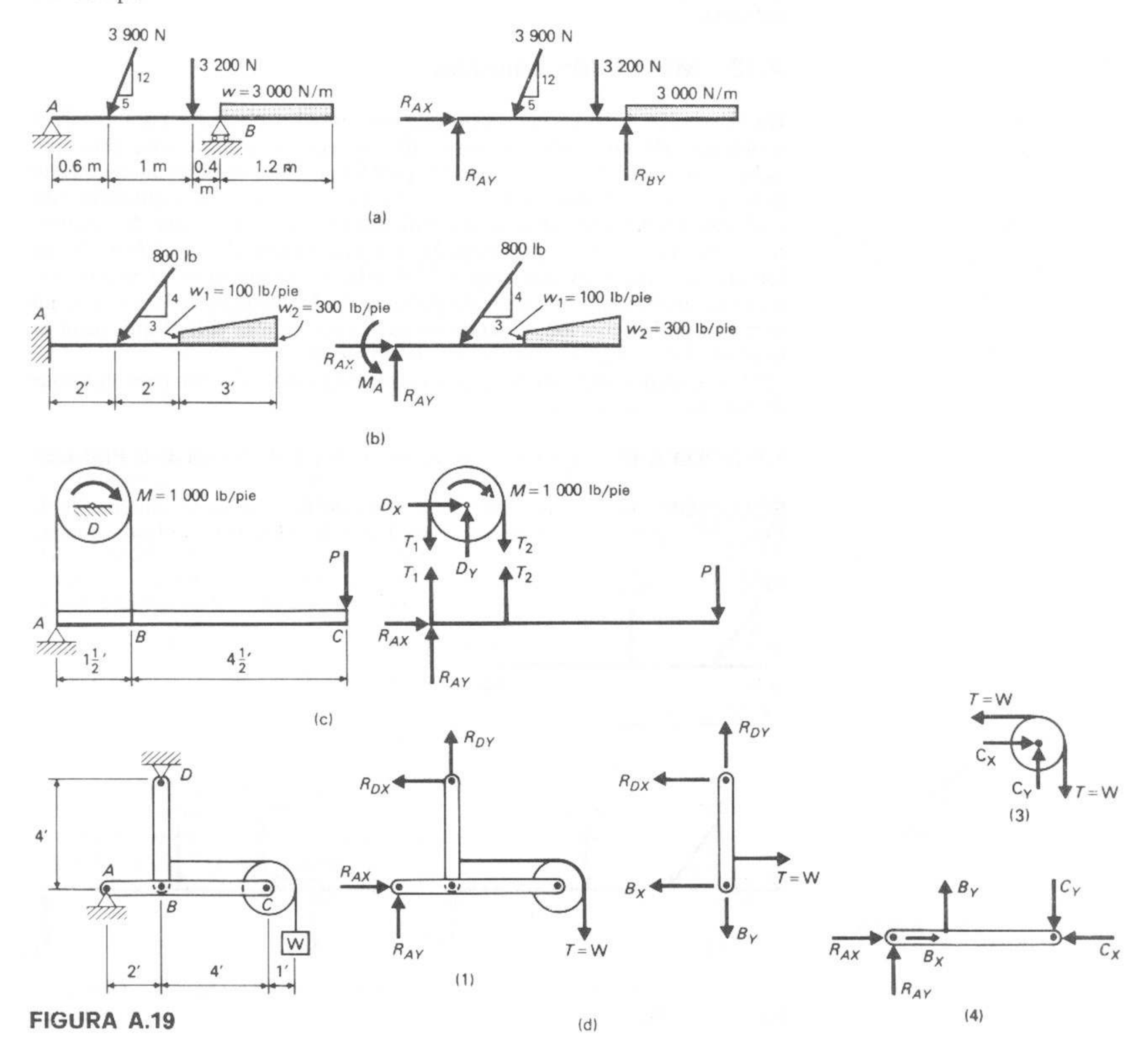


FIGURA A.19

Nota: Es muy importante ser consistente en los símbolos y en los sentidos de las fuerzas. Por ejemplo, la magnitud y la dirección de la fuerza en la articulación en B de la Fig. A.19 (d) se desconocen. Por consiguiente, deben suponerse los sentidos de las componentes. Una vez que se escogen los sentidos de B_X y de B_Y en la parte 2, ya no pueden ser arbitrarios los sentidos de B_X y B_Y en la parte 4. Por consiguiente, la tercera ley de Newton, que dice que para cualquier acción debe haber una reacción igual y opuesta, se aplica aquí. Las fuerzas en *B* y *C* deben ser consistentes.

A.12 Método de solución

En la sección A.10 se mencionó que una técnica eficiente para resolver problemas de equilibrio no sigue ningún patrón establecido, sino que debe ajustarse a los requisitos del problema. Este enunciado se refiere principalmente al orden en que se usan las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, usualmente es más conveniente efectuar una suma de momentos como la primera aplicación de las ecuaciones de equilibrio. Si se toman los momentos con respecto al punto que contiene al mayor número de incógnitas, el brazo de palanca de las incógnitas es cero, y no entrarán en la ecuación. Cuando se hace esto, es más difícil que surja la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas.

Los ejemplos siguientes ilustran el método de solución para sistemas de fuerzas no concurrentes.

EJEMPLO A.10 Determinar las reacciones *A* y *B* de la viga de la Fig. A.20.

SOLUCION El diagrama de cuerpo libre de las fuerzas se muestra en la Fig. A.20 (b) y (c). En este caso, calculamos las reacciones verticales toman-

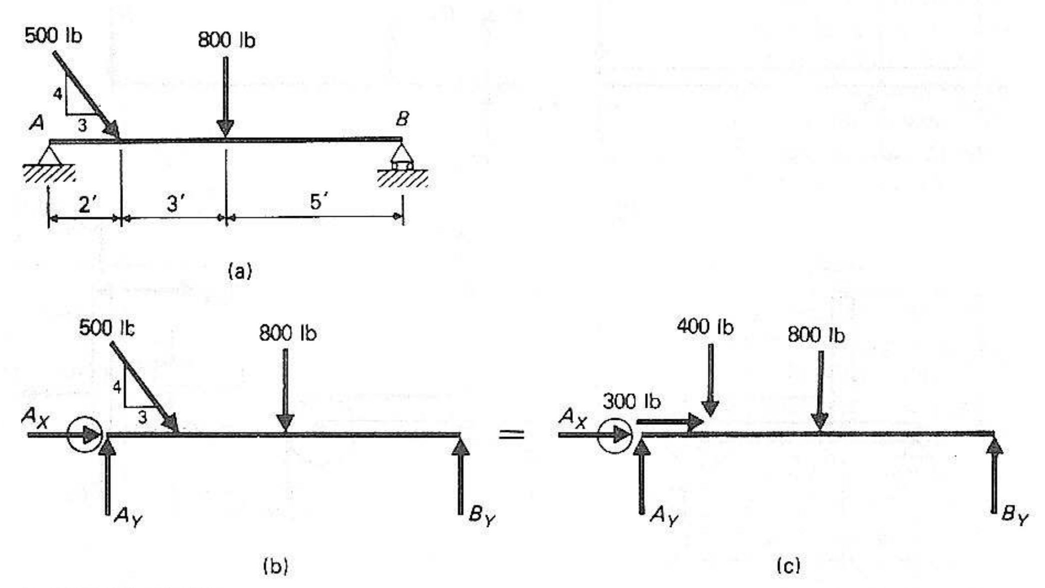


FIGURA A.20

do momentos con respecto a A y después con respecto a B. De este modo, se dispone de una verificación de los cálculos aritméticos sumando fuerzas en la dirección vertical. Así:

$$\sum M_A = 0: \qquad B_Y(10) - 400(2) - 800(5) = 0,$$
$$B_Y = \frac{800 + 4\,000}{10},$$
$$B_Y = 480 \text{ lb}.$$

$$\sum M_B = 0: \qquad A_Y(10) - 400(8) - 800(5) = 0,$$
$$A_Y = \frac{3\,200 + 4\,000}{10},$$
$$A_Y = 720 \text{ lb}.$$

Verificación

$$\sum F_Y = 0: \qquad A_Y + B_Y - 400 - 800 = 0,$$
$$720 + 480 = 400 + 800,$$
$$1\,200 = 1\,200.$$

$$\sum F_X = 0: \qquad A_X + 300 = 0,$$
$$A_X = -300 \text{ lb } (A_X \text{ actúa hacia la izquierda}). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO A.11 Determinar la fuerza P necesaria para mantener en equilibrio el mecanismo de palanca angular mostrado en la Fig. A.21. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre la articulación en B?

SOLUCION El diagrama de cuerpo libre se muestra en la Fig. A.21 (b) llamando B_X y B_Y a las componentes de la fuerza ejercida por la articulación en B. Las tres cantidades desconocidas se calculan como:

$$\sum M_B = 0: \qquad 48(200 \times 10^{-3}) - P(300 \times 10^{-3} \operatorname{sen} 60°) = 0,$$
$$P = 36.96 \text{ kN};$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad B_Y = 48 \text{ kN};$$

$$\sum F_X = 0: \qquad B_X = 36.96 \text{ kN}.$$

La fuerza que actúa sobre la articulación es la resultante de B_X y B_Y, como se indica en la Fig. A.21 (c):

$$F = \sqrt{(48^2) + (36.96)^2}$$
$$F = 60.6 \text{ kN}. \quad \blacksquare$$

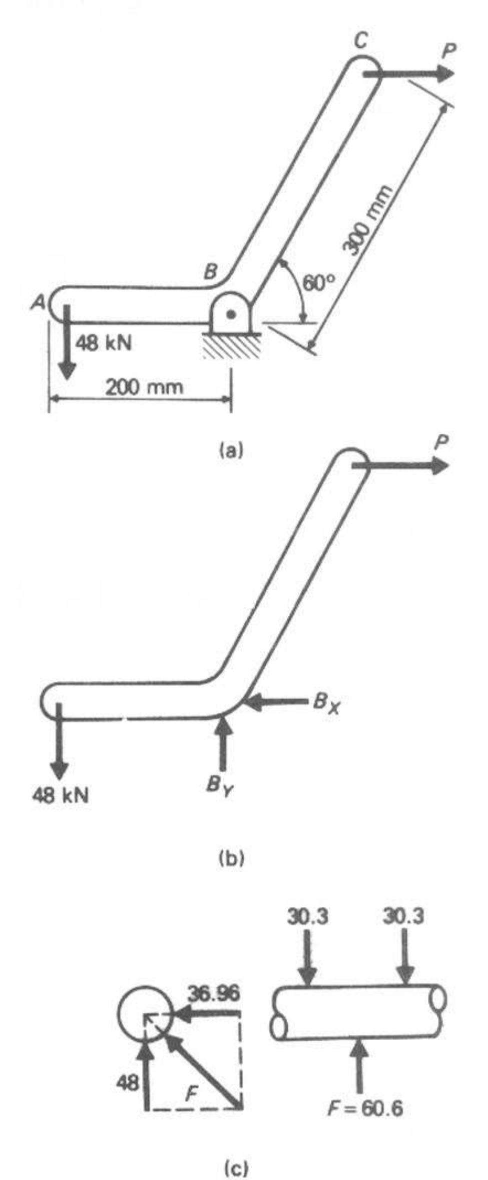


FIGURA A.21

EJEMPLO A.12 Determinar las reacciones de la viga indicada en la Fig. A.22.

(a) (b) (c)

FIGURA A.22

SOLUCION El diagrama de cuerpo libre se indica en la Fig. A.22 (b) y (c). A partir de la Fig. A.22 (c), las reacciones se calculan como sigue:

$$\sum F_Y = 0: \qquad A_Y - 3\,000 - 2\,500 = 0,$$

$$A_Y = 5\,500 \text{ N};$$

$$\sum F_X = 0: \qquad A_X + 6\,000 = 0,$$

$$A_X = -6\,000 \text{ N};$$

$$\sum M_A = 0: \qquad M_A - (3\,000)(1.2) - (2\,500)(3.6) = 0,$$

$$M_A = 12\,600 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

El signo menos para A_X indica que el sentido de A_X se escogió incorrectamente. Los círculos colocados en las cabezas de flecha de la Fig. A.22 (b) y (c) indican que A_X tiene realmente el sentido opuesto. ■

EJEMPLO A.13 Determinar las reacciones del mecanismo mostrado en la Fig. A.23.

SOLUCION Como hay cinco componentes de reacciones (3 en A y 2 en C), y solamente se dispone de tres ecuaciones de equilibrio para cualquier diagrama de cuerpo libre, el problema debe resolverse considerando varios diagramas de cuerpo libre diferentes. Las Figs. A.23 (b) a (e) muestran los cuatro posibles diagramas de cuerpo libre. El uso de tres cualquiera de ellos serían suficientes para resolver el problema. A continuación se da uno de los posibles métodos de solución.

Nótese en la parte (d) que las componentes de las fuerzas en las articulaciones B y D se tomaron en direcciones normal y paralela al miembro BD. Esto se hizo solamente por conveniencia. Podrían haberse usado componentes horizontal y vertical, pero entonces el encontrar estas fuerzas requeriría un poco más de trabajo.

Considerando el cuerpo libre de la Fig. A.23 (d), encontramos

$$\sum M_B = 0: \qquad D_N(9) = 0;$$

$$D_N = 0;$$

$$\sum F_N = 0: \qquad B_N = 0.$$

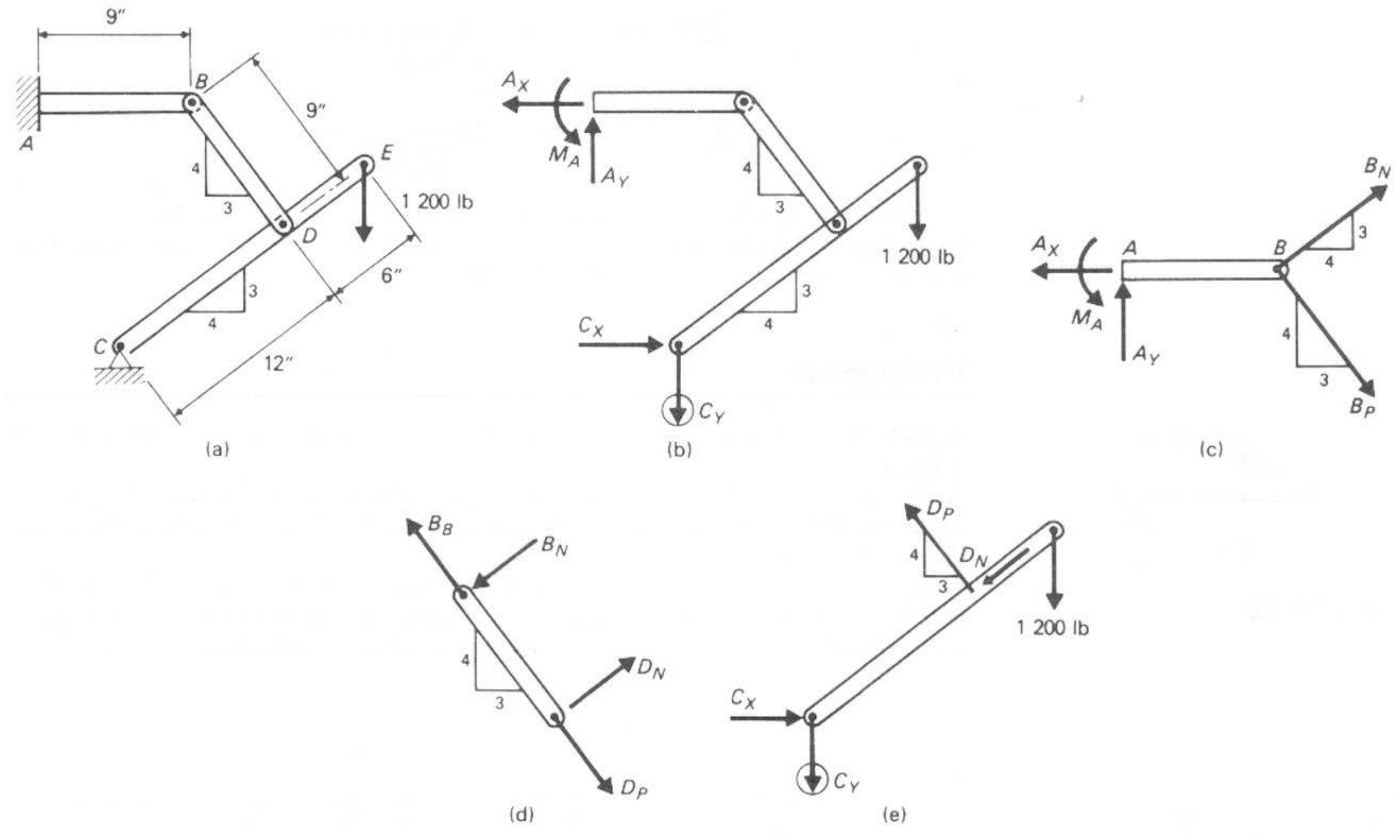


FIGURA A.23

Considerando el cuerpo libre de la Fig. A.23 (e), tenemos

$$\sum M_C = 0: \qquad D_P(12) - 1{,}200(18 \times \tfrac{4}{5}) = 0,$$
$$D_P = 1{,}440 \text{ lb};$$

$$\sum F_X = 0: \qquad C_X - \tfrac{3}{5}D_P = 0,$$
$$C_X = \tfrac{3}{5}(1{,}440),$$
$$C_X = 864 \text{ lb};$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad C_Y + 1\,200 - \tfrac{4}{5}(1\,440) = 0,$$
$$C_Y = 1.150 - 1.200$$
$$C_Y = -50 \text{ lb (con sentido hacia arriba)}$$

Considerando el diagrama de cuerpo libre de la Fig. A.23 (d), tenemos

$$\sum F_P = 0: \qquad B_P = D_P = 1{,}440 \text{ lb}.$$

Considerando el diagrama de cuerpo libre de la Fig. A.23 (c) tenemos

$$\sum F_X = 0: \qquad A_X = \tfrac{3}{5}B_P = \tfrac{3}{5}(1\,440)$$
$$= 864 \text{ lb};$$

$$\sum F_Y = 0: \qquad A_Y = \tfrac{4}{5}B_P = \tfrac{4}{5}(1\ 440) = 1\ 150\ \text{lb};$$

$$\sum M_A = 0: \qquad M_A = \tfrac{4}{5}B_P(9) = \tfrac{4}{5}(1\ 440)(9) = 10\ 370\ \text{lb-plg}$$

Como comprobación, sustituimos los valores numéricos de las reacciones en la Fig. A.23 (b), y escribimos las ecuaciones de equilibrio para demostrar que $\Sigma F_X = 0$, $\Sigma F_Y = 0$ y $\Sigma M = 0$. ■

Problemas

A.29-A.34 Determinar las reacciones de las vigas indicadas en las Figs. PA.29 a PA.34.

A.35 Determinar la fuerza P necesaria para mantener en equilibrio la palanca de la Fig. PA.35. ¿Cuál es la fuerza (en magnitud y dirección) que actúa sobre la articulación en B?

A.36 El brazo de un freno se sujeta a la tensión de las bandas de 120 lb y 300 lb, como se indica en la Fig. PA.36. Determinar la fuerza P necesaria para producir estas fuerzas, y la fuerza resultante sobre la articulación en A.

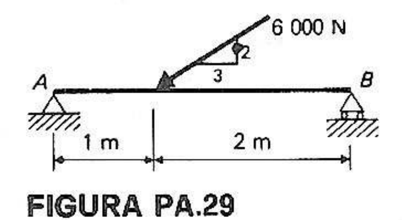


FIGURA PA.29

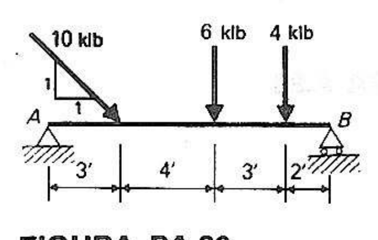


FIGURA PA.30

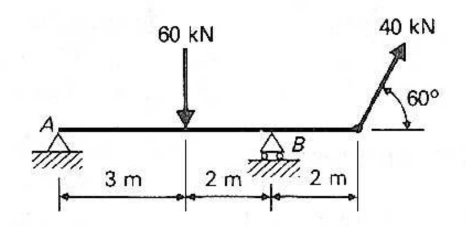


FIGURA PA.31

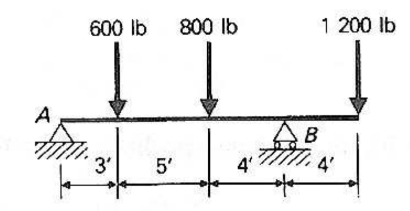


FIGURA PA.32

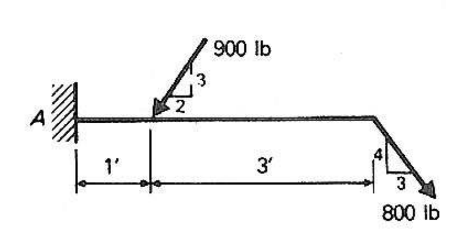


FIGURA PA.33

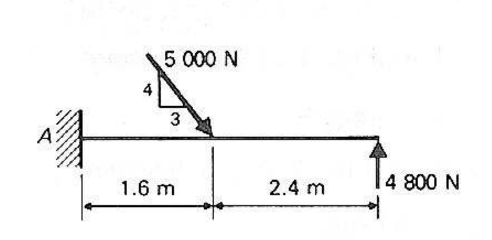


FIGURA PA.34

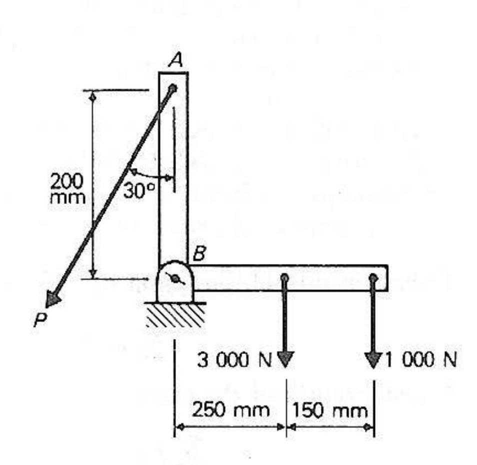


FIGURA PA.35

A.37 El brazo del freno indicado en la Fig. PA.37 está sujeto a una fuerza normal contra el tambor del freno, de 1 200 N y a una fuerza cortante de 360 N. Determinar la fuerza P necesaria para producir estas cargas y la fuerza sobre la articulación en A.

A.38-A.45 Determinar las reacciones de los sistemas indicados en las Figs. PA.38 a PA.45.

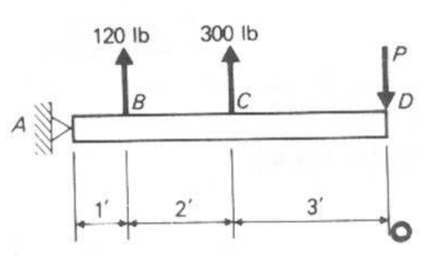


FIGURA PA.36

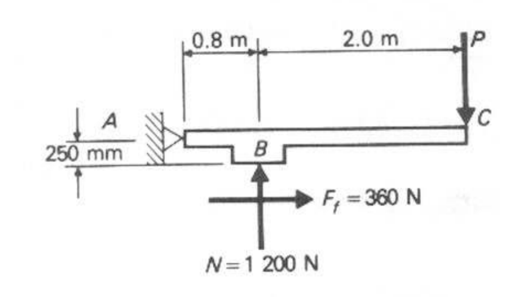


FIGURA PA.37

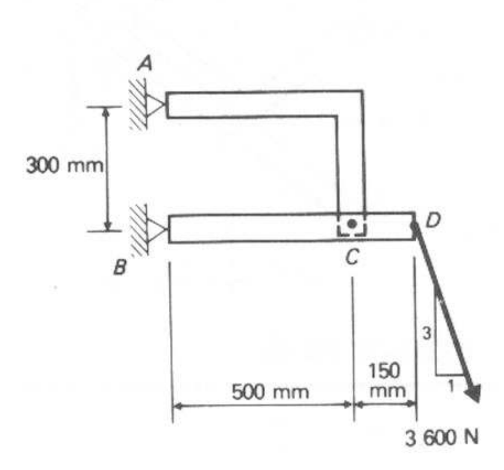


FIGURA PA.38

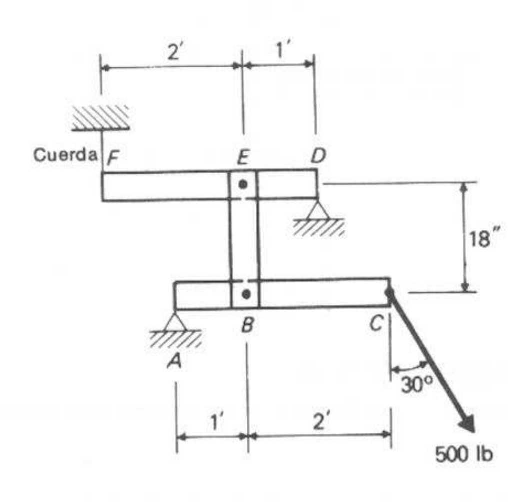


FIGURA PA.39

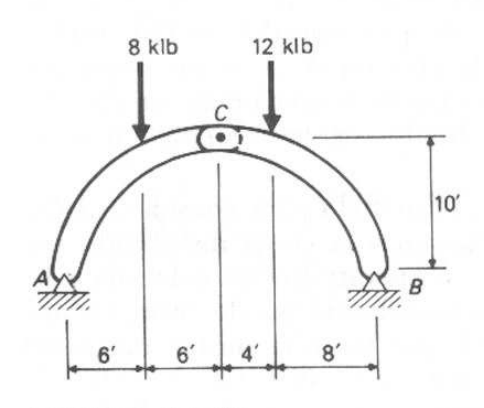


FIGURA PA.40

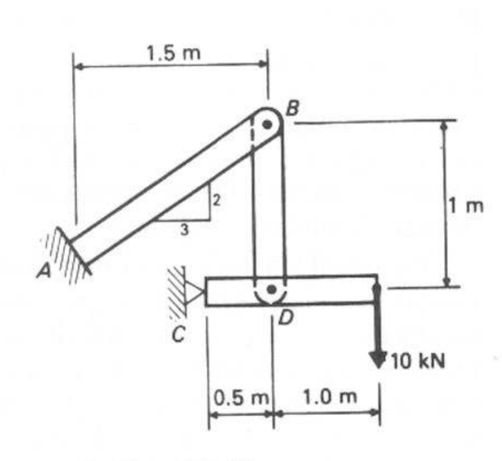


FIGURA PA.41

FIGURA PA.42

FIGURA PA.43

FIGURA PA.44

FIGURA PA.45

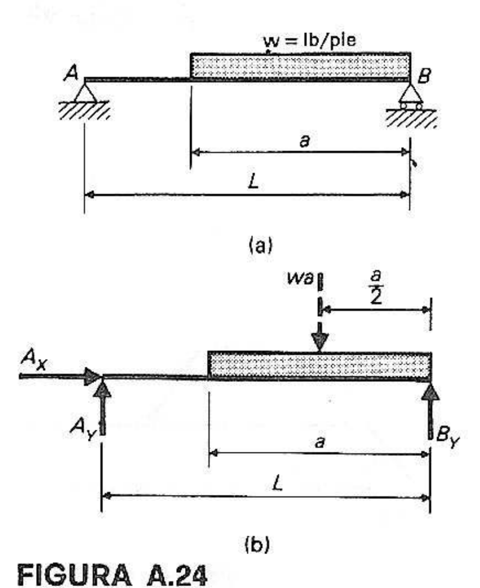


FIGURA A.24

A.13 Fuerzas distribuidas

En el diseño de muchos miembros, particularmente vigas, a menudo se presenta una carga uniformemente distribuida. En el caso de vigas de edificios y de puentes, esta carga puede provenir del viento, cargas muertas del piso y techo, el peso de la viga en sí, o de los requisitos del código. Los elementos de máquinas también involucran cargas distribuidas resultantes de presiones del fluido, cargas muertas, u otras cargas distribuidas aplicadas.

En cuanto a las reacciones externas, el método para considerar estas cargas es relativamente simple. Reemplazamos la carga distribuida por su resultante, asegurándonos de que la resultante quede colocada adecuadamente. En la Fig. A.24, la carga distribuida puede reemplazarse por una carga concentrada (resultante) que tiene la misma magnitud que las fuerzas totales hacia abajo, y que se localiza en el centro de gravedad de las cargas distribuidas, como se indica mediante la fuerza

trazada con línea interrumpida wa de la Fig. A.24 (b). Con esta transformación, las reacciones se determinan como se ilustra en la sección A.12.

Las reacciones externas se pueden determinar de esta manera. Sin embargo, los esfuerzos internos en una viga correspondientes a una carga distribuida son completamente diferentes a los que corresponden a una carga concentrada de la misma magnitud total, colocada en el centro de gravedad de la carga distribuida. Es importante indicar las fuerzas distribuidas como tales, y considerar mentalmente la resultante para fines de cálculo, o ilustrarla como una fuerza señalando su línea de acción en forma interrumpida, como en la Fig. A.24 (b). Sin embargo, no debe reemplazarse la fuerza distribuida por una fuerza concentrada en el diagrama de cuerpo libre. Esto conducirá a confusión y error cuando se consideren las fuerzas cortantes internas y los momentos de las vigas estudiadas en el capítulo 4.

EJEMPLO A.14 Determinar las reacciones de la viga indicada en la Fig. A.25.

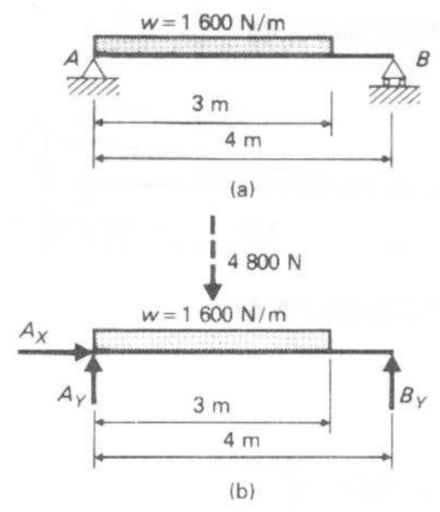


FIGURA A.25

SOLUCION En la Fig. A.25 (b) se indica el diagrama de cuerpo libre de la viga. La fuerza de 4 800 N trazada con línea interrumpida es la resultante de la carga distribuida y no una carga adicional. Las reacciones son

$$\sum M_A = 0: \qquad B_Y(4) - (1\,600)(3)(1.5) = 0,$$
$$B_Y = 1\,800 \text{ N};$$
$$\sum M_B = 0: \qquad A_Y(4) - (1\,600)(3)(2.5) = 0,$$
$$A_Y = 3\,000 \text{ N}.$$

Verificación:

$$\sum F_Y = 0: \qquad A_Y + B_Y - 1\,600(3) = 0,$$
$$1\,800 + 3\,000 = 4\,800, \qquad 4\,800 = 4\,800.$$
$$\sum F_X = 0: \qquad A_X = 0. \quad ■$$

EJEMPLO A.15 Determinar las reacciones en A y B para la viga mostrada en la Fig. A.26. La carga distribuida varía uniformemente desde 4 klb/pie hasta 0 klb/pie sobre un claro de 9 pies.

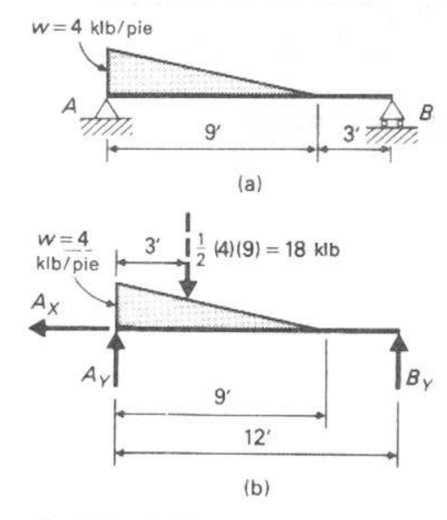


FIGURA A.26

SOLUCION La resultante de la carga distribuida es:

$$R = \tfrac{1}{2}(4)(9) = 18 \text{ klb}.$$

Se localiza en el centro de gravedad del triángulo correspondiente a la distribución de la carga, o sea a 3 pies a partir de A. Conociendo la magnitud y la localización de la resultante, calcule las reacciones considerando el cuerpo libre de la Fig. A.26 (b):

$$\sum M_A = 0: \qquad B_Y(12) - 18(3) = 0$$
$$B_Y = 4.5 \text{ klb}.$$
$$\sum M_B = 0: \qquad A_Y(12) - 18(9) = 0$$
$$A_Y = 13.5 \text{ klb}.$$

Verificación:

$$\sum F_Y = 0: \qquad A_Y + B_Y - 18 = 0,$$

$$13.5 + 4.5 - 18 = 0, \qquad 18 = 18.$$

$$\sum F_X = 0: \qquad A_X = 0. \blacksquare$$

Problemas

A.46-A.51 Determinar las reacciones de las vigas indicadas en las Figs. PA.46 a PA.51.

A.52 Una prensa, indicada en la Fig. PA.52 ejerce una presión de $p = 60$ lb/plg² sobre la placa circular D, que tiene un diámetro de 16 plg. Determinar la fuerza P necesaria para mantener esta presión y la reacción resultante en la articulación A.

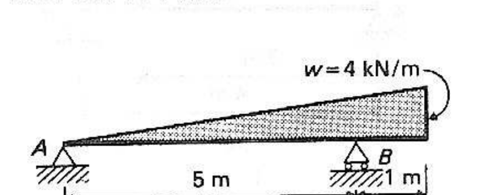


FIGURA PA.46

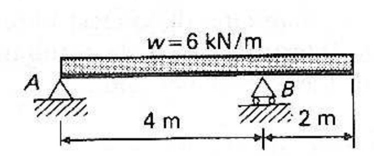


FIGURA PA.48

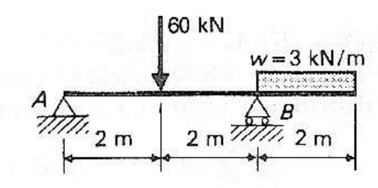


FIGURA PA.49

FIGURA PA.47

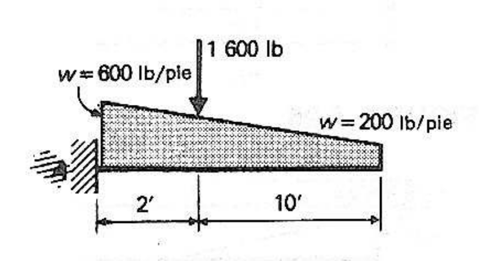


FIGURA PA.50

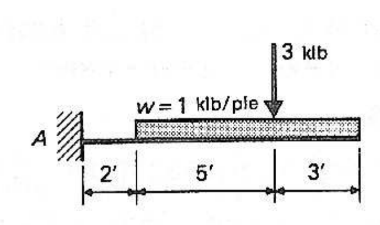


FIGURA PA.51

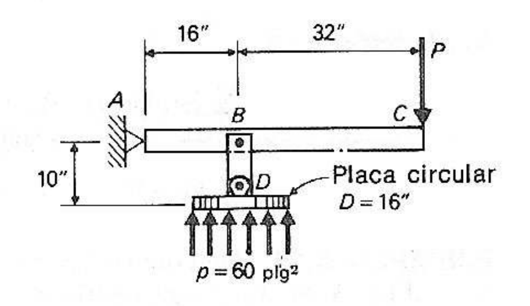


FIGURA PA.52

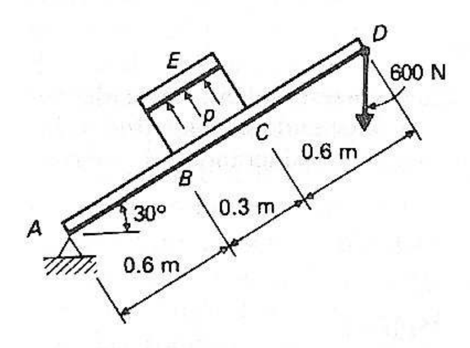


FIGURA PA.53

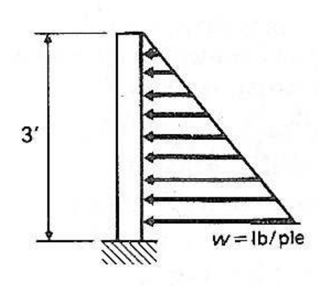


FIGURA PA.54

A.53 La placa E de la Fig. PA.53 es una placa rectangular de 150 mm × 300 mm. Determinar la presión resultante uniformemente distribuida sobre esta placa, producida por una fuerza vertical de 600 N aplicada en D.
A.54 Una barra de 2 plg × 2 plg, empotrada en la base está sujeta a una presión hidráulica que varía uniformemente (véase la Fig. PA.54). Determinar la presión máxima en la base, en lb/pie^2, suponiendo que el momento en la base de la barra no debe exceder de 1 200 lb-pie.

A.14 Centro de gravedad

El peso de un cuerpo es la fuerza de la atracción gravitacional de la tierra sobre el cuerpo. El peso resultante de todas sus partículas, pasa a través de un punto llamado centro de gravedad, c. g., éste puede describirse como el punto donde colocado un apoyo (tal como un dedo) equilibra el cuerpo sin ladearse. La Fig. A.27 muestra una placa rectangular, siendo dw el peso de cada elemento y W la resultante de las fuerzas dw (es decir, el peso total de la placa). El centro de gravedad es el punto donde la placa puede equilibrarse. Para evitar que se ladee, la resultante debe coincidir con la reacción en el apoyo, que está en el centro de gravedad.

FIGURA A.27

El centro de gravedad de las placas que son simétricas con respecto a dos ejes se determina a simple vista en la intersección de los ejes de simetría (véase Fig. A.28). Para formas irregulares, se obtiene fácilmente una expresión matemática para localizar el centro de gravedad.

Considere ahora la placa plana irregular de la Fig. A.29. Para localizar las coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del centro de gravedad, es útil el concepto de fuerzas distribuidas. Supóngase que la placa está dividida en un cierto número de partículas de igual tamaño, y por consiguiente, de igual peso w. El peso total de la placa W, es la suma de los pesos de los elementos. Expresado matemáticamente

$$W = \int dw. \qquad \text{(a)}$$

Sean (x_1, y_1) las coordenadas de dw, (x_2, y_2) las coordenadas dw_2, etc. Las coordenadas de W son $(\bar{x}, \bar{y})$, que son las coordenadas del

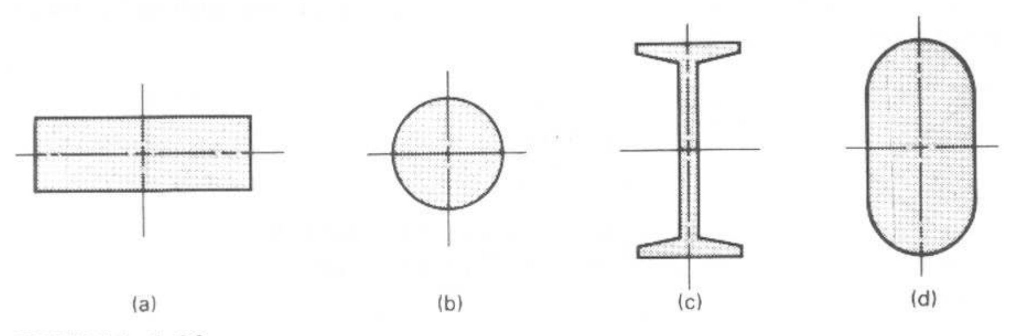


FIGURA A.28

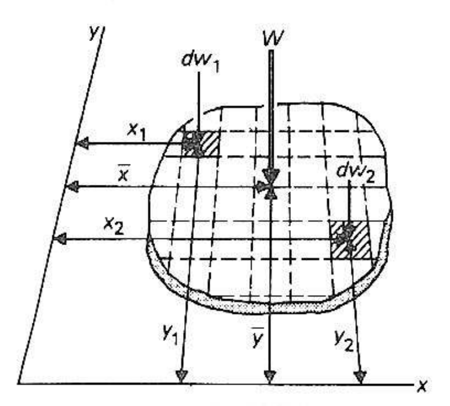


FIGURA A.29

centro de gravedad de la placa. Como W es la resultante del peso de las partículas, su momento con respecto a cualquier eje debe ser, por consiguiente, igual a la suma de los momentos de las partículas. Igualando el momento de la resultante W con respecto a los ejes de referencia con la suma de los momentos de los elementos, se obtienen las siguientes expresiones generales:

$$\sum M_Y: \qquad W\bar{x} = dw_1x_1 + dw_2x_2 + \cdots = \int dwx \tag{b}$$

$$\sum M_X: \qquad W\bar{y} = dw_1y_1 + dw_2y_2 + \cdots = \int dwy \tag{c}$$

Sustituyendo W por $\int dw$ y despejando $\bar{x}$ y $\bar{y}$, hallamos las expresiones para localizar el centro de gravedad:

$$\bar{x} = \frac{\int dwx}{\int dw} \tag{A.4}$$

$$\bar{y} = \int \frac{dwy}{dw}. \tag{A.5}$$

Cuando trabajamos con formas geométricas regulares, el término $\int dw$ se convierte en el peso total del elemento que se está considerando. Las ecuaciones (A.4) y (A.5) pueden expresarse como

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\ Wx}{\Sigma\ W} \tag{A.4a}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\ Wy}{\Sigma\ W} \tag{A.5a}$$

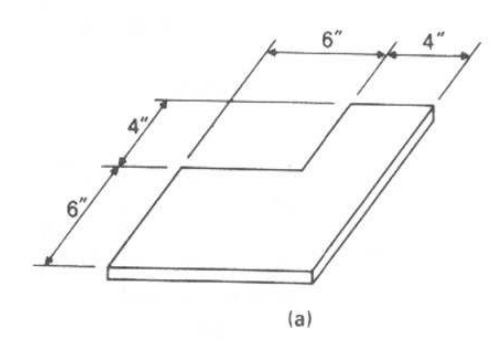
EJEMPLO A.16 Localizar el centro de gravedad de la placa de acero de la Fig. A.30. El espesor de la placa es de 1 plg y el peso específico del acero es de 0.284 lb/plg³.

SOLUCION Los ejes de referencia pueden colocarse en cualquier lugar. Aquí se considera que coinciden con las aristas inferior e izquierda, como se muestra en la Fig. A.30 (b). También se considera la placa compuesta de dos elementos, 1 y 2. Aplicando las ecs. (A.4) y (A.5), se encuentran las coordenadas del centro de gravedad $\bar{x}$ y $\bar{y}$:

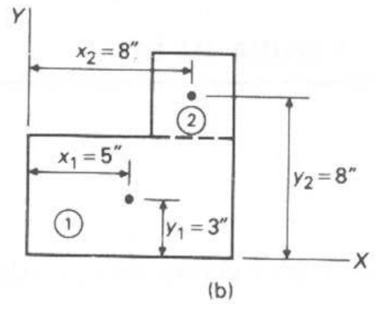
$$\bar{x} = \frac{\Sigma\ Wx}{\Sigma\ W} = \frac{\Sigma\ (At\rho)x}{\Sigma\ (At\rho)}$$

$$= \frac{\overbrace{(6)(10)(1)(0.284)}^{W_1}\overbrace{(5)}^{x_1} + \overbrace{(4)(4)(1)(0.284)}^{W_2}\overbrace{(8)}^{x_2}}{\underbrace{(6)(10)(1)(0.284)}_{W_1} + \underbrace{(4)(4)(1)(0.284)}_{W_2}}$$

$$= 5.49 \text{ plg},$$



(a)



(b)

FIGURA A.30

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, Wy}{\Sigma\, W} = \frac{\Sigma\,(At\rho)y}{\Sigma\,(At\rho)}$$

$$= \frac{\overbrace{(6)(10)(1)(0.284)}^{W_1}\overbrace{(3)}^{y_1} + \overbrace{(4)(4)(1)(0.284)}^{W_2}\overbrace{(8)}^{y_2}}{\underbrace{(6)(10)(1)(0.284)}_{W_1} + \underbrace{(4)(4)(1)(0.284)}_{W_2}}$$

$= 3.95$ plg. ■

Problemas

A.55-A.58 Localizar el centro de gravedad de las placas de acero indicadas en las Figs. PA.55 a PA.58. El peso específico del acero es de 0.284 lb/plg³, ó 77 kN/m³.

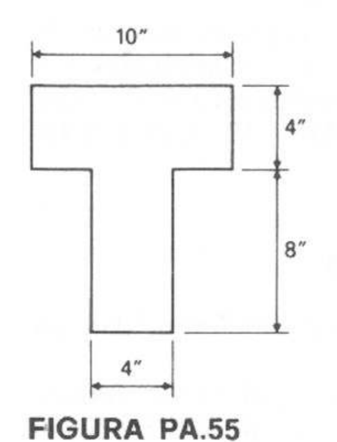


FIGURA PA.55

150mm
200 mm
100 mm

FIGURA PA.56

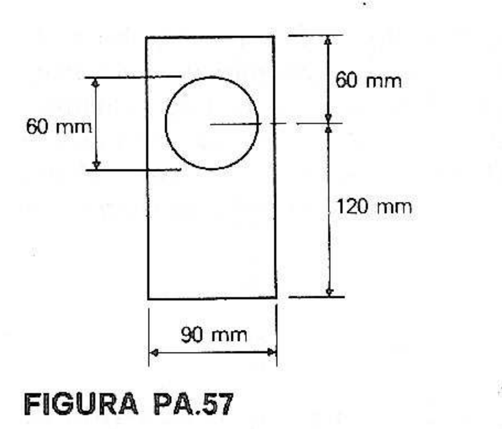


FIGURA PA.57

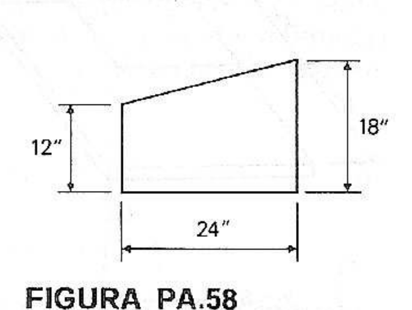


FIGURA PA.58

A.15 Centroide de un área

En la sección A.14 se vio que se podía determinar el centro de gravedad de una placa plana a partir de:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, Wx}{\Sigma\, W} = \frac{\Sigma\, At\rho x}{\Sigma\, At\rho},$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, Wy}{\Sigma\, W} = \frac{\Sigma\, At\rho y}{\Sigma\, At\rho}.$$

Si los términos t y ρ son iguales para cada elemento de la placa, se eliminan, y las ecuaciones resultantes se convierten en:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, Ax}{\Sigma\, A}, \qquad \text{(A.6)}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, Ay}{\Sigma\, A}. \qquad \text{(A.7)}$$

El punto definido por las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ se llama el *centroide* del área. Para áreas, se usa el término "centroide"; para cuerpos tridimensionales, "centro de gravedad" es el término correcto.

En mecánica de materiales frecuentemente se requiere conocer la localización del centroide de áreas. Obtengamos las coordenadas del centroide aplicando las ecs. (A.6) y (A.7). El procedimiento se describe en la sección A.16, y se ilustra mediante los ejemplos A.17, A.18 y A.19.

A.16 Centroides de áreas compuestas

Los centroides de algunas de las áreas geométricas simples se dan en la Tabla A.2.

Si se desea el centroide de un área que no se ajusta a las formas geométricas simples mostradas en la Tabla A.2, pero que es una com-

Tabla A.2

Forma	Localización del centroide	Area
	Centro	$A = bh$
	Centro	$A = \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2$
	$\frac{1}{3}$ de la altura, a partir de la base correspondiente.	$A = \frac{1}{2}bh$
	x se localiza sobre el eje de simetría, y $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	$A = \frac{\pi D^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}$
	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$	$A = \frac{\pi D^2}{16} = \frac{\pi R^2}{4}$

binación de varias de estas formas, el centroide se determina de la siguiente manera:

1. Se descompone el área en formas geométricas simples para las cuales se conocen los centroides.
2. Se escogen ejes de referencia vertical y horizontal, a partir de los cuales se hacen todas las medidas.

3. Se determinan $\bar{x}$ e $\bar{y}$ aplicando las esc. (A.6) y (A.7) a las áreas elementales.

Usualmente es más conveniente elegir el eje de referencia horizontal pasando por la parte superior o por la parte inferior de la figura, y el eje de referencia vertical pasando por el extremo izquierdo o el extremo derecho de la figura. Haciendo esto, no se necesitan considerar valores negativos de distancias. Si el área tiene un eje de simetría, se sabe que el centroide queda sobre ese eje; de este modo no se necesita calcular la coordenada correspondiente a partir de las ecs. (A.6) o (A.7).

En algunos casos es conveniente descontar ciertas áreas de la figura compuesta. Cuando se hace esto, deben descontarse esas cantidades tanto en el numerador como en el denominador. El ejemplo A.19 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO A.17 Determinar el centroide del área indicada en la Fig. A.31.

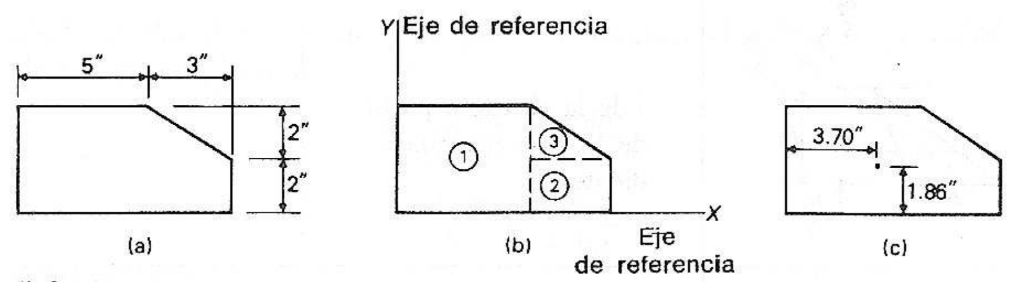


FIGURA A.31

SOLUCION Los ejes de referencia y las formas geométricas simples se indican en la Fig. A.31 (b):

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{(5)(4)(2) + (2)(3)(1) + \frac{1}{2}(2)(3)(2.67)}{(5)(4) + (2)(3) + \frac{1}{2}(2)(3)}$$

$$= \frac{40 + 6 + 8}{20 + 6 + 3}$$

$$= 1.86 \text{ plg}$$

$$\bar{x} = \frac{(5)(4)(2.5) + (3)(2)(6.5) + \frac{1}{2}(3)(2)(6)}{(5)(4) + (2)(3) + \frac{1}{2}(2)(3)} = \frac{50 + 39 + 18}{29}$$

$$= 3.70 \text{ plg}$$

Las coordenadas del centroide se muestran en la Fig. A.31 (c). Podían haberse usado otras áreas, siendo el resultado final idéntico. ■

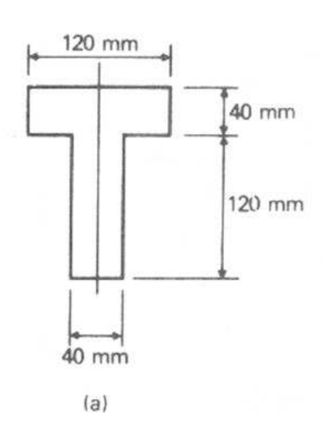
EJEMPLO A.18 Determinar el centroide de la figura en forma de T, mostrada en la Fig. A.32.

SOLUCION Descomponemos el área en formas geométricas simples, como se muestra en la Fig. A.32 (b). Como el área es simétrica con respecto a un

eje vertical que pasa por el centro, no se necesita calcular $\bar{x}$, puesto que el centroide queda sobre este eje. Para $\bar{y}$, se escoge un eje de referencia en la parte inferior de la figura y se calcula:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{(40 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3}) + (120 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-3})(140 \times 10^{-3})}{(40 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3}) + (120 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-3})}$$
$$= 100 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

Es decir, el centroide está localizado 100 mm arriba de la base. ■



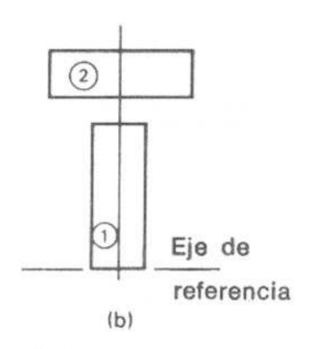


FIGURA A.32

EJEMPLO A.19 Determinar el centroide del área indicada en la Fig. A.33.

SOLUCION La Fig. tiene un eje vertical de simetría, haciendo innecesario el cálculo de $\bar{x}$. Las formas geométricas elegidas son dos rectángulos y un triángulo (área 3), que debe descontarse. Considerando el eje de referencia que pasa por la base, como se indica en la Fig. A.33 (b), calculamos $\bar{y}$ como

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{(6)(2)(1) + (4)(6)(5) - \frac{1}{2}(4)(3)(3)}{(6)(2) + (4)(6) - \frac{1}{2}(4)(3)}$$
$$= \frac{12 + 120 - 18}{12 + 24 - 6}$$
$$= 3.80\ \text{plg}$$

El centroide del área se indica en la Fig. A.33 (c). ■

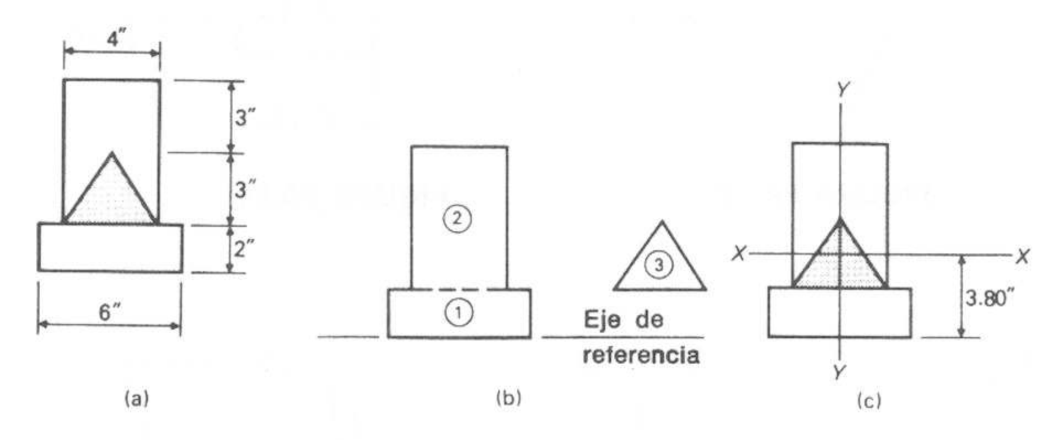


FIGURA PA.33

Problemas

A.59-A.68 Determinar la localización del centroide de las áreas indicadas en las Figs. PA.59 a PA.68.

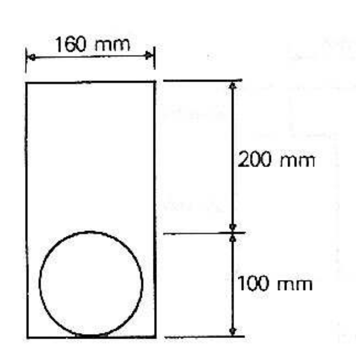


FIGURA PA.59

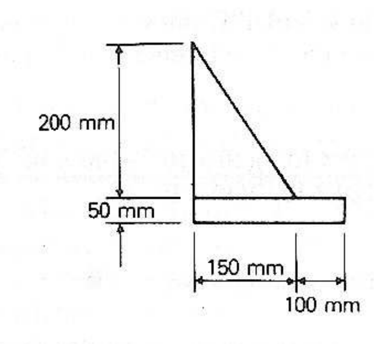


FIGURA PA.60

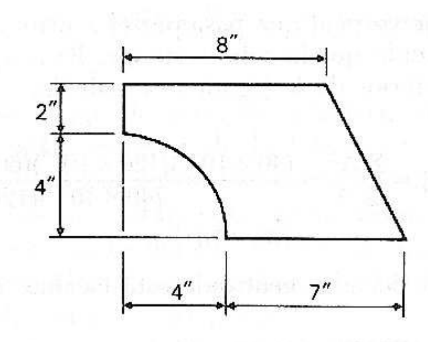


FIGURA PA.61

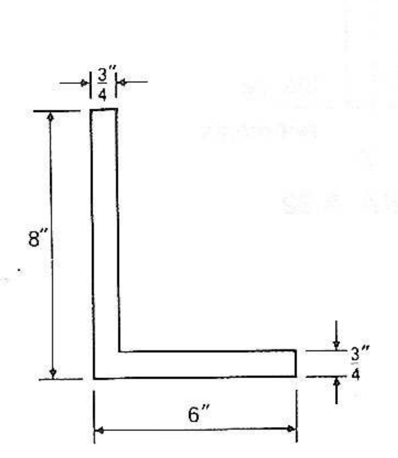


FIGURA PA.62

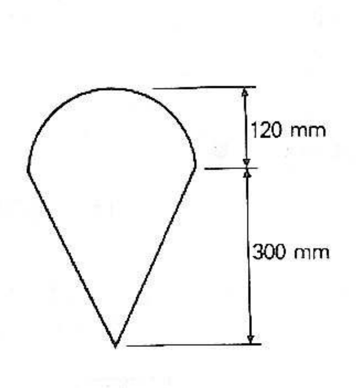


FIGURA PA.63

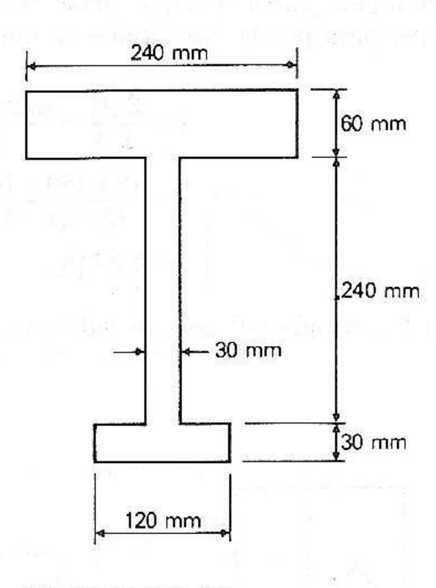


FIGURA PA.64

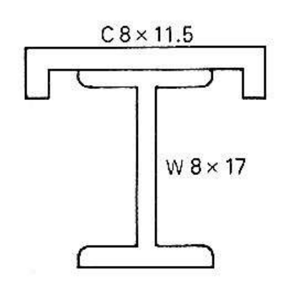


FIGURA PA.65

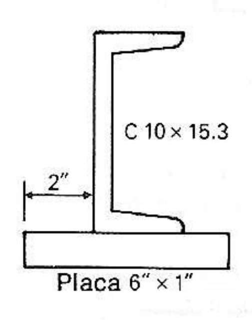


FIGURA PA.66

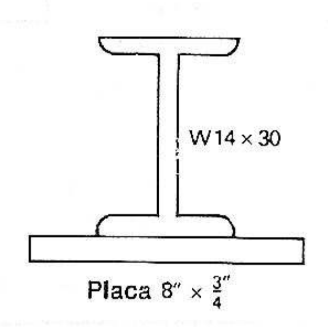


FIGURA PA.67

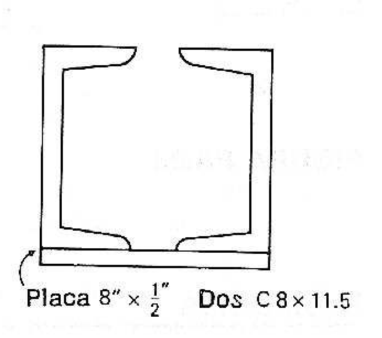
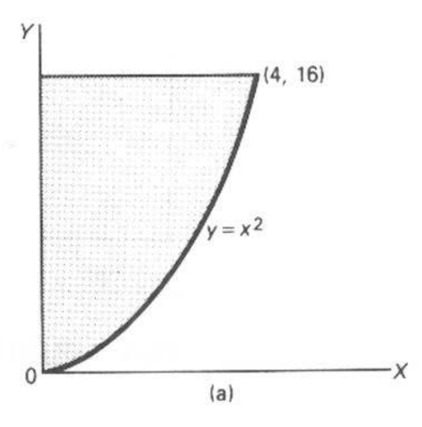


FIGURA PA.68

A.17 Momento de inercia

El *momento de inercia* de un área se define como $I_Y = \int x^2\,dA$ o $I_X = \int y^2\,dA$. Debido a que el momento de inercia tiene una definición matemática, no es posible "visualizar" esta cantidad de la misma manera como es posible visualizar el centroide de un área. Sin embargo, el cáculo numérico de esta cantidad es una herramienta muy importante, con muchos usos. Un momento de inercia es una propiedad geométrica de un área con respecto a un eje particular de referencia. Para un área de dimensiones y eje de referencia específicamente dados, el momento de inercia tiene un valor numérico específico. El ejemplo A.20 ilustra un procedimiento para calcular esta cantidad.



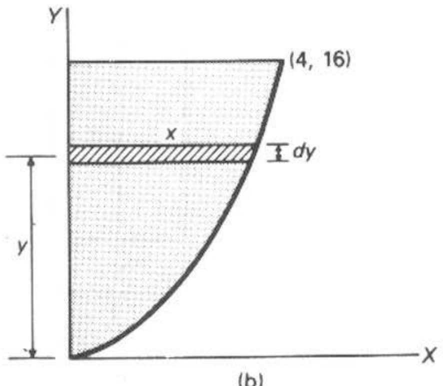


FIGURA A.34

EJEMPLO A.20 Determinar el momento de inercia del área sombreada indicada en la Fig. A.34, con respecto al eje X.

SOLUCION Escogemos una tira rectangular paralela al eje con respecto al cual se va a determinar el momento de inercia (véase la Fig. A.34 b). La faja se localiza a una distancia y del eje X, y tiene una $dA = x\,dy$.

Por definición,

$$I_X = \int y^2\,dA. \tag{a}$$

La ecuación de la curva que limita el área es $y = x^2$. Sustituimos $x = y^{1/2}$ en la ec. (a) y usamos los límites de y, desde 0 hasta 16 para obtener:

$$I_X = \int y^2\,dA = \int y^2 x\,dy,$$

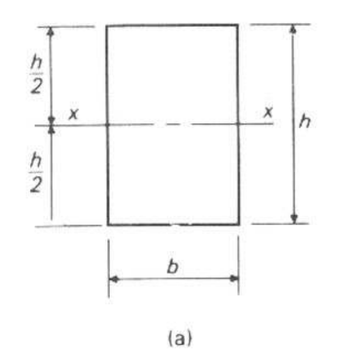
$$I_X = \int_0^{16} y^{5/2}\,dy,$$

$$I_X = \left.\frac{y^{7/2}}{7/2}\right]_0^{16}. \tag{b}$$

Sustituyendo los límites nos da

$$I_X = \frac{(16)^{7/2}}{7/2} - \frac{(0)^{7/2}}{7/2},$$

$$I_X = \frac{32\,768}{7} = 4\,681. \quad ■$$



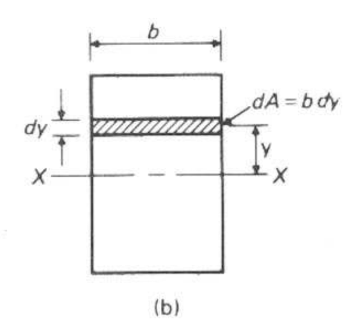


FIGURA A.35

En la práctica de ingeniería la mayor parte de las áreas son formas geométricas regulares. En consecuencia podemos deducir ecuaciones para las formas comunes integrando las definiciones básicas, entre los límites del área. Para ilustrar este procedimiento, deduzcamos la fórmula para el momento de inercia del área de un rectángulo con respecto al eje centroidal X de la Fig. A.35.

El área elemental dA se escoge como una tira angosta paralela al eje X, localizada a una distancia y a partir del eje, como en la Fig. A. 35b. El segundo

momento de esa área, $y^2\, dA$, se integra entre los límites de $-h/2$ a $+h/2$. A continuación se indica el cálculo de la integral:

$$I_X = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b\, dy, \qquad I_X = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2}.$$

Sustituyendo los límites en la ecuación, tenemos

$$I_X = b\left[\frac{(+h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3}\right], \qquad I_X = \frac{bh^3}{12}.$$

Esta es la ecuación para el momento de inercia del área de un rectángulo con respecto a un eje centroidal paralelo a su base. Las ecuaciones para otras formas geométricas se obtienen de una manera semejante, y las que corresponden a momento de inercia de cinco formas

Tabla A.3

Forma	Figura	Momento de inercia
Rectángulo	h; b	$\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo	D	$\bar{I} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$
Triángulo	h; $\frac{h}{3}$; b	$\bar{I} = \frac{1}{36}bh^3$
Semicírculo	R; $\frac{4R}{3\pi}$	$\bar{I} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4 = 0.11R^4$
Cuadrante de círculo	$\frac{4R}{3\pi}$; R; $\frac{4R}{3\pi}$	$\bar{I} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)\frac{R^4}{2} = 0.055R^4$

geométricas comunes se dan en la Tabla A.3. En todos los casos, las fórmulas dadas son para un eje que pasa a través del centroide del área.

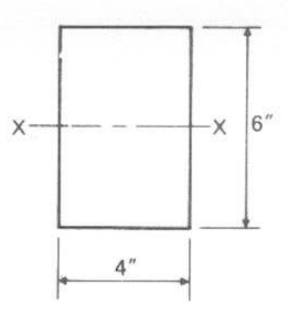


FIGURA A.36

EJEMPLO A.21 Calcular el momento de inercia con respecto al eje centroidal *X-X* del rectángulo indicado en la Fig. A.36.

SOLUCION

$$I_X = (\tfrac{1}{12})bh^3 = (\tfrac{1}{12})(4)(6)^3, \qquad I_X = 72 \text{ plg}^4. \ \blacksquare$$

EJEMPLO A.22 Determinar el momento de inercia con respecto al eje centroidal *Y-Y* del rectángulo indicado en la Fig. A. 37.

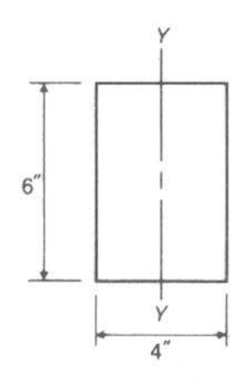


FIGURA A.37

SOLUCION

$$I_Y = (\tfrac{1}{12})bh^3 = (\tfrac{1}{12})(6)(4)^3, \qquad I_Y = 32 \text{ plg}^4.$$

Nótese que el "ancho", b, siempre es la dimensión paralela al eje considerado, mientras que el "peralte" h, siempre es la dimensión perpendicular a ese eje.

A.18 Teorema de los ejes paralelos

Frecuentemente es necesario calcular el momento de inercia de una sección con respecto a un eje distinto al que pasa por el centroide. El teorema de los ejes paralelos desarrollado a continuación es un método conveniente para hacerlo.

Si se requiere el momento de inercia con respecto al eje $X' - X'$ en vez de con respecto al eje centroidal $X - X$, se aplica la misma definición de momento de inercia $I_{X'-X'} = \int y^2\,dA$. En la Fig. A.38 la distancia y' se toma a partir del eje centroidal $X - X$ hacia la tira elemental, y la distancia d es la distancia entre el eje paralelo $X' - X'$ y el eje centroidal $X - X$.

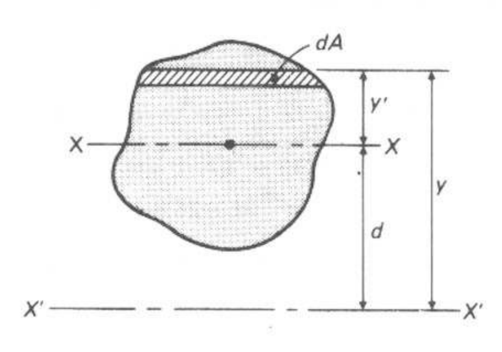


FIGURA A.38

Por definición, el momento de inercia con respecto al eje $X' - X'$ es:

$$I_{X'} = \int y^2 \, dA.$$

Pero, $y = (y' + d)$ y así:

$$I_{X'} = \int (y' + d)^2 \, dA = \int (y'^2 + 2y' \, d + d^2) \, dA$$

$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' \, dA + d^2 \int dA. \quad \text{(a)}$$

La primera integral de la ec. (a) es el momento de inercia del área con respecto a su eje centroidal $\bar{I}$. El segundo término representa la distancia del eje $X - X$ medida desde el centroide; es cero puesto que el eje $X - X$ coincide con el centroide del área. En el último término, $\int dA$ es el área total de la figura.

Considerando las condiciones descritas anteriormente, se escribe la ec. (a) como:

$$I_{X'} = \bar{I}_X + Ad^2, \quad \text{(A.8)}$$

donde:

$I_{X'}$ = momento de inercia con respecto al eje $X'–X'$ en plg^4 o en m^4,
$\bar{I}_X$ = momento de inercia del área con respecto a su propio eje centroidal, en plg^4 o en m^4,
A = área de la sección en plg^2 o en m^2,
d = distancia entre el eje $X'–X'$ y el eje $X–X$ en plg o en m.

Debe notarse que el momento de inercia mínimo de un área ocurre con respecto a un eje que pasa a través del centroide del área. Los ejemplos siguientes ilustran el uso del teorema de los ejes paralelos.

EJEMPLO A.23 Determinar el momento de inercia con respecto al eje $X'–X'$ del área mostrada en la Fig. A. 39.

SOLUCION

$$I_{X'} = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 + Ad^2$$
$$= \tfrac{1}{12}(2)(6)^3 + (2)(6)(7)^2 = 36 + 588$$
$$= 624 \text{ plg}^4 \ \blacksquare$$

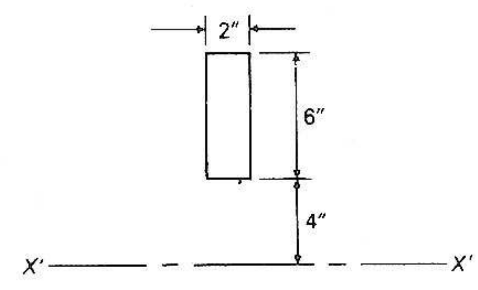


FIGURA A.39

A.19 Momento de inercia de áreas compuestas

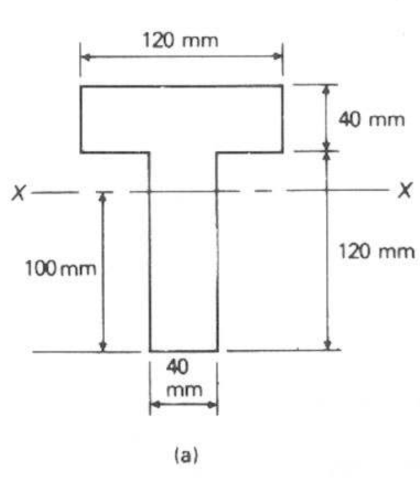
Las dos secciones anteriores cubrieron los métodos para determinar el momento de inercia de una forma geométrica simple con respecto a cualquier eje. Para un área que está formada por varias de estas formas simples, el momento de inercia de toda el área es la suma de los momentos de inercia de cada una de las áreas individuales con respecto al eje deseado.

En problemas prácticos de mecánica, generalmente se necesita determinar el momento de inercia de un área complicada con respecto al eje centroidal de esa área. Los pasos para determinar el momento de inercia centroidal de un área compuesta son:

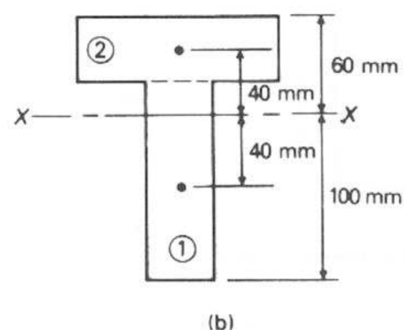
1. Se determina el centroide del área. Según la sección A.16, los pasos son:
   a) Se descompone el área en formas geométricas simples.
   b) Se escoge un eje de referencia (o ejes de referencia).
   c) Se aplica $\bar{y} = \Sigma\, Ay/\Sigma\, A$ y/o $\bar{x} = \Sigma\, Ax/\Sigma\, A$.
2. A partir de un eje que pasa por el centroide que se calculó en el paso 1, se aplica el teorema de los ejes paralelos a cada una de las áreas geométricas simples.

Los ejemplos siguientes ilustran este procedimiento. En algunos casos puede ser más fácil llevar a cabo los cálculos en forma tabular, particularmente si hay que considerar varias figuras.

EJEMPLO A.24 Determinar el momento de inercia con respecto al eje centroidal de la sección en forma de T, indicada en la Fig. A.40.



(a)



(b)

FIGURA A.40

SOLUCION En el ejemplo A.18 se halló que el centroide del área estaba 100 mm arriba de la base. Las áreas geométricas simples se indican como dos rectángulos en la Fig. A.40 (b). El momento de inercia con respecto al eje X-X se calcula como se indica a continuación:

Area 1:

$$I_X = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{12}(40\times 10^{-3})(120\times 10^{-3})^3 + (120\times 10^{-3})(40\times 10^{-3})(40\times 10^{-3})^2,$$
$$I_{X1} = 13.44\times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4.$$

Area 2:

$$I_X = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{12}(120\times 10^{-3})(40\times 10^{-3})^3 + (120\times 10^{-3})(40\times 10^{-3})(40\times 10^{-3})^2,$$
$$I_{X2} = 8.32\times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4.$$

El momento de inercia de toda el área con respecto al eje X-X es, entonces

$$I_X = \sum(\bar{I} + Ad^2) = (13.44\times 10^{-6}) + (8.32\times 10^{-6}),$$
$$I_X = 21.76\times 10^{-6}\ \mathrm{m}. \quad ■$$

EJEMPLO A.25 Determinar el momento de inercia con respecto al eje centroidal del área mostrada en la Fig. A.41.

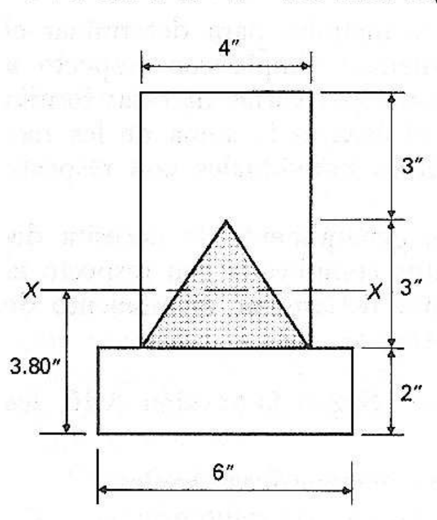


FIGURA A.41

SOLUCION En el ejemplo A.19, se halló que el centroide estaba a 3.80 plg sobre la base. Usando las mismas formas geométricas que en el ejemplo A.19, y asentando los cálculos en la Tabla A.4,

$$I_{X-X} = \sum (\bar{I} + Ad^2) = 73 + 124.8 = 197.8 \text{ plg}^4.$$

Tabla A.4

Forma	$\bar{I}$	A	d	Ad^2
① (rectángulo)	$(\frac{1}{12})(6)(2)^3 = 4$	$(6)(2) = (12)$	2.80	94.0
② (rectángulo)	$(\frac{1}{12})(4)(6)^3 = 72$	$(4)(6) = 24$	1.20	34.6
③ (triángulo)	$(\frac{1}{36})(4)(3)^3 = -3$	$\frac{1}{2}(3)(4) = -6$	0.80	−3.8
	$\sum \bar{I} = 73$			$\sum Ad^2 = 124.8$

■

EJEMPLO A.26 Determinar el momento de inercia con respecto al eje centroidal del área mostrada en la Fig. A.42. Calcular tanto I_X como I_Y.

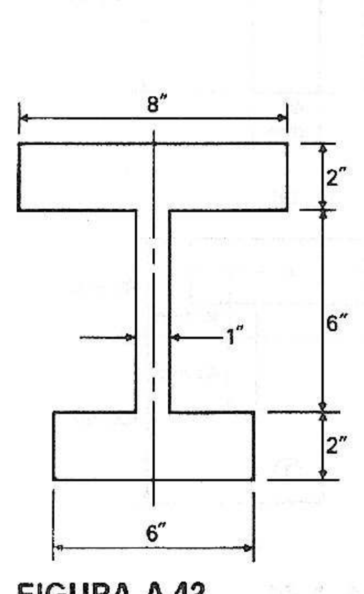


FIGURA A.42

SOLUCION Los problemas de este tipo se resuelven en forma más conveniente mediante el uso de una forma tabular para los cálculos, como se ilustra en las Tablas A.5 y A.6. En la solución, el primer paso consiste en determinar el centroide. Por simetría, el centroide localizado por $\bar{x}$ queda sobre la línea

vertical central. Para determinar y, suponemos un eje de referencia que pasa por la parte inferior (no se indica) y las áreas simples, como se indica en la Tabla A.5. Usando los cálculos de la Tabla A.5, se ve que:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{186}{34}$$

$$\bar{y} = 5.48 \text{ plg}$$

$$I_X = 27.3 + 439.4$$

$$I_X = 466.7 \text{ plg}^4$$

El momento de inercia con respecto al eje Y–Y se determina a partir de la Tabla A.6 y es $I_Y = 121.8$ plg^4.

Tabla A.5

Forma	A	y	Ay	$\bar{I}_x$	d, plg.	Ad^2
2″, 8″	$(2)(8) = 16$	9	144	$(\frac{1}{12})(8)(2)^3 = 5.3$	3.52	$(16)(3.52)^2 = 198$
1″, 6″	$(1)(6) = 6$	5	30	$(\frac{1}{12})(1)(6)^3 = 18$	0.48	$6(0.48)^2 = 1.4$
2″, 6″	$(2)(6) = 12$	1	12	$(\frac{1}{12})(6)(2)^3 = 4$	4.48	$12(4.48)^2 = 240$
	$\sum A = 34$	$\sum Ay = 186$		$\sum \bar{I}_X = 27.3$		$\sum Ad^2 = 439.4$

Tabla A.6

Forma	A	$\bar{I}_Y$	d	Ad^2
2″, 8″	16	$(\frac{1}{12})(2)(8)^3 = 85.3$	0	0
1″, 6″	6	$(\frac{1}{12})(6)(1)^3 = 0.5$	0	0
2″, 6″	12	$(\frac{1}{12})(2)(6)^3 = 36.0$	0	0
		$\sum \bar{I}_Y = 121.8$	$\sum Ad^2 = 0$	

■

Problemas

Determinar el momento de inercia con respecto a los ejes centroidales de las figuras indicadas a continuación:

A.69 Fig. PA.59.
A.70 Fig. PA.60.
A.71 Fig. PA.61.
A.72 Fig. PA.62.
A.73 Fig. PA.63.
A.74 Fig. PA.64.
A.75 Fig. PA.65.
A.76 Fig. PA.66.
A.77 Fig. PA.67.
A.78 Fig. PA.68.

A.20 Momento polar de inercia

Puede determinarse un momento de inercia usando coordenadas polares en vez de las coordenadas rectangulares de las secciones anteriores. El momento polar de inercia se define como:

$$J = \int r^2\, dA,$$

donde:

J = momento polar de inercia en plg^4, o en m^4,
r = distancia radial del elemento de área a partir del eje considerado, que en este caso es perpendicular a la sección transversal en plg, o m,
dA = área elemental considerada en plg^2, o en m^2.

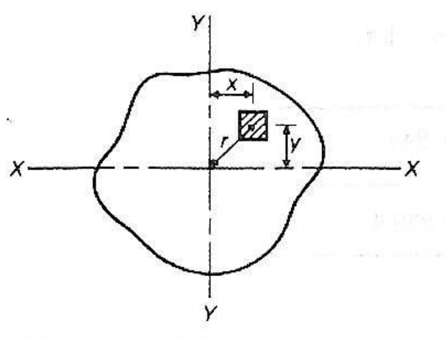


FIGURA A.43

El momento polar de inercia se expresa en términos de los momentos de inercia rectangulares transformando el sistema coordenado. Por ejemplo, en la Fig. A.43, la distancia radial r, a partir de un eje que pasa por el centro de coordenadas, perpendicular a la sección transversal, se expresa en términos de las coordenadas x e y, usando el teorema de Pitágoras. Así:

$$J = \int r^2\, dA.$$

Pero $r^2 = x^2 + y^2$, y, por consiguiente,

$$J = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2\, dA + \int y^2\, dA.$$

Por definición

$$I_Y = \int x^2\, dA \qquad \text{e} \qquad I_X = \int y^2\, dA.$$

Por consiguiente

$$J = I_X = I_Y. \tag{A.10}$$

EJEMPLO A.27 Determinar el momento polar de inercia de una sección circular de diámetro D como se indica en la Fig. A.44, con respecto a un eje que pasa por el centro de la sección.

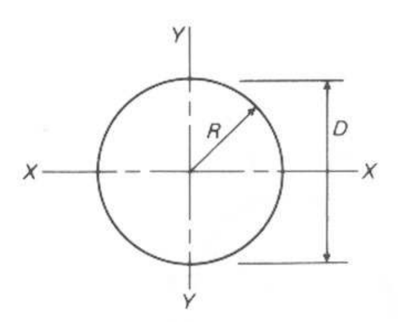


FIGURA A.44

SOLUCION De la Tabla A.3.

$$I_X = I_Y = \frac{\pi D^4}{64};$$

$$J = I_X + I_Y = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO A.28 Determinar el momento polar de inercia para la sección del ejemplo A.26. Véase la Fig. A.45.

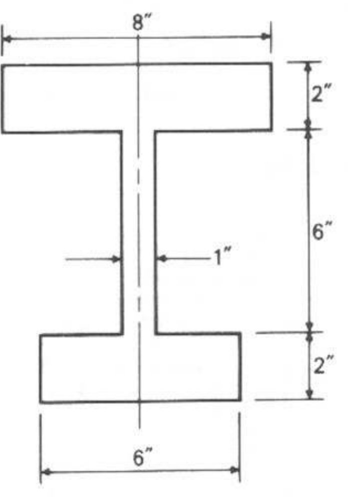


FIGURA A.45

SOLUCION Según el ejemplo A.26:

$$I_X = 466.7 \text{ plg}^4,$$

$$I_Y = 121.8 \text{ plg}^4,$$

$$J = I_X + I_Y = 466.7 + 121.8$$

$$J = 588.5 \text{ plg}^4 \quad \blacksquare$$

Problemas

A.79-A.82 Determinar el momento polar de inercia para las áreas indicadas en las Figs. PA.79 a PA.82.

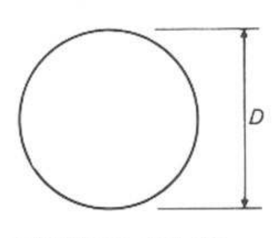


FIGURA PA.79

Determinar el momento polar de inercia para las Figs. que se mencionan a continuación.

A.83 Fig. PA.59.
A.84 Fig. PA.60.
A.85 Fig. PA.61.
A.86 Fig. PA.62.
A.87 Fig. PA.65.
A.88 Fig. PA.67.

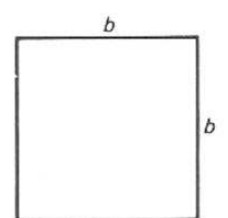


FIGURA PA.80

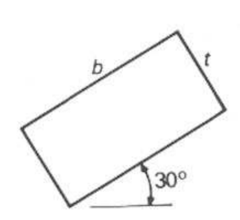


FIGURA PA.81

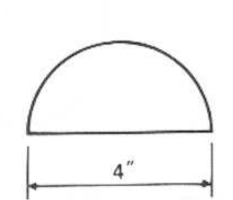


FIGURA PA.82

A.21 Producto de inercia

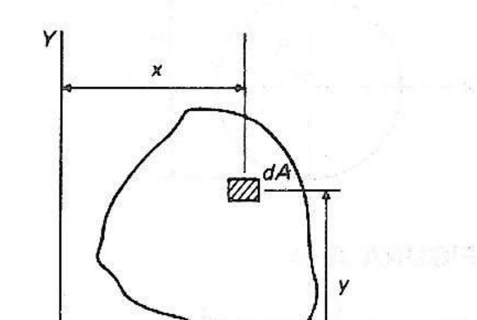


FIGURA A.46

El producto de inercia se define como

$$P_{XY} = \int xy\, dA. \tag{A.9}$$

La Fig. A.46 ilustra un área general. El producto de inercia para esta área puede determinarse identificando las coordenadas x y y de cada diferencial de área e integrando la ec. (A.9) sobre toda el área.

Un momento de inercia, I_X, o I_Y, siempre es una cantidad positiva debido a que la distancia variable está al cuadrado. Por otro lado, el producto de inercia, puede ser positivo o negativo debido a que los términos x e y son independientes. Cuando ambos tienen el mismo signo, el producto de inercia es positivo. Cuando los signos difieren, el producto de inercia es negativo.

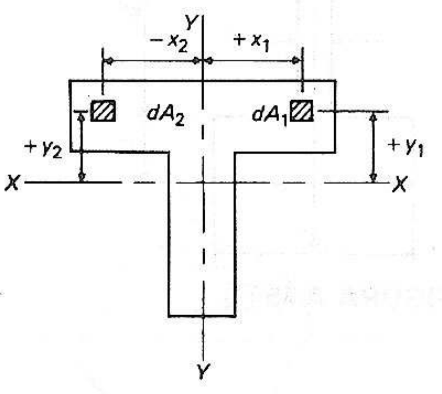


FIGURA A.47

Cuando cualquiera de los ejes es de simetría, el producto de inercia se vuelve cero. La razón es que cada pareja de áreas diferenciales situadas en los lados opuestos del eje de simetría se cancelan, debido a que un valor de P_{XY} es positivo, mientras que el otro es negativo. Consideremos, por ejemplo, la sección en forma de T de la Fig. A.47. Con respecto a los ejes X–X y Y–Y el área dA_1 tiene un valor positivo para $xydA$ debido a que ambas, x e y, son positivas. El área dA_2 es su pareja, y tiene un valor negativo para $xydA$ ya que x es negativa y y es positiva. Cada pareja de este tipo de elementos, con respecto a este par de ejes se cancelará, dando por resultado un producto de inercia igual a cero.

El producto de inercia siempre se refiere a un par de ejes. Cuando los ejes no son ejes centroidales, puede deducirse un teorema de ejes paralelos semejante al de la Sección A. 18.

Consideremos el área de la Fig. A.48. El elemento de área dA se localiza con sus coordenadas x e y a partir de los ejes centroidales X e Y. Estos ejes son, a su vez, localizados mediante sus distancias d y b a

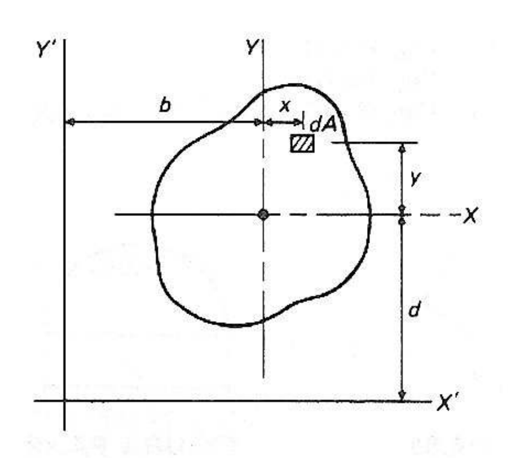


FIGURA A.48

partir de los ejes X' e Y'. El producto de inercia con respecto a los ejes X' e Y' es

$$P_{X'Y'} = \int xy\, dA = \int (x + b)(y + d)\, dA.$$

Desarrollando esta expresión, obtenemos

$$P_{X'Y'} = \int xy\, dA + d\int x\, dA + b\int y\, dA + bd\int dA.$$

Pero, $\int x\, dA$ y $\int y\, dA$ son cero debido a que X e Y son, por definición, ejes centroidales. Por consiguiente,

$$P_{X'Y'} = \bar{P}_{XY} + dbA \qquad \text{(A.10)}$$

donde

$P_{X'Y'}$ = producto de inercia con respecto a dos ejes X' e Y',
$\bar{P}_{XY}$ = producto de inercia del área con respecto a los ejes centroidales X e Y,
d, b = distancias perpendiculares a los ejes centroidales, a partir de los ejes con respecto a los cuales se está calculando el producto de inercia.
A = área de la sección transversal.

El ejemplo A.29 ilustra el cálculo del producto de inercia para un área.

EJEMPLO A.29 Calcular el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales, para la sección Z indicada en la Fig. A.49.

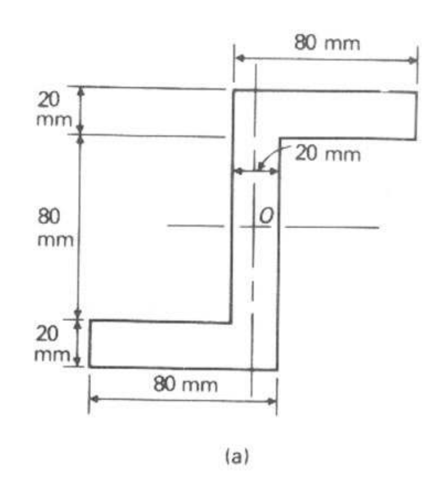
SOLUCION Por inspección reconocemos que los ejes centroidales se intersecan en O. Se usa el teorema de los ejes paralelos de la ec. (A.10) para cada uno de los tres elementos rectangulares de la Fig. A.49 (b). El producto de inercia con respecto a sus propios ejes centroidales, para cada uno de los tres elementos rectangulares es cero debido a que cada elemento rectangular es simétrico con relación a dichos ejes. El producto de inercia para cada elemento con respecto a los ejes X y Y que pasan por O, se convierte en

Area 1:

$$P_{XY} = \bar{P}_{XY} + dbA,$$
$$P_{XY} = 0 + (+50 \times 10^{-3})(+40 \times 10^{-3})[(60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})],$$
$$P_{XY} = +2.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^4.$$

Area 2:

$$P_{XY} = \bar{P}_{XY} + dbA,$$
$$P_{XY} = 0 + (0)(0)(20 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3}),$$
$$P_{XY} = 0.$$



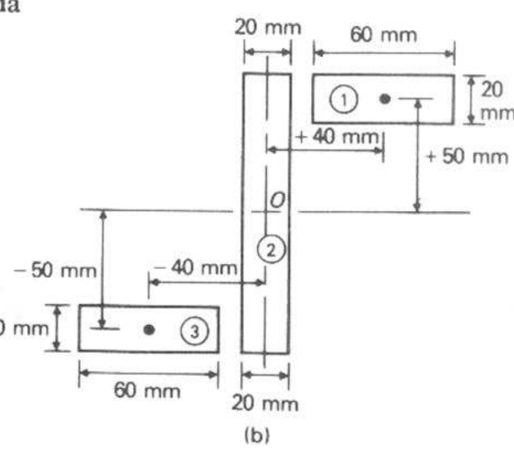


FIGURA A.49

Area 3:

$$P_{XY} = \bar{P}_{XY} + dbA,$$
$$P_{XY} = 0 + (-50 \times 10^{-3})(-40 \times 10^{-3})[(60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})],$$
$$P_{XY} = +2.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^4.$$

El producto de inercia para toda el área es la suma de los productos de inercia para cada una de las partes con respecto a los ejes centroidales X e Y. Esto se convierte en

$$P_{XY} = (+2.4 \times 10^{-6}) + 0 + (2.4 \times 10^{-6})$$
$$P_{XY} = +4.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^4. \quad ■$$

Problemas

A.89-A.91 Determinar el producto de inercia con respecto a los ejes X e Y para las secciones indicadas en las Figs. PA.89 a PA.91.
A.92-A.97 Determinar el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales de las secciones indicadas en las Figs. PA.92 a PA.97.

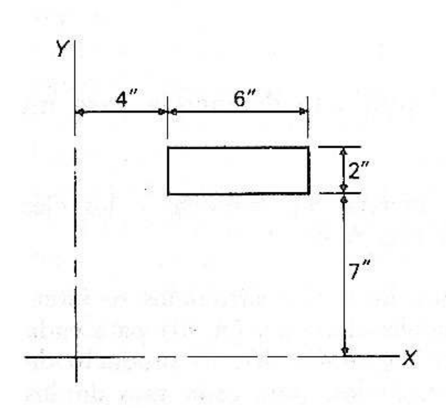


FIGURA PA.89

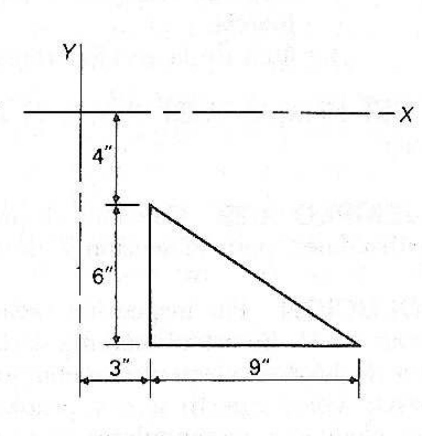


FIGURA PA.90

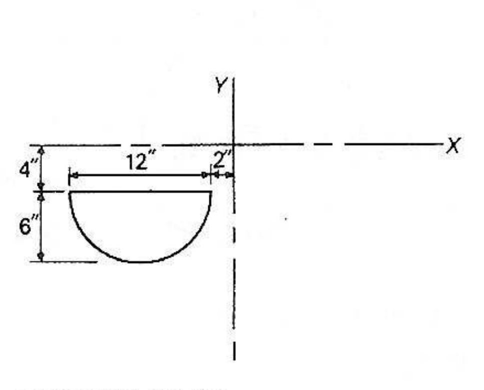


FIGURA PA.91

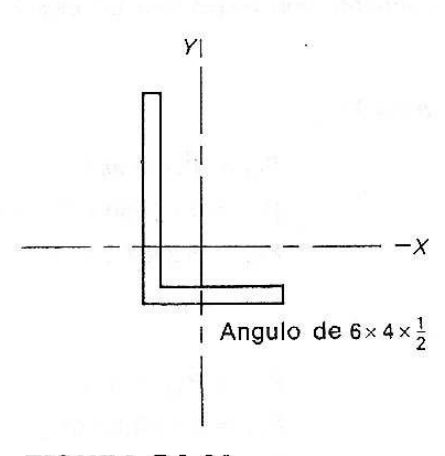


FIGURA PA.92

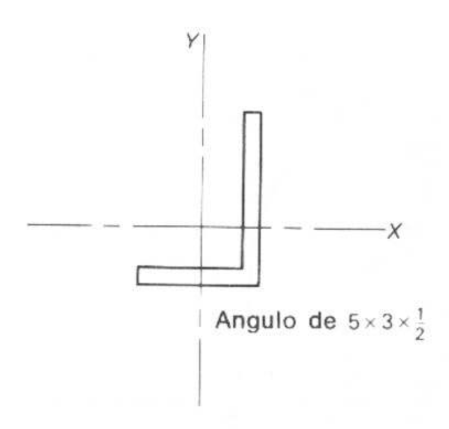


FIGURA PA.93

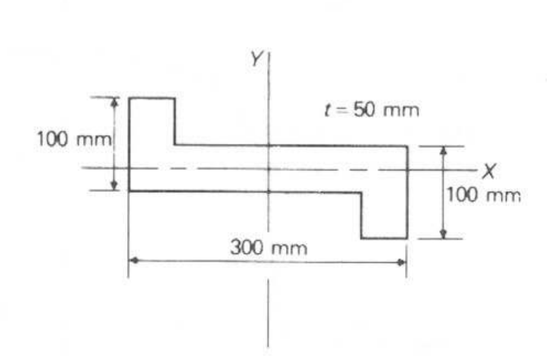


FIGURA PA.94

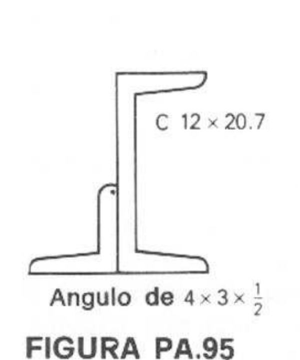


FIGURA PA.95



FIGURA PA.96

150 mm
30 mm
340 mm
30 mm
120 mm
120 mm
30 mm

FIGURA PA.97

A.22 Momento de inercia para ejes girados

El momento de inercia de un área depende tanto de la geometría del área como de la posición de los ejes escogidos. Para un área dada, el momento de inercia tiene un valor diferente para cada eje coordenado. Cuando los ejes son paralelos a los ejes centroidales, puede usarse el teorema de los ejes paralelos de la sección A.18 o de la A.21 para calcular los valores respectivos. Sin embargo, cuando los ejes centroidales se giran en vez de desplazarse, debe deducirse un tipo diferente de expresión para el cálculo de esos valores.

Consideremos el área general indicada en la Fig. A.50. Queremos deducir una ecuación para el momento de inercia con respecto a los ejes X' e Y', girados un ángulo θ con respecto a los ejes X e Y. Por definición,

$$I_{X'} = \int y_1^2 \, dA; \tag{a}$$

$$I_{Y'} = \int x_1^2 \, dA. \tag{b}$$

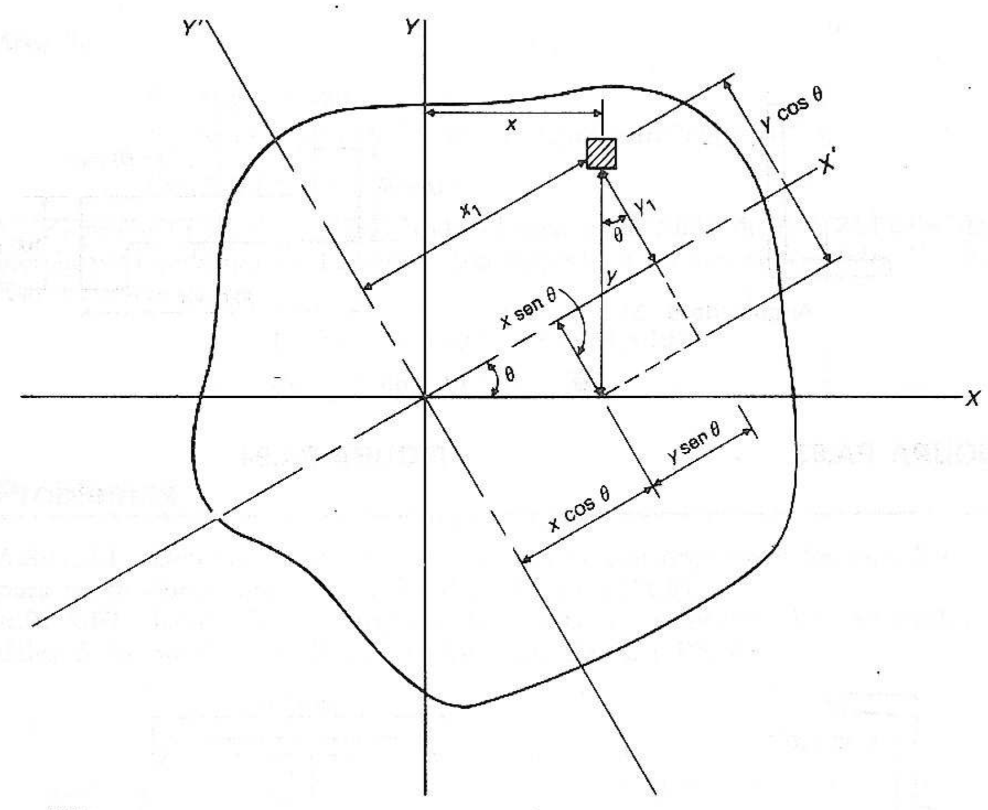


FIGURA A.50

Los valores de y_1 y x_1 pueden relacionarse con los ejes originales y con el ángulo de rotación θ mediante las siguientes relaciones trigonométricas, como se puede ver en la Fig. A.50:

$$y_1 = y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta; \tag{c}$$

$$x_1 = y \operatorname{sen}\theta + x \cos\theta. \tag{d}$$

Sustituyendo la ec. (c) en la ec. (a), obtenemos

$$I_{X'} = \int (y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$

$$= \int y^2 \cos^2\theta\, dA - \int 2xy \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dA + \int x^2 \operatorname{sen}^2\theta\, dA.$$

Incorporando 2 sen θ cos θ = sen 2θ en la ecuación anterior nos da

$$I_{X'} = \cos^2\theta \int y^2\, dA - \operatorname{sen} 2\theta \int xy\, dA + \operatorname{sen}^2\theta \int x^2\, dA.$$

Incorporando adicionalmente las definiciones $I_X = \int y^2\, dA$, $I_Y = \int x^2\, dA$ y $P_{XY} = \int xy\, dA$, obtenemos

$$I_{X'} = I_X \cos^2\theta + I_Y \operatorname{sen}^2\theta - P_{XY} \operatorname{sen} 2\theta. \tag{A.11}$$

De manera semejante, cuando la ec. (d) se sustituye en la ec. (b), encontramos

$$I_{Y'} = I_X \operatorname{sen}^2 \theta + I_Y \cos^2 \theta + P_{XY} \operatorname{sen} 2\theta. \qquad (A.12)$$

El producto de inercia para los ejes girados puede deducirse de una manera semejante. Sustituyendo las ecs. (c) y (d) en la definición $P_{X'Y'} = \int x_1 y_1 \, dA$, obtenemos

$$P_{X'Y'} = \frac{I_X - I_Y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + P_{XY} \cos 2\theta. \qquad (A.13)$$

Cuando se conocen los valores de I_X, I_Y, y P_{XY} para cualquier sistema de ejes coordenados, pueden obtenerse los valores de I_X, I_Y, y P_{XY} para otros ejes cualesquiera, mediante las ecs. (A.11), (A.12), y (A.13).

Cuando sumamos término a término las ecuaciones (A.11) y (A.12), obtenemos

$$I_{X'} + I_{Y'} = I_X + I_Y. \qquad (A.14)$$

La ec. (A.14) establece que la suma de los momentos de inercia con respecto a cualquier par de ejes coordenados será igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a cualquier otro par de ejes coordenados.

A.23 Momentos de inercia principales

En la sección anterior se dedujeron ecuaciones para los momentos y el producto de inercia con respecto a cualquier par de ejes coordenados. Siempre hay un sistema de ejes centroidales con respecto a los cuales ocurren los momentos de inercia máximo y mínimo. A estos ejes se les llama *ejes principales*.

Un eje principal es, por definición, un eje con respecto al cual ocurrirá momento de inercia máximo o mínimo. Estos ejes pueden obtenerse resolviendo un problema ordinario de máximos y mínimos usando, ya sea la ec. (A.11) o la ec. (A.12). Derivando la ec. (A.11), obtenemos

$$I_{X'} = I_X \cos^2 \theta + I_Y \operatorname{sen}^2 \theta - P_{XY} \operatorname{sen} 2\theta; \qquad (A.11)$$

$$\frac{dI_{X'}}{d\theta} = 2I_X \cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) + 2I_Y \operatorname{sen}\theta(\cos\theta) - 2P_{XY} \cos 2\theta.$$

Haciendo $dI_{X'}/d\theta = 0$ para obtener el máximo y el mínimo, encontramos

$$2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, I_X - 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, I_Y + 2 \cos 2\theta \, P_{XY} = 0.$$

Pero $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\theta$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} 2\theta(I_X - I_Y) + 2 \cos 2\theta \, P_{XY} = 0.$$

Dividiendo entre sen 2θ y simplificando, obtenemos:

$$\tan 2\theta = \frac{2P_{XY}}{I_Y - I_X}. \qquad (A.15)$$

La ecuación (A.13) da el producto de inercia para cualquier sistema de ejes girados, como:

$$P_{X'Y'} = \frac{I_X - I_Y}{2} \text{sen } 2\theta + P_{XY} \cos 2\theta. \qquad \text{(A.13)}$$

Si hacemos $P_{X'Y'} = 0$ y despejamos, obtenemos otra vez la ec. (A.15). Esto indica que el producto de inercia es cero cuando los ejes son los ejes principales.

De la sección A.21 puede recordarse que para cualquier área el producto de inercia es cero si por lo menos uno de sus ejes centroidales es un eje de simetría. Por consiguiente, los momentos de inercia con respecto a un par de ejes, de los cuales por lo menos uno de ellos es de simetría, siempre serán momentos de inercia principales. El momento de inercia será máximo con respecto a un eje principal, y mínimo con respecto al otro eje.

A.24 Círculo de Mohr para momentos de inercia

Las ecs. (A.11) y (A.12) permiten calcular el momento de inercia con respecto a cualquier par de ejes girados con respecto a otro par de ejes. Si sustituimos las identidades trigonométricas $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ y $\text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ en las ecs. (A.11) y (A.12) y simplificamos, obtenemos

$$I_{X'} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2} \cos 2\theta - P_{XY} \text{sen } 2\theta \qquad \text{(A.16)}$$

e

$$I_{Y'} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2} \cos 2\theta + P_{XY} \text{sen } 2\theta \qquad \text{(A.17)}$$

Cualquiera de estas ecuaciones, combinada con la ec. (A.13), son las ecuaciones de un círculo en su forma paramétrica. Es decir, si trazamos valores continuos de $I_{X'}$ y $P_{X'Y'}$, el lugar geométrico sería un círculo. Esta propiedad de la ecuación fue reconocida por el ingeniero alemán Otto Mohr, y el procedimiento de construcción para el cálculo se conoce como cículo de Mohr, una técnica simple para calcular momentos de inercia.

La Fig. A.51 indica un diagrama que es el lugar geométrico de las ecs. (A.13) y (A.16), o de las ecs. (A.13) y (A.17). Primero se traza el punto X que tiene por coordenadas (I_X, P_{XY}), y el punto Y de coordenadas $(I_Y, -P_{XY})$. La recta XCY se convierte en un diámetro del círculo de Mohr. A medida que el punto de coordenadas (I_X, P_{XY}) toma valores continuos, queda trazado como lugar geométrico un círculo.

En la Fig. A.51 el valor del momento de inercia máximo se indica como la distancia OB. El valor del momento de inercia mínimo es la distancia OA. Pueden obtenerse sumando o restando, respectivamente, el radio del círculo, CX o CY, a partir del centro del círculo, C. Nótese el valor de $P_{XY} = 0$ cuando el momento de inercia es máximo, o mínimo.

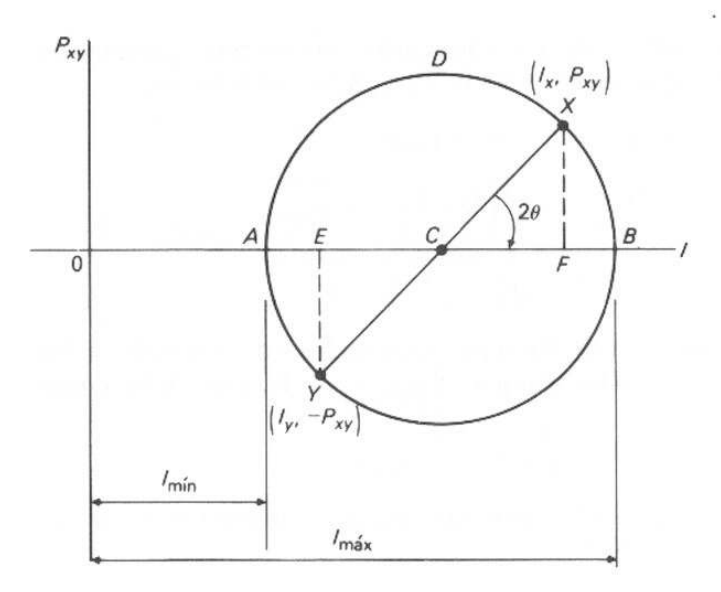


FIGURA A.51

La distancia OC es el promedio de los dos momentos de inercia; es decir, $(I_X + I_Y)/2$. El radio se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo CFX: la distancia FX es P_{XY}, y la distancia CF es $(I_X - I_Y)/2$.

Para calcular los momentos de inercia principales y localizar los ejes principales, utilizando el círculo de Mohr, se sigue el procedimiento indicado a continuación:

1. Se calculan o se obtienen de alguna manera (a) los momentos de inercia I_X e I_Y con respecto a dos ejes X, Y, mutuamente perpendiculares, y (b) el producto de inercia P_{XY}.
2. Se traza un par de ejes coordenados. La abscisa es I_X, y la ordenada es P_{XY}. Se traza el punto de coordenadas (I_X, P_{XY}). El signo algebraico de P_{XY} puede ser positivo o negativo, y consecuentemente, CX puede quedar arriba o abajo del eje horizontal. Se traza el punto de coordenadas $(I_Y, -P_{XY})$. Se unen estos puntos mediante una recta.
3. Se calcula el radio del círculo. En la Fig. A.51, el radio CX se obtiene como

$$\text{Radio} = \sqrt{(CF)^2 + (XF)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + (P_{XY})^2}$$

4. Se localiza el centro, C, del círculo. La distancia OC es

$$0C = 0E + EC$$
$$0C = I_Y + \frac{I_X - I_Y}{2}$$
$$0C = \frac{I_X + I_Y}{2}.$$

5. Se calculan los valores de los momentos de inercia principales relacionando las expresiones con la Fig. A.51, obtenemos

$$I_{máx} = 0C + CB = 0C + \text{Radio}$$

$$I_{máx} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + (P_{XY})^2}$$

$$I_{mín} = \frac{I_X + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + (P_{XY})^2}$$

6. El ángulo θ de rotación de los ejes principales con respecto a los ejes originales puede determinarse a partir de la Fig. A.51 como

$$\tan 2\theta = \frac{XF}{CF} = \frac{P_{XY}}{(I_X - I_Y)/2}.$$

Ahora se giran los ejes un ángulo θ en el mismo sentido que es preciso girar el radio para llegar al $I_{máx}$.

EJEMPLO A.30 Los valores siguientes se han determinado para el área plana indicada en la Fig. A.52:

$$I_X = +100 \text{ plg}^4 \qquad I_Y = +40 \text{ plg}^4 \qquad P_{XY} = +40 \text{ plg}^4.$$

Determinar los momentos de inercia principales, e indicar los resultados sobre un esquema del área con la orientación adecuada.

SOLUCION La Fig. A.51 (b) indica el círculo de Mohr para este problema. El punto X se traza con $I_X = 100$ y $P_{XY} = +40$. El punto Y se traza con $I_Y = 40$ y $P_{XY} = -40$. Se traza el diámetro XCY y a partir de la geometría del círculo se obtienen los valores siguientes:

$$I_{máx} = 0B = 0C + CB = 0C + \text{Radio} = 0C + \sqrt{(CF)^2 + (XF)^2}$$

$$I_{máx} = \frac{100 + 40}{2} + \sqrt{\left(\frac{100 - 40}{2}\right)^2 + (40)^2}$$

$$I_{máx} = 70 + 50$$

$$I_{máx} = 120 \text{ plg}^4;$$

$$I_{mín} = 0A = 0C - CA = 0C - \text{Radio}$$

$$I_{mín} = 70 - 50$$

$$I_{mín} = 20 \text{ plg}^4$$

La localización de los ejes principales se determina mediante

$$\tan 2\theta = \frac{XF}{CF} = \frac{40}{30} = 1.33$$

$$2\theta = 53.06°$$

$$\theta = 26.53°.$$

Los ejes principales se localizan midiendo un ángulo $\theta = 26.53°$, en sentido de las manecillas del reloj, a partir del eje X, como se indica en la Fig. A.52 (c). ■

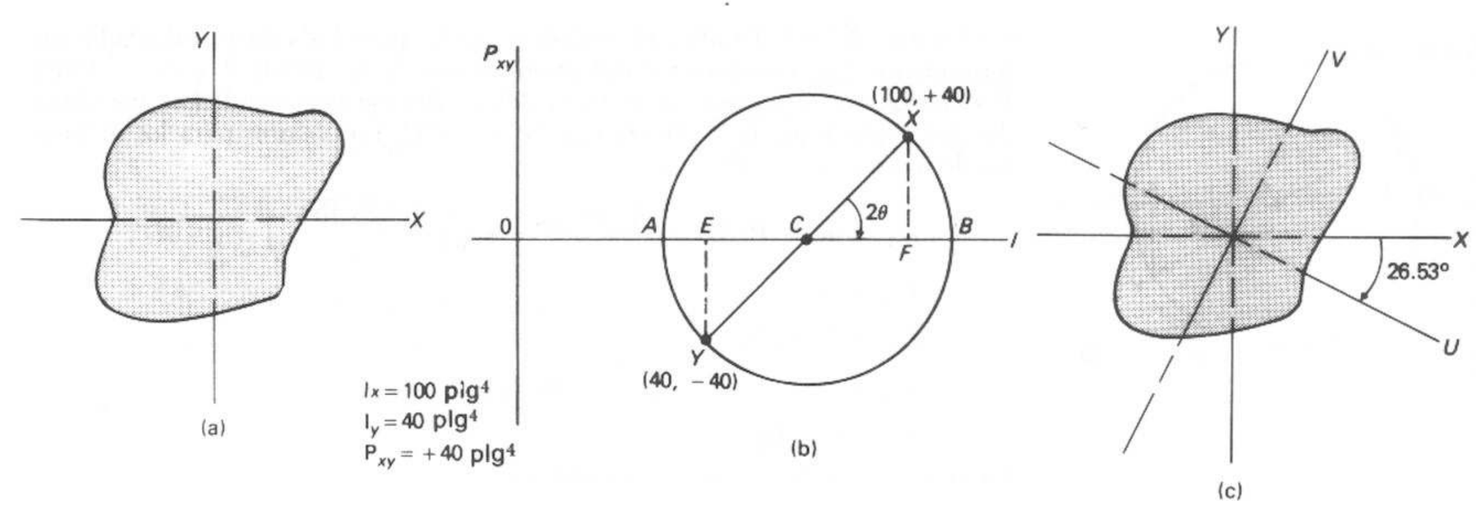


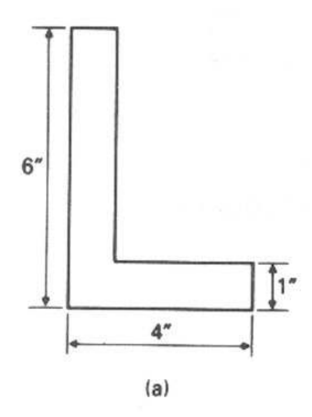
FIGURA A.52

EJEMPLO A.31 Determinar los momentos de inercia principales y el ángulo que forman los ejes principales con respecto a los ejes centroidales originales X e Y, para la sección ángulo de 6 plg × 4 plg × 1 plg, indicada en la Fig. A.53.

SOLUCION El primer paso consiste en localizar los ejes centroidales. Suponiendo que la sección ángulo está formada por dos elementos rectangulares, localizamos el centroide usando las ecs. (A.6) y (A.7).

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, Ay}{\Sigma\, A} = \frac{(3)(1)(0.5) + (6)(1)(3)}{(3)(1) + (6)(1)} = 2.17 \text{ plg};$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, Ax}{\Sigma\, A} = \frac{(3)(1)(2.5) + (6)(1)(0.5)}{(3)(1) + (6)(1)} = 1.17 \text{ plg}.$$



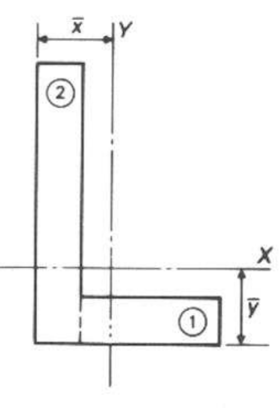


FIGURA A.53

En seguida calculamos I_X, I_Y, y P_{XY} con respecto a los ejes centroidales X y Y. A partir de la ec. (A.8), obtenemos

$$I_X = \sum (\bar{I}_X + Ad^2)$$

$$= \tfrac{1}{12}(3)(1)^3 + (3)(1)(1.67)^2 + \tfrac{1}{12}(1)(6)^3 + (6)(1)(0.83)^2$$

$$I_X = 30.74 \text{ plg}^4;$$

$$I_Y = \sum (I_Y + Ad^2)$$

$$= \tfrac{1}{12}(1)(3)^3 + (3)(1)(1.33)^2 + \tfrac{1}{12}(6)(1)^3 + (6)(1)(0.67)^2$$

$$I_Y = 10.76 \text{ plg}^4.$$

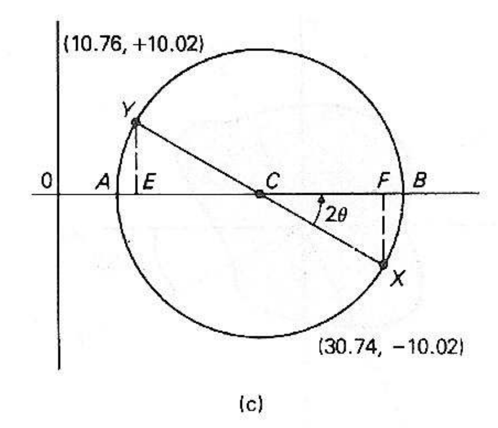
A partir de la ec. (A.10), deducimos

$$P_{XY} = (\bar{P}_{XY} + dbA),$$

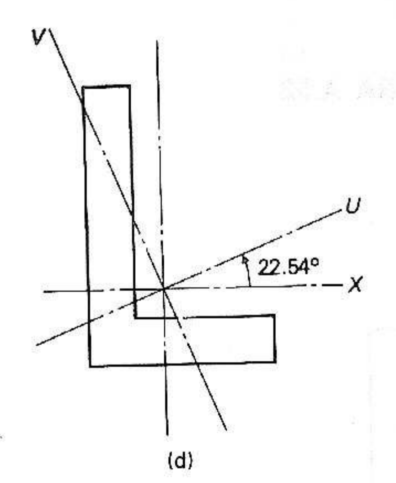
$$P_{XY} = (0)(0)(3)(1) + (+1.33)(-1.67)(3)(1) + (0)(0)(6)(1) + (-0.67)(+0.83)(6)(1),$$

$$P_{XY} = 0 - 6.68 + 0 - 3.34,$$

$$P_{XY} = -10.02 \text{ plg}^4$$



(c)



(d)

FIGURA A.53 (cont.)

La Fig. A.53 (c) indica el círculo de Mohr para los valores calculados anteriormente. Las coordenadas del punto X son $I_X = 30.74$, $P_{XY} = -10.02$. Por consiguiente, el punto X se traza debajo del eje horizontal. Las coordenadas del punto Y son $I_Y = 10.76$, $P_{XY} = +10.02$. Los valores para los momentos de inercia principales son

$$I_{\text{máx}} = 0C + \text{ Radio } = \frac{30.74 + 10.76}{2} + \sqrt{\left(\frac{30.74 - 10.76}{2}\right)^2 + (10.02)^2},$$

$$I_{\text{máx}} = 20.75 + 14.15,$$

$$I_{\text{máx}} = 34.9 \text{ plg}^4;$$

$$I_{\text{mín}} = 0C - \text{ Radio } = 20.75 - 14.15$$

$$I_{\text{mín}} = 6.6 \text{ plg}^4.$$

La localización de los ejes principales es

$$\tan 2\theta = \frac{XF}{CF} = \frac{10.02}{9.99} = 1.003,$$

$$2\theta = 45.08°,$$

$$\theta = 22.54°.$$

La Fig. A.53 (d) indica la sección y los ejes principales $U(I_{\text{máx}})$ y $V(I_{\text{mín}})$. El eje X se gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj para llegar a U, ya que 2θ, según la Fig. A.53 (c) gira en este sentido para llegar al punto B. ■

EJEMPLO A.32 Determinar los momentos de inercia principales y los ejes principales para la sección Z de la Fig. A.54.

SOLUCION Por inspección, los ejes centroidales se intersecan en O. Usando los elementos del ejemplo A.29, I_X e I_Y se convierten en

$$I_X = \sum (\bar{I}_X + Ad^2),$$

$$\begin{aligned} I_X = {} & \tfrac{1}{12}(60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})^3 + (60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(50 \times 10^{-3})^2 \\ & + \tfrac{1}{12}(20 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3})^3 + (20 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3})(0)^2 \\ & + \tfrac{1}{12}(60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})^3 + (60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(-50 \times 10^{-3})^2, \end{aligned}$$

$$I_X = 8.96 \times 10^{-6} \text{ m}^4;$$

$$I_Y = \sum (\bar{I}_Y + Ad^2),$$

$$\begin{aligned} I_Y = {} & \tfrac{1}{12}(20 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})^3 + (60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-3})^2 \\ & + \tfrac{1}{12}(120 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})^3 + (120 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(0)^2 \\ & + \tfrac{1}{12}(20 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})^3 + (60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(-40 \times 10^{-3})^2, \end{aligned}$$

$$I_Y = 4.64 \times 10^{-6} \text{ m}^4.$$

En el ejemplo A.29 encontramos

$$P_{XY} = +4.8 \times 10^{-6} \text{ m}^4.$$

La Fig. A.54 (b) indica el círculo de Mohr para esta sección. Los valores de los momentos de inercia principales son

$$I_{máx} = 0C + \text{ Radio } = \frac{8.96 + 4.64}{2} + \sqrt{\left(\frac{8.96 - 4.64}{2}\right)^2 + (4.8)^2}$$

$$I_{máx} = 6.8 + 5.26$$

$$I_{máx} = 12.06 \times 10^{-6}\ \text{m}^4;$$

$$I_{mín} = 0C - \text{ Radio } = 6.8 - 5.26$$

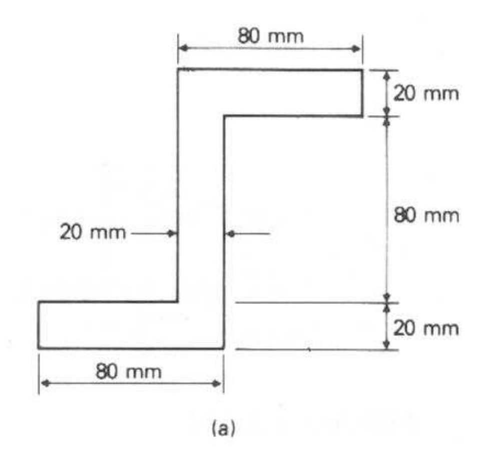
$$I_{mín} = 1.54 \times 10^{-6}\ \text{m}^4.$$

La localización de los ejes principales es

$$\tan 2\theta = \frac{XF}{CF} = \frac{4.8}{2.16} = 2.22$$

$$2\theta = 65.8°$$

$$\theta = 32.9°.$$



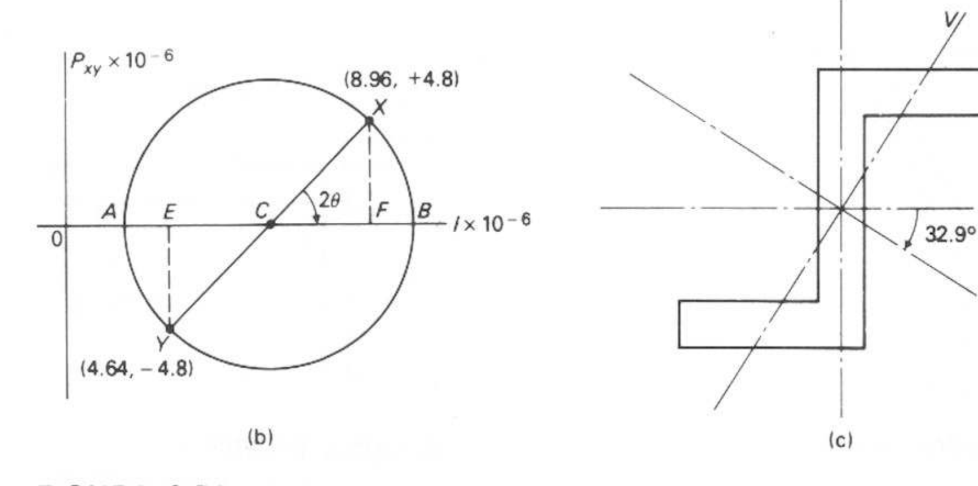


FIGURA A.54

La Fig. A.54 (c) indica la sección Z y los ejes principales U(máximo) y V(mínimo). Los ejes principales se giran en el sentido de las manecillas del reloj debido a que el diámetro XCY de la Fig. A.54 (b) se giró hasta ACB para obtener los momentos de inercia principales. ■

Problemas

Determinar los momentos de inercia principales y localizar los ejes principales, con respecto al centroide, para los problemas siguientes

A.98 Fig. PA.92.
A.99 Fig. PA.93.
A.100 Fig. PA.94.
A.101 Fig. PA.95.
A.102 Fig. PA.97.

A.103-A.106 Determinar los momentos de inercia principales y localizar los ejes principales en el centroide, para las secciones indicadas en las Figs. PA.103 a PA.106.

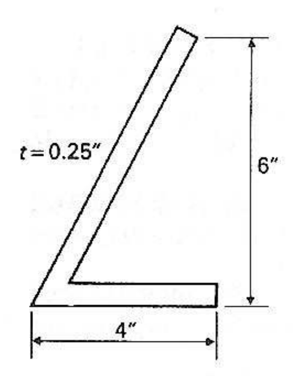


FIGURA PA.103

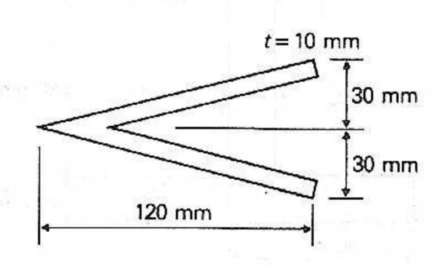


FIGURA PA.104

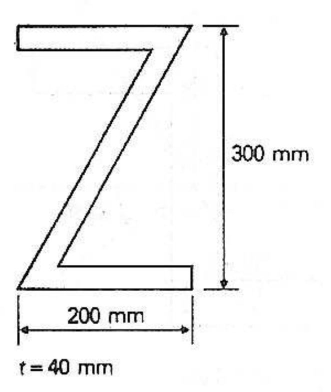


FIGURA PA.105

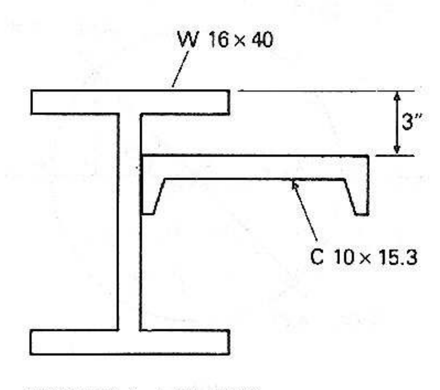


FIGURA PA.106

A.25 Radio de giro

El radio de giro es otra definición matemática que es enteramente útil en la solución de ciertos problemas de mecánica. Justamente como con la definición de momentos de inercia, es difícil atribuirle un significado físico al término. Sin embargo, es muy común la aplicación de esta cantidad, particularmente con respecto al diseño de columnas.

El radio de giro se define como

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \tag{A.18}$$

donde

r = radio de giro, en plg, o en m,
I = momento de inercia de la sección, en plg^4, o en m^4,
A = área de la sección, en plg^2, o en m^2.

El radio de giro se determina con respecto a un eje aquel con respecto al cual se toma el momento de inercia. El radio de giro con respecto a ejes particulares se escribe como

$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}}, \qquad r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}$$

Conociendo el momento de inercia y el área, podemos obtener el radio de giro, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO A.33 Determinar el radio de giro de la sección rectangular indicada en la Fig. A.55 con respecto a los ejes X–X e Y–Y.

SOLUCION Calculamos r_X mediante

$$I_X = \tfrac{1}{12}(120 \times 10^{-3})(180 \times 10^{-3})^3 = 58.32 \times 10^{-6}\ \text{m}^4;$$
$$A = (180 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3}) = 21\,600 \times 10^{-6}\ \text{m}^2;$$
$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{58.32 \times 10^{-6}}{21\,600 \times 10^{-6}}}$$
$$r_X = 51.9\ \text{mm}.$$

Determinamos r_Y como

$$I_Y = \tfrac{1}{12}(180 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3})^3 = 25.92 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{25.92 \times 10^{-6}}{21\,600 \times 10^{-6}}}$$
$$r_Y = 34.6\ \text{mm}. \quad ■$$

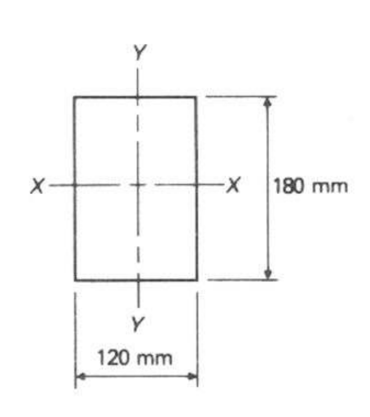


FIGURA A.55

EJEMPLO A.34 Verificar que $r_X = 3.47$ plg, y $r_Y = 2.02$ plg para la sección transversal de una viga W 8 × 31.

SOLUCION En el Apéndice H se dan las propiedades de los perfiles laminados W. En estas tablas se lee, $I_X = 110.0$ plg^4, $I_Y = 37.1$ plg^4, y $A = 9.13$ plg^2, para la W 8 × 31.

Los radios de giro son,

$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{110.0}{9.13}}$$

$$r_X = 3.47 \text{ plg};$$

$$r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{37.1}{9.13}}$$

$$r_Y = 2.02 \text{ plg.}$$ ■

Problemas

Determinar los radios de giro con respecto a los ejes centroidales de las figuras que se indican a continuación.

A.107 Fig. PA.62.
A.108 Fig. PA.65.
A.109 Fig. PA.66.
A.110 Fig. PA.68.
A.111 Fig. PA.92.
A.112 Fig. PA.93.
A.113 Fig. PA.103.
A.114 Fig. PA.106.

B

Deducción sin uso del cálculo de fórmulas de esfuerzos básicos

B.1 Introducción

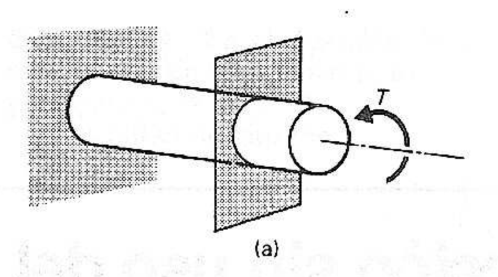
Las fórmulas deducidas en mecánica de materiales requieren solamente álgebra elemental para su uso. Sin embargo, el objetivo de este libro es proporcionar la teoría que hay detrás de las aplicaciones, bajo una amplia variedad de condiciones. Es importante el entendimiento de la deducción de las fórmulas básicas usadas en la mecánica de materiales para un entendimiento de la respuesta interna de un miembro sometido a diversas cargas.

En este apéndice se proporcionan la deducción alternativa de fórmulas sin uso del cálculo, para el esfuerzo cortante en ejes o flechas de sección circulares, para el esfuerzo de flexión, y para el esfuerzo cortante en vigas. El objeto de hacer esto es permitir que los estudiantes que no han tenido cursos sobre cálculo elemental entiendan la teoría del comportamiento físico. La teoría y el desarrollo de estas fórmulas usan las mismas figuras y el mismo enfoque que las deducciones hechas por medio del cálculo en los capítulos respectivos.

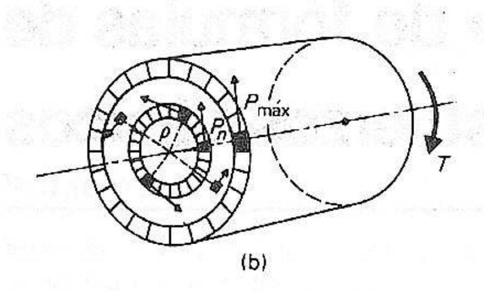
B.2 Esfuerzo cortante en ejes de sección circulares

La ec. (3.1) que da la relación entre el máximo esfuerzo cortante en una flecha y el par interno en la sección, se dedujo en la sección 3.2 por medio del cálculo. Los anillos concéntricos se consideraron como de un área infinitamente pequeña, y se integraron los momentos de cada uno de los anillos para dar el momento interno total en la flecha.

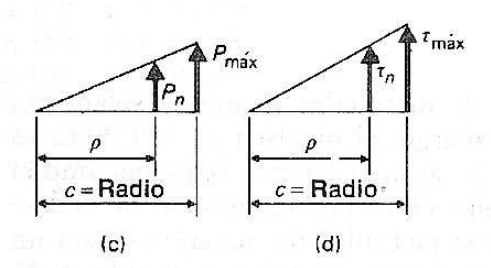
Esta fórmula también puede deducirse sin usar el cálculo. La teoría, suposiciones, y el tratamiento básico son, por supuesto, idénticos. La principal diferencia consiste en que el área infinitamente pequeña de



(a)



(b)



(c) (d)

FIGURA B.1

cualquier anillo interior dA se convierte en una pequeña área finita ΔA. Entonces, la fuerza cortante en el anillo delgado es $P = \tau_n \; \Delta A$.

Considerando los triángulos semejantes de la Fig. B.1 (d), se puede expresar τ_n en términos del máximo esfuerzo cortante:

$$\frac{\tau_n}{\rho} = \frac{\tau}{c}; \qquad \tau_n = \tau \frac{\rho}{c}. \tag{a}$$

Sustituyendo la ec. (a) en la expresión para la fuerza en el anillo n, obtenemos:

$$P_n = \tau_n \Delta A; \qquad P_n = \tau \frac{\rho}{c} \Delta A. \tag{b}$$

Esto representa la fuerza en el anillo n. El par ΔT de esta fuerza con respecto al eje de la flecha o árbol es:

$$\Delta T = P_n \rho = \left(\tau \frac{\rho}{c} \Delta A\right) \rho, \qquad \Delta T = \frac{\tau}{c} \rho^2 \Delta A. \tag{c}$$

El par interno total es la suma de los pares de cada uno de los anillos concéntricos en la flecha. Así:

$$T = \sum \frac{\tau}{c}\rho^2 \Delta A = \frac{\tau}{c}\sum \rho^2 \Delta A. \tag{d}$$

El término $\Sigma\rho^2\ \Delta A$ es, por definición, el momento polar de inercia J. Por consiguiente, la ec. (d) puede expresarse como $T = (\tau/c)J$. Volviendo a escribir la ecuación se tiene:

$$\tau = \frac{Tc}{J}, \tag{3.1}$$

donde:

τ = máximo esfuerzo cortante en la flecha, en lb/plg^2, o en Pa,
T = par interno, en lb-plg, o en N · m,
c = radio de la felcha, en plg, o en m,
J = momento polar de inercia de la sección circular, en plg^4, o en m^4.

Para secciones circulares macizas:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

El esfuerzo sobre cualquier fibra interna situada a una distancia radial ρ medida a partir del eje de la flecha es:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}. \tag{3.1a}$$

B.3 Fórmula de la flexión

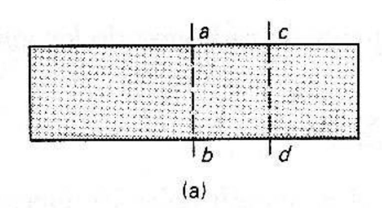
La fórmula de la flexión también puede deducirse sin usar el cálculo.

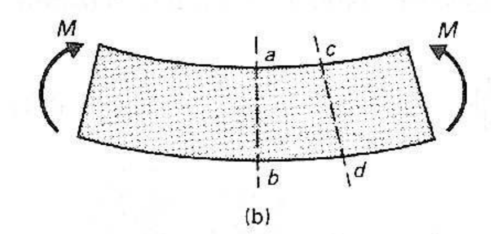
La deducción sigue esencialmente el mismo procedimiento señalado en la sección 5.3. Como se desea encontrar la relación entre los esfuerzos en las fibras y los momentos resistentes internos, se determina (a) la fuerza y el momento de esta fuerza en una fibra, situada a una distancia cualquiera y del eje neutro; y (b) se suman los momentos de todas las fibras de la viga para obtener el momento resistente total.

La nomenclatura usada en la deducción es (véase Fig. B.2):

σ = esfuerzo en las fibras extremas de la viga,
c = distancia desde el eje neutro a las fibras extremas,
y = distancia desde el eje neutro a una fibra cualquiera,
σ' = esfuerzo sobre una fibra cualquiera situada a una distancia y del eje neutro,
ΔA = área de una fibra cualquiera.

La deducción tiene la forma siguiente.





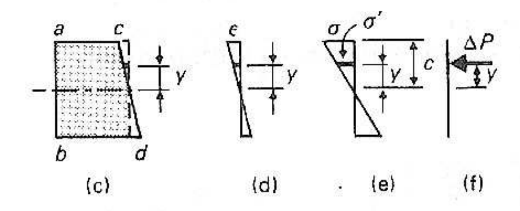


FIGURA B.2

1. Se determina el esfuerzo en una fibra cualquiera en función del esfuerzo máximo en las fibras extremas. A partir de los triángulos semejantes de la Fig. B.2 (e), se tiene:

$$\frac{\sigma'}{y} = \frac{\sigma}{c} \qquad \text{o} \qquad \sigma' = \sigma\frac{y}{c}.$$

2. Se determina la fuerza ejercida por esta fibra cuando soporta un esfuerzo de valor τ'. Se obtiene:

$$\sigma = \frac{P}{A}; \qquad \Delta P = \sigma' \Delta A, \qquad \Delta P = \sigma\frac{y}{c}\Delta A.$$

3. El momento de esta fuerza ΔP con respecto al eje neutro es:

$$\Delta M = \Delta P y = \left(\sigma\frac{y}{c}\Delta A\right)y, \qquad \Delta M = \frac{\sigma}{c}y^2\Delta A.$$

4. Sumando los momentos en cada una de las fibras de la viga se obtiene:

$$M = \sum\frac{\sigma}{c}y^2\Delta A, \qquad M = \frac{\sigma}{c}\sum y^2\Delta A.$$

El término $\Sigma y^2\ \Delta A$ es, por definición, el momento de inercia I de la sección transversal. La fórmula de la flexión entonces se convierte en:

$$M = \frac{\sigma}{c}I$$

o

$$\sigma = \frac{Mc}{I}, \qquad (5.1)$$

donde:

σ = esfuerzo en las fibras extremas de la viga, en lb/plg², o en Pa,
M = momento flexionante interno en la viga, en plg-lb, o en N · m,
I = momento de inercia de la sección transversal de la viga, en plg⁴, o en m⁴,
c = distancia desde el eje neutro de la viga hasta las fibras extremas, en plg, o en m.

Debe notarse que el eje neutro siempre coincide con el centroide de la sección transversal de las vigas cuando la viga está sujeta a esfuerzos menores a los del punto de fluencia, y cuando no se presentan fuerzas axiales.

B.4 Fórmula del esfuerzo cortante

La fórmula del esfuerzo cortante de la sección 5.7 también puede deducirse sin usar el cálculo. La deducción tiene la misma forma general de la descrita en la sección 5.7.

Considere la viga de la Fig. B.3. Si se consideran las secciones *ab* y *cd* de la viga, separadas una distancia Δx, se obtendrán los diagramas de cuerpo libre mostrados en la Fig. B.3 (b). El esfuerzo sobre la cara *ab* es menor que el esfuerzo sobre la cara *cd* B.3 (c).

Si ahora se considera una sección a través de la Fig. B.3 (c) a una cierta distancia y_1 a partir del eje neutro, se obtendrá el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig. B.3 (d). Las fuerzas C_{ab} y C_{cd} pueden determinarse como:

$$C_{ab} = \sum \sigma_{ab}\, \Delta A, \qquad C_{cd} = \sum \sigma'_{cd}\, \Delta A, \qquad (a)$$

donde σ'_{ab} y σ'_{cd} son los esfuerzos sobre cualquier fibra del área A en el diagrama de cuerpo libre. Estos esfuerzos están expresados en términos

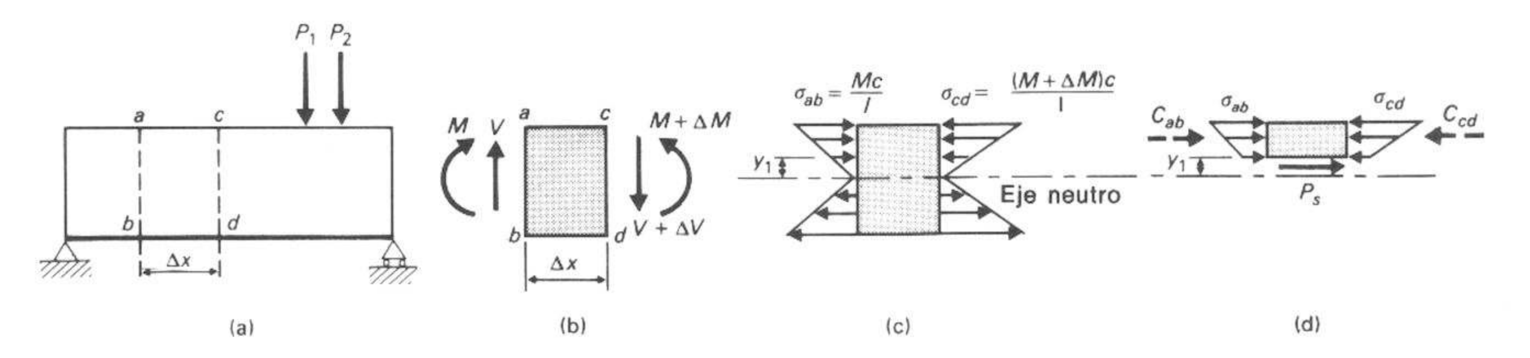


FIGURA B.3

de los esfuerzos máximos σ'_{ab} y σ'_{cd} en forma similar a la discutida en la sección 5.4. Es decir,

$$\sigma'_{ab} = \frac{y}{c}\sigma_{ab} \qquad \text{y} \qquad \sigma'_{cd} = \frac{y}{c}\sigma_{cd}.$$

Las ecs. (a) pueden escribirse como

$$C_{ab} = \sum \frac{y}{c}\sigma_{ab}\,\Delta A, \qquad C_{cd} = \sum \frac{y}{c}\sigma_{cd}\,\Delta A. \tag{b}$$

Refiriéndose otra vez a la Fig. B.3 (d), se suman las fuerzas para obtener:

$$\sum F_H = 0: \qquad C_{ab} + P_s = C_{cd},$$

$$P_s = C_{cd} - C_{ab} = \sum \frac{\sigma_{cd}}{c} y\,\Delta A - \sum \frac{\sigma_{ab}}{c} y\,\Delta A.$$

Haciendo la substitución $\sigma/c = M/I$ se llega a:

$$\begin{aligned} P_s &= \sum \left(\frac{M+\Delta M}{I}\right) y\,\Delta A - \sum \frac{M}{I} y\,\Delta A \\ &= \left(\frac{M+\Delta M}{I}\right)\sum y\,\Delta A - \frac{M}{I}\sum y\,\Delta A \\ &= \frac{\Delta M}{I}\sum y\,\Delta A. \end{aligned} \tag{c}$$

Ya que $P_s = \tau A = \tau b\,\Delta x$, La ecuación (c) puede expresarse como:

$$\tau b\,\Delta x = \frac{\Delta M}{I}\sum y\,\Delta A, \qquad \tau = \frac{\Delta M}{\Delta x}\frac{\Sigma y\,\Delta A}{bI}.$$

Según la sección 4.9, $V = \Delta M/\Delta x$. El término $\Sigma\, y\,\Delta A$ se define como el momento estático del área que queda arriba (o abajo) del corte y se representa por el símbolo Q. La fórmula se convierte entonces en:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}. \tag{5.2}$$

C

Propiedades físicas promedio de materiales comunes

Unidades Inglesas – E. E.U.U.

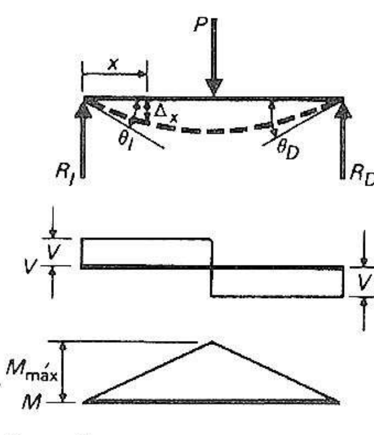
Material	Esfuerzo de fluencia klb/plg^2		Esfuerzo último klb/plg^2		Módulo de elasticidad klb/plg^2		Coeficiente de dilatación lineal por grado F α
	Tensión	Cortante	Tensión	Cortante	Tensión E	Cortante G	
Acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón.	36	21	65	45	30 000	12 000	6.5×10^{-6}
Acero, laminado en caliente, alto contenido de carbón.	65	40	120	105	30 000	12 000	7×10^{-6}
Hierro colado			20 (Tensión) 80 (Comp)		15 000	6 000	6×10^{-6}
Aluminio, aleación 6061	35	26	38	30	10 000	4 000	12.8×10^{-6}
Latón	15		40		15 000	6 000	10.5×10^{-6}
Bronce	20		50		15 000	6 500	10×10^{-6}
Cobre extruido.	35	23	50		17 000	6 000	9.3×10^{-6}
Madera (abeto Douglas), (compresión paralela a la veta)	5.8 (Comp)		7.4 (Comp)		1 760		

En unidades del S.I.

Material	Esfuerzo de fluencia MPa		Esfuerzo último MPa		Módulo de elasticidad GPa		Coeficiente de dilatación lineal por grado C α
	Tensión	Cortante	Tensión	Cortante	Tensión E	Cortante G	
Acero, laminado en caliente, bajo contenido de carbón.	248	145	448	310	200	80	12×10^{-6}
Acero, laminado en caliente, alto contenido de carbón.	448	276	828	724	200	80	13×10^{-6}
Hierro colado			138 (Tensión) 552 (Comp)		100	38	11×10^{-6}
Aluminio, aleación 6061	240	180	262	207	70	26	23×10^{-6}
Latón	103		276		100	38	20×10^{-6}
Bronce	138		345		100	45	20×10^{-6}
Cobre extruido.	240	160	345		120	38	17×10^{-6}
Madera (abeto Douglas) (compresión paralela a la veta)	40		51 (Comp)				5.5×10^{-6}

D

Diagramas de vigas



Caso 1.

Caso 1 *Viga libremente apoyada; carga concentrada al centro.*

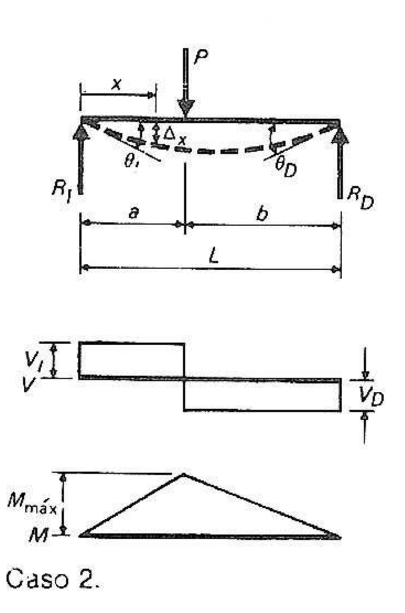
$$R_I = R_D = V = \frac{P}{2},$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{PL}{4} \qquad \textbf{en} \qquad x = \frac{L}{2},$$

$$\theta_I = \theta_D = \frac{PL^2}{16EI},$$

$$\Delta_x = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad 0 < x < \frac{L}{2},$$

$$\Delta_{\text{máx}} \text{ (en la línea central)} = \frac{PL^3}{48EI}.$$



Caso 2.

Caso 2 *Viga libremente apoyada; carga concentrada en cualquier punto.*

$$R_I = V_I = \frac{Pb}{L},$$

$$R_D = V_D = \frac{Pa}{L},$$

$$M_{\text{max}} = \frac{Pab}{L} \text{ (en el punto de aplicación de la carga)}$$

$$\theta_I = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI},$$

$$\theta_D = \frac{Pab(2L - b)}{6LEI},$$

$$\Delta_x = \frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - x^2 - b^2) \qquad 0 < x < a,$$

$$\Delta_x = \frac{Pb}{6LEI}\left[\frac{L}{b}(x - a)^3 + (L^2 - b^2)x - x^3\right] \qquad a < x < L,$$

$$\Delta_{\text{máx}} = \frac{Pab(a + 2b)\sqrt{3a(a + 2b)}}{27LEI}$$

Caso 3 ***Viga libremente apoyada; dos cargas concentradas iguales colocadas simétricamente.***

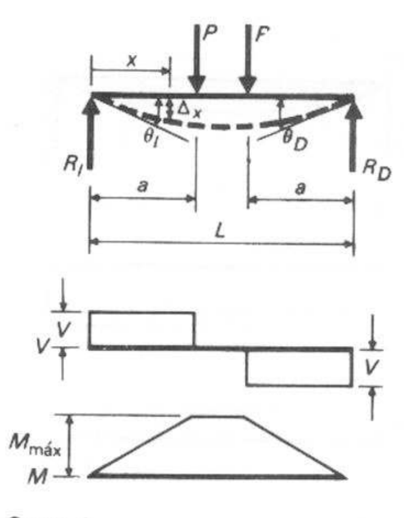
$$R_I = R_D = V = P,$$

$$M_{máx} = Pa,$$

$$\theta_I = \theta_D = \frac{Pa}{2EI}(L - a),$$

$$\Delta_x = \frac{Px}{6EI}(3La - 3a^2 - x^2) \qquad 0 < x < a,$$

$$\Delta_{máx} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) \qquad \text{en la línea central.}$$



Caso 3.

Caso 4 ***Viga libremente apoyada: carga uniformemente distribuida.***

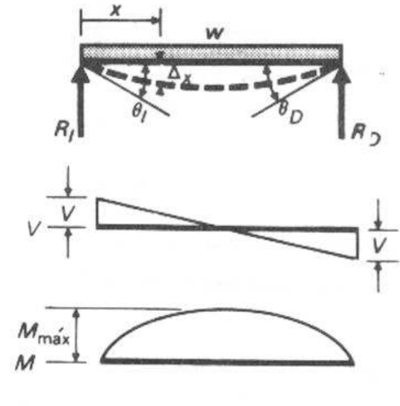
$$R_I = R_D = V = \frac{wL}{2},$$

$$M_{máx} = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \text{en la línea central,}$$

$$\theta_I = \theta_D = \frac{wL^3}{24EI},$$

$$\Delta_x = \frac{wx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3),$$

$$\Delta_{máx} = \frac{5wL^4}{384EI} \qquad \text{en la línea central.}$$



Caso 4.

Caso 5 ***Viga libremente apoyada; carga distribuida con variación lineal.***

$$R_I = V_I = \frac{wL}{6},$$

$$R_D = V_D = \frac{wL}{3},$$

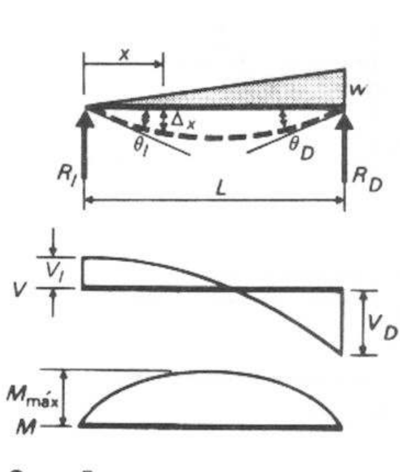
$$M_{máx} = 0.0642wL^2 \quad \textbf{en} \quad x = 0.577L,$$

$$\theta_I = \frac{7wL^3}{360EI},$$

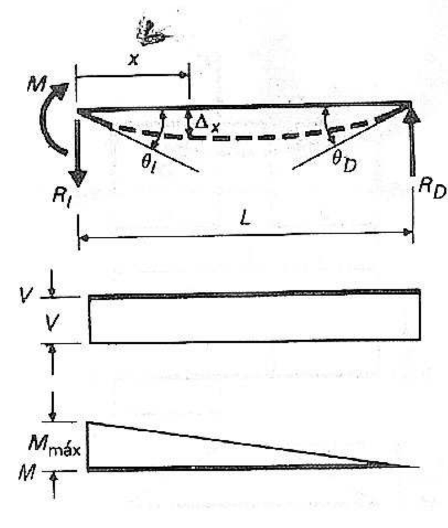
$$\theta_D = \frac{wL^3}{45EI},$$

$$\Delta_x = \frac{wx}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4),$$

$$\Delta_{máx} = 0.00652\frac{wL^4}{EI} \quad \textbf{en} \quad x = 0.519L.$$



Caso 5.



Caso 6.

Caso 6 Viga libremente apoyada; par en un extremo.

$$R_I = R_D = V = \frac{M}{L},$$

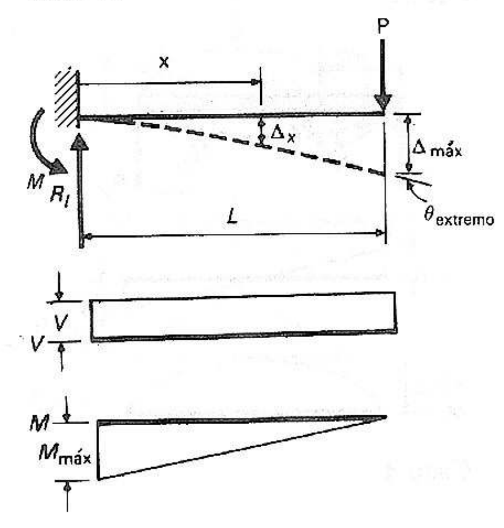
$$M_{máx} = M,$$

$$\theta_I = \frac{ML}{3EI},$$

$$\theta_D = \frac{ML}{6EI},$$

$$\Delta_x = \frac{Mx}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2),$$

$$\Delta_{máx} = \frac{0.064ML^2}{EI} \quad \textbf{en } x = 0.423L.$$



Caso 7.

Caso 7 Viga en voladizo; carga concentrada en el extremo libre.

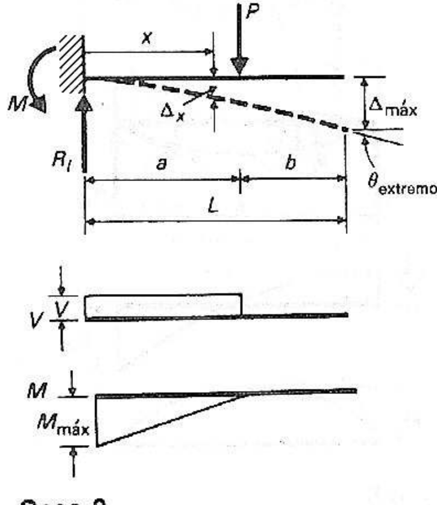
$$R_I = V = P,$$

$$M_{máx} = PL \quad \text{en} \quad x = 0,$$

$$\theta_{extremo} = \frac{PL^2}{2EI},$$

$$\Delta_x = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x),$$

$$\Delta_{máx} = \frac{PL^3}{3EI} \quad \text{en el extremo libre}$$



Caso 8.

Caso 8 Viga en voladizo; carga concentrada en cualquier punto.

$$R_I = V = P,$$

$$M_{máx} = Pa \quad \text{en} \quad x = 0,$$

$$\theta_{extremo} = \frac{Pa^2}{2EI},$$

$$\Delta_x = \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \quad 0 < x < a,$$

$$\Delta_x = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \quad a < x < L,$$

$$\Delta_{máx} = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \quad \text{en el extremo libre}$$

Caso 9 *Viga en voladizo; carga uniformemente distribuida.*

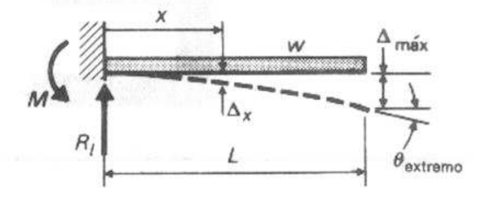
$$R_I = V = wL,$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{wL^2}{2},$$

$$\theta_{\text{extremo}} = \frac{wL^3}{6EI},$$

$$\Delta_x = \frac{wx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2),$$

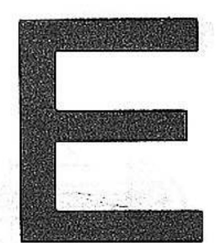
$$\Delta_{\text{máx}} = \frac{wL^4}{8EI}.$$



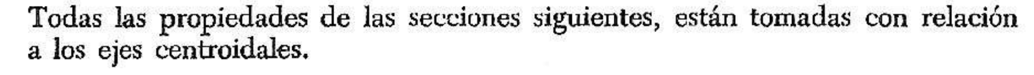




Caso 9.

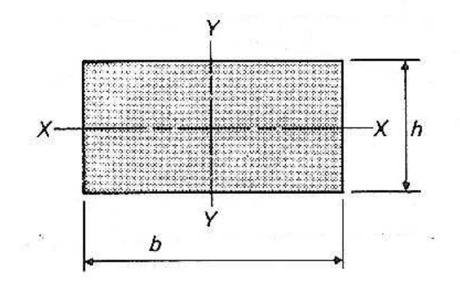


Propiedades de secciones geométricas



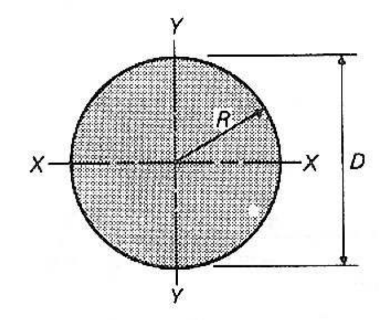
Todas las propiedades de las secciones siguientes, están tomadas con relación a los ejes centroidales.

Rectángulo:



$$A = bh,$$
$$I_x = \tfrac{1}{12}bh^3,$$
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 0.288h.$$

Círculo:



$$A = \tfrac{1}{4}\pi D^2 = \pi R^2,$$
$$I_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4},$$
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2},$$
$$J = I_x + I_y = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Semicírculo:

$$A = \tfrac{1}{8}\pi D^2 = \tfrac{1}{2}\pi R^2,$$
$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi},$$
$$I_x = 0.00682D^4 = 0.11R^4,$$
$$I_y = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8},$$
$$r_x = 0.264R.$$

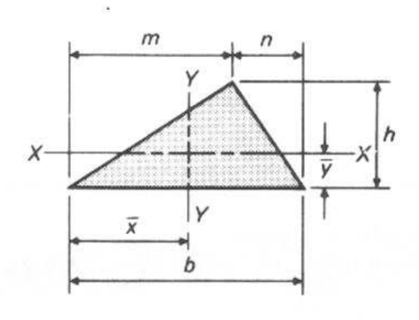
Triángulo:

$$A = \tfrac{1}{2}bh,$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3},$$

$$\bar{x} = \frac{L+m}{3},$$

$$I_x = \tfrac{1}{36}bh^3.$$

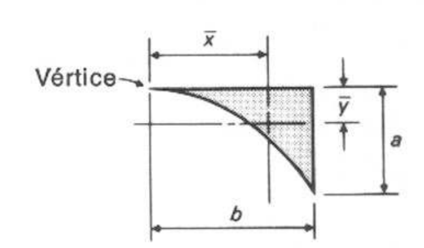


Acartelamiento parabólico:

$$A = \tfrac{1}{3}ab,$$

$$\bar{x} = \tfrac{3}{4}b,$$

$$\bar{y} = \tfrac{3}{10}a.$$

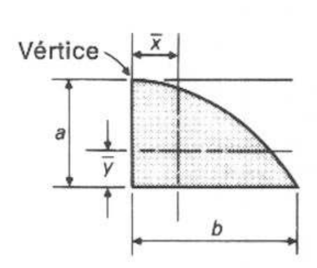


Parábola:

$$A = \tfrac{2}{3}ab,$$

$$\bar{x} = \tfrac{3}{8}b,$$

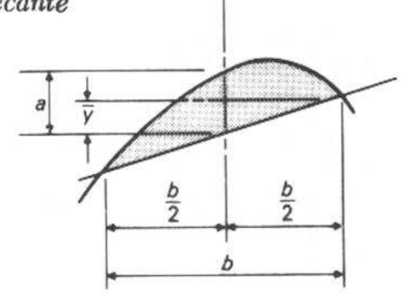
$$\bar{y} = \tfrac{2}{5}a.$$

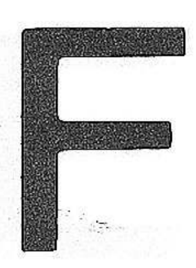


Segmento limitado por una parábola y una secante

$$A = \tfrac{2}{3}ab,$$

$$\bar{y} = \tfrac{2}{5}a.$$





Esfuerzo de compresión admisible para acero de 36 klb/plg[2] *

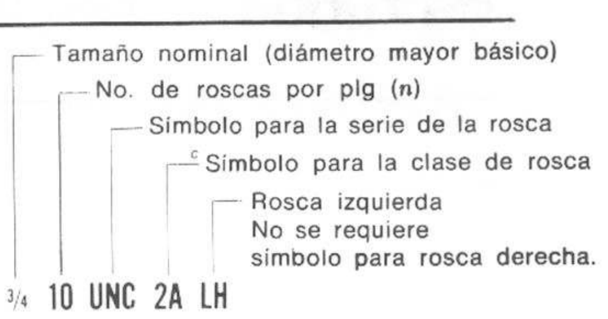
Miembros principales y secundarios Kl/r no mayor de 120						Miembros principales Kl/r entre 121 y 200			
$\frac{Kl}{r}$	F_a (klb/plg^2)	$\frac{Kl}{r}$	F_a (klb/plg^2)	$\frac{Kl}{r}$	F_a (klb/plg^2)	$\frac{Kl}{r}$	F_a (klb/plg^2)	$\frac{Kl}{r}$	F_a (klb/plg^2)
1	21.56	41	19.11	81	15.24	121	10.14	161	5.76
2	21.52	42	19.03	82	15.13	122	9.99	162	5.69
3	21.48	43	18.95	83	15.02	123	9.85	163	5.62
4	21.44	44	18.86	84	14.90	124	9.70	164	5.55
5	21.39	45	18.78	85	14.79	125	9.55	165	5.49
6	21.35	46	18.70	86	14.67	126	9.41	166	5.42
7	21.30	47	18.61	87	14.56	127	9.26	167	5.35
8	21.25	48	18.53	88	14.44	128	9.11	168	5.29
9	21.21	49	18.44	89	14.32	129	8.97	169	5.23
10	21.16	50	18.35	90	14.20	130	8.84	170	5.17
11	21.10	51	18.26	91	14.09	131	8.70	171	5.11
12	21.05	52	18.17	92	13.97	132	8.57	172	5.05
13	21.00	53	18.08	93	13.84	133	8.44	173	4.99
14	20.95	54	17.99	94	13.72	134	8.32	174	4.93
15	20.89	55	17.90	95	13.60	135	8.19	175	4.88
16	20.83	56	17.81	96	13.48	136	8.07	176	4.82
17	20.78	57	17.71	97	13.35	137	7.96	177	4.77
18	20.72	58	17.62	98	13.23	138	7.84	178	4.71
19	20.66	59	17.53	99	13.10	139	7.73	179	4.66
20	20.60	60	17.43	100	12.98	140	7.62	180	4.61
21	20.54	61	17.33	101	12.85	141	7.51	181	4.56
22	20.48	62	17.24	102	12.72	142	7.41	182	4.51
23	20.41	63	17.14	103	12.59	143	7.30	183	4.46
24	20.35	64	17.04	104	12.47	144	7.20	184	4.41
25	20.28	65	16.94	105	12.33	145	7.10	185	4.36
26	20.22	66	16.84	106	12.20	146	7.01	186	4.32
27	20.15	67	16.74	107	12.07	147	6.91	187	4.27
28	20.08	68	16.64	108	11.94	148	6.82	188	4.23
29	20.01	69	16.53	109	11.81	149	6.73	189	4.18
30	19.94	70	16.43	110	11.67	150	6.64	190	4.14
31	19.87	71	16.33	111	11.54	151	6.55	191	4.09
32	19.80	72	16.22	112	11.40	152	6.46	192	4.05
33	19.73	73	16.12	113	11.26	153	6.38	193	4.01
34	19.65	74	16.01	114	11.13	154	6.30	194	3.97
35	19.58	75	15.90	115	10.99	155	6.22	195	3.93
36	19.50	76	15.79	116	10.85	156	6.14	196	3.89
37	19.42	77	15.69	117	10.71	157	6.06	197	3.85
38	19.35	78	15.58	118	10.57	158	5.98	198	3.81
39	19.27	79	15.47	119	10.43	159	5.91	199	3.77
40	19.19	80	15.36	120	10.28	160	5.83	200	3.73

* Tomado del *Manual of Steel Construction*, 8a. Ed., American Institute of Steel Construction, derechos registrados 1980, cortesía del American Institute of Steel Construction.



Roscas estándar para tornillos*

Series estándar unificadas UNC/UNCR y 4UN/4UNR ANSI B1.1-1974



Dimensiones de la Rosca — Designaciones Estándar

Diámetro		Area			
D Principal básico	K a la raíz	A_D Bruta	A_K en la raíz	[a] Esf. de tensión	[b] Roscas por plg n
plg	plg	plg²	plg²	plg²	
1/4	.189	.049	.027	.032	20
3/8	.298	.110	.068	.078	16
1/2	.406	.196	.126	.142	13
5/8	.514	.307	.202	.226	11
3/4	.627	.442	.302	.334	10
7/8	.739	.601	.419	.462	9
1	.847	.785	.551	.606	8
1 1/8	.950	.994	.693	.763	7
1 1/4	1.075	1.227	.890	.969	7
1 3/8	1.171	1.485	1.05	1.16	6
1 1/2	1.296	1.767	1.29	1.41	6
1 3/4	1.505	2.405	1.74	1.90	5
2	1.727	3.142	2.30	2.50	4 1/2
2 1/4	1.977	3.976	3.02	3.25	4 1/2
2 1/2	2.193	4.909	3.72	4.00	4

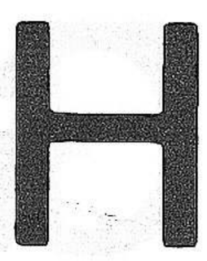
Diámetro		Area			
D Principal básico	K a la raíz	A_D Bruta	A_K en la raíz	[a] Esf. de tensión	[b] Roscas por plg n
plg	plg	plg²	plg²	plg²	
2 3/4	2.443	5.940	4.62	4.93	4
3	2.693	7.069	5.62	5.97	4
3 1/4	2.943	8.296	6.72	7.10	4
3 1/2	3.193	9.621	7.92	8.33	4
3 3/4	3.443	11.045	9.21	9.66	4
4	3.693	12.566	10.6	11.1	4
4 1/4	3.943	14.186	12.1	12.6	4
4 1/2	4.193	15.904	13.7	14.2	4
4 3/4	4.443	17.721	15.4	15.9	4
5	4.693	19.635	17.2	17.8	4
5 1/4	4.943	21.648	19.1	19.7	4
5 1/2	5.193	23.758	21.0	21.7	4
5 3/4	5.443	25.967	23.1	23.8	4
6	5.693	28.274	25.3	26.0	4

[a] Area sometida a esfuerzo de tensión $= 0.7854\left(D - \frac{.9743}{n}\right)^2$.

[b] Para diámetros principales básicos de 1/4 a 4 plg inclusive la serie de la rosca es UNC (burdo); para diámetro de 4¼ o mayor, la serie de la rosca es 4UN.

[c] 2A indica clase de ajuste 2A aplicable a roscas exteriores, 2B indica la correspondiente clase de ajuste 2B para roscas interiores.

* Tomado del *Manual of Steel Construction*, 8a. Ed., American Institute of Steel Construction, derechos registrados, 1980, cortesía del American Institute of Steel Construction.



Dimensiones y propiedades de tubos*

Dimensiones				Peso por pie lbs extremos lisos	Propiedades			
Diámetro nominal plg	Diámetro exterior plg	Diámetro interior plg	Espesor		A plg²	I plg⁴	S plg³	r plg
Peso Estándar								
½	.840	.622	.109	.85	.250	.017	.041	.261
¾	1.050	.824	.113	1.13	.333	.037	.071	.334
1	1.315	1.049	.133	1.68	.494	.087	.133	.421
1¼	1.660	1.380	.140	2.27	.669	.195	.235	.540
1½	1.900	1.610	.145	2.72	.799	.310	.326	.623
2	2.375	2.067	.154	3.65	1.07	.666	.561	.787
2½	2.875	2.469	.203	5.79	1.70	1.53	1.06	.947
3	3.500	3.068	.216	7.58	2.23	3.02	1.72	1.16
3½	4.000	3.548	.226	9.11	2.68	4.79	2.39	1.34
4	4.500	4.026	.237	10.79	3.17	7.23	3.21	1.51
5	5.563	5.047	.258	14.62	4.30	15.2	5.45	1.88
6	6.625	6.065	.280	18.97	5.58	28.1	8.50	2.25
8	8.625	7.981	.322	28.55	8.40	72.5	16.8	2.94
10	10.750	10.020	.365	40.48	11.9	161	29.9	3.67
12	12.750	12.000	.375	49.56	14.6	279	43.8	4.38

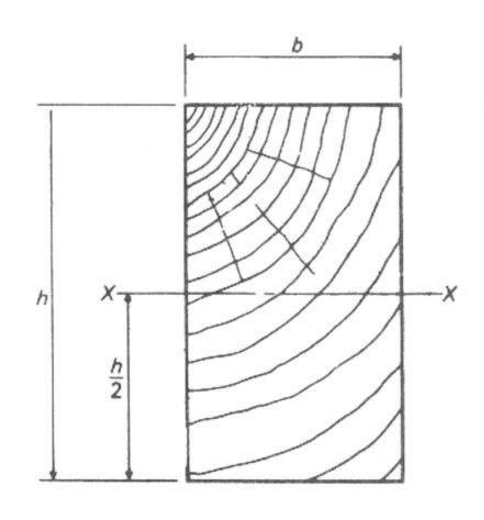
* Tomado del *Manual of Steel Construction*, 8a. Ed., American Institute of Steel Construction, derechos reservados, 1980, cortesía del American Institute of Steel Construction.

Propiedades de dimensiones estándar de piezas de madera*

Tamaños Rectificados (SAS)

El momento de inercia y el módulo de sección se dan con respecto al eje $X-X$, siendo las dimensiones b y h las indicadas en el croquis.

Tamaño nominal	Tamaño labrado estándar	Area de la sección	Momento de inercia	Módulo de la sección	Pies de tablón por pie lineal de la pieza
b h	b h	$A = bh$	$I = \dfrac{bh^3}{12}$	$S = \dfrac{bh^2}{6}$	
2× 2	1.5× 1.5	2.25	0.562	0.422	0.33
2× 3	1.5× 1.5	3.75	1.56	1.95	0.50
2× 4	1.5× 3.5	5.25	3.06	5.36	0.67
2× 6	1.5× 5.5	8.25	7.56	20.80	1.00
2× 8	1.5× 7.25	10.88	13.14	47.63	1.33
2×10	1.5× 9.25	13.88	21.39	98.93	1.67
2×12	1.5×11.25	16.88	31.64	177.98	2.00
2×14	1.5×13.25	19.88	43.89	290.78	2.33
3× 3	2.5× 2.5	6.25	2.60	3.26	0.75
3× 4	2.5× 3.5	8.75	5.10	8.93	1.00
3× 6	2.5× 5.5	13.75	12.60	34.66	1.50
3× 8	2.5× 7.25	18.12	21.90	79.39	2.00
3×10	2.5× 9.25	23.12	35.65	164.89	2.50



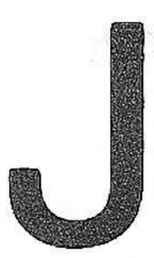
(Continúa en la página siguiente)

* Reimpreso mediante permiso de la Western Wood Products Association.

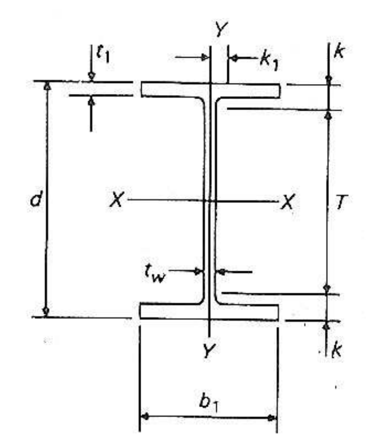
Tamaño nominal	Tamaño labrado estándar	Area de la sección	Momento de inercia	Módulo de la sección	Pies de tablón por pie lineal de la pieza
b h	b h	$A = bh$	$I = \frac{bh^3}{12}$	$S = \frac{bh^2}{6}$	
3 × 12	2.5 × 11.25	28.12	52.73	296.63	3.00
3 × 14	2.5 × 13.25	33.12	73.15	484.63	3.50
3 × 16	2.5 × 15.25	38.12	96.90	738.87	4.00
4 × 4	3.5 × 3.5	12.25	7.15	12.51	1.33
4 × 6	3.5 × 5.5	19.25	17.65	48.53	2.00
4 × 8	3.5 × 7.25	25.38	30.66	111.15	2.67
4 × 10	3.5 × 9.25	32.38	49.91	230.84	3.33
4 × 12	3.5 × 11.25	39.38	73.83	415.28	4.00
4 × 14	3.5 × 13.25	46.38	102.41	678.48	4.67
4 × 16	3.5 × 15.25	53.38	135.66	1 034.42	5.33
6 × 6	5.5 × 5.5	30.25	27.73	76.26	3.00
6 × 8	5.5 × 7.5	41.25	51.56	193.36	4.00
6 × 10	5.5 × 9.5	52.25	82.73	392.96	5.00
6 × 12	5.5 × 11.5	63.25	121.23	697.07	6.00
6 × 14	5.5 × 13.5	74.25	167.06	1 127.67	7.00
6 × 16	5.5 × 15.5	85.25	220.23	1 706.78	8.00
6 × 18	5.5 × 17.5	96.25	280.73	2 456.38	9.00
6 × 20	5.5 × 19.5	107.25	348.56	3 398.48	10.00
8 × 8	7.5 × 7.5	56.25	70.31	263.67	5.33
8 × 10	7.5 × 9.5	71.25	112.81	535.86	6.67
8 × 12	7.5 × 11.5	86.25	165.31	950.55	8.00
8 × 14	7.5 × 13.5	101.25	227.81	1 537.73	9.33
8 × 16	7.5 × 15.5	116.25	300.31	2 327.42	10.67
8 × 18	7.5 × 17.5	131.25	382.81	3 349.61	12.00
8 × 20	7.5 × 19.5	146.25	475.31	4 634.30	13.33
8 × 22	7.5 × 21.5	161.25	577.81	6 211.48	14.67
8 × 24	7.5 × 23.5	176.25	690.31	8 111.17	16.00
10 × 10	9.5 × 9.5	90.25	142.90	678.76	8.33
10 × 12	9.5 × 11.5	109.25	209.40	1 204.03	10.00
10 × 14	9.5 × 13.5	128.25	288.56	1 947.80	11.67
10 × 16	9.5 × 15.5	147.25	380.40	2 948.07	13.33
10 × 18	9.5 × 17.5	166.25	484.90	4 242.84	15.00
10 × 20	9.5 × 19.5	185.25	602.06	5 870.11	16.67
10 × 22	9.5 × 21.5	204.25	731.90	7 867.88	18.33

(Continúa en la página siguiente)

Tamaño nominal	Tamaño labrado estándar	Area de la sección	Momento de inercia	Módulo de la sección	Pies de tablón por pie lineal de la pieza
$b \quad h$	$b \quad h$	$A = bh$	$I = \frac{bh^3}{12}$	$S = \frac{bh^2}{6}$	
12 × 12	11.5 × 11.5	132.25	253.48	1 457.51	12.00
12 × 14	11.5 × 13.5	155.25	349.31	2 357.86	14.00
12 × 16	11.5 × 15.5	178.25	460.48	3 568.71	16.00
12 × 18	11.5 × 17.5	201.25	586.98	5 136.07	18.00
12 × 20	11.5 × 19.5	224.25	728.81	7 105.92	20.00
12 × 22	11.5 × 21.5	247.25	885.98	9 524.28	22.00
12 × 24	11.5 × 23.5	270.25	1 058.48	12 437.13	24.00



Perfiles laminados de acero estructural*



Perfiles W

Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín: Ancho b_f	Patín: Espesor t_f	Propiedades elásticas, Eje X–X: I	Eje X–X: S	Eje X–X: r	Eje Y–Y: I	Eje Y–Y: S	Eje Y–Y: r
	plg²	lb	plg	plg	plg	plg	plg⁴	plg³	plg	plg⁴	plg³	plg
W 27 × 178	52.3	178	27.81	0.725	14.085	1.190	6 990	502	11.6	555	78.8	3.26
× 161	47.4	161	27.59	0.660	14.020	1.080	6 280	455	11.5	497	70.9	3.24
× 146	42.9	146	27.38	0.605	13.965	0.975	5 630	411	11.4	443	63.5	3.21
W 27 × 114	33.5	114	27.29	0.570	10.070	0.930	4 090	299	11.0	159	31.5	2.18
× 102	30.0	102	27.09	0.515	10.015	0.830	3 620	267	11.0	139	27.8	2.15
× 94	27.7	94	26.92	0.490	9.990	0.745	3 270	243	10.9	124	24.8	2.12
× 84	24.8	84	26.71	0.460	9.960	0.640	2 850	213	10.7	106	21.2	2.07

(Continúa en la página siguiente)

* Adaptado del *Manual of Steel Construction*, 8a. Ed., American Institute of Steel Construction, derechos reservados, 1980, cortesía del American Institute of Steel Construction.

Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín		Propiedades elásticas					
					Ancho b_f	Espesor t_f	Eje $X-X$			Eje $Y-Y$		
							I	S	r	I	S	r
	plg^2	lb	plg	plg	plg	plg	plg^4	plg^3	plg	plg^4	plg^3	plg
W 24 × 162	47.7	162	25.00	0.705	12.955	1.220	5 170	414	10.4	443	68.4	3.05
× 146	43.0	146	24.74	0.650	12.900	1.090	4 580	371	10.3	391	60.5	3.01
× 131	38.5	131	24.48	0.605	12.855	0.960	4 020	329	10.2	340	53.0	2.97
× 117	34.4	117	24.26	0.550	12.800	0.850	3 540	291	10.1	297	46.5	2.94
× 104	30.6	104	24.06	0.500	12.750	0.750	3 100	258	10.1	259	40.7	2.91
W 24 × 94	27.7	94	24.31	0.515	9.065	0.875	2 700	222	9.87	109	24.0	1.98
× 84	24.7	84	24.10	0.470	9.020	0.770	2 370	196	9.79	94.4	20.9	1.95
× 76	22.4	76	23.92	0.440	8.990	0.680	2 100	176	9.69	82.5	18.4	1.92
× 68	20.1	68	23.73	0.415	8.965	0.585	1 830	154	9.55	70.4	15.7	1.87
W 24 × 62	18.2	62	23.74	0.430	7.040	0.590	1 550	131	9.23	34.5	9.80	1.38
× 55	16.2	55	23.57	0.395	7.005	0.505	1 350	114	9.11	29.1	8.30	1.34
W 21 × 147	43.2	147	22.06	0.720	12.510	1.150	3 630	329	9.17	376	60.1	2.95
× 132	38.8	132	21.83	0.650	12.440	1.035	3 220	295	9.12	333	53.5	2.93
× 122	35.9	122	21.68	0.600	12.390	0.960	2 960	273	9.09	305	49.2	2.92
× 111	32.7	111	21.51	0.550	12.340	0.875	2 670	249	9.05	274	44.5	2.90
× 101	29.8	101	21.36	0.500	12.290	0.800	2 420	227	9.02	248	40.3	2.89
W 21 × 93	27.3	93	21.62	0.580	8.420	0.930	2 070	192	8.70	92.9	22.1	1.81
× 83	24.3	83	21.43	0.515	8.355	0.835	1 830	171	8.67	81.4	19.5	1.83
× 73	21.5	73	21.24	0.455	8.295	0.740	1 600	151	8.64	70.6	17.0	1.81
× 68	20.0	68	21.13	0.430	8.270	0.685	1 480	140	8.60	64.7	15.7	1.80
× 62	18.3	62	20.99	0.400	8.240	0.615	1 330	127	8.54	57.5	13.9	1.77
W 21 × 57	16.7	57	21.06	0.405	6.555	0.650	1 170	111	8.36	30.6	9.35	1.35
× 50	14.7	50	20.83	0.380	6.530	0.535	984	94.5	8.18	24.9	7.64	1.30
× 44	13.0	44	20.66	0.350	6.500	0.450	843	81.6	8.06	20.7	6.36	1.26
W 18 × 119	35.1	119	18.97	0.655	11.265	1.060	2 190	231	7.90	253	44.9	2.69
× 106	31.1	106	18.73	0.590	11.200	0.940	1 910	204	7.84	220	39.4	2.66
× 97	28.5	97	18.59	0.535	11.145	0.870	1 750	188	7.82	201	36.1	2.65
× 86	25.3	86	18.39	0.480	11.090	0.770	1 530	166	7.77	175	31.6	2.63
× 76	22.3	76	18.21	0.425	11.035	0.680	1 330	146	7.73	152	27.6	2.61

(Continúa en la página siguiente)

Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín Ancho b_f	Patín Espesor t_f	Propiedades elásticas Eje $X-X$ I	Eje $X-X$ S	Eje $X-X$ r	Eje $Y-Y$ I	Eje $Y-Y$ S	Eje $Y-Y$ r
	plg^2	lb	plg	plg	plg	plg	plg^4	plg^3	plg	plg^4	plg^3	plg
W 18 × 71	20.8	71	18.47	0.495	7.635	0.810	1 170	127	7.50	60.3	15.8	1.70
× 65	19.1	65	18.35	0.450	7.590	0.750	1 070	117	7.49	54.8	14.4	1.69
× 60	17.6	60	18.24	0.415	7.555	0.695	984	108	7.47	50.1	13.3	1.69
× 55	16.2	55	18.11	0.390	7.530	0.630	890	98.3	7.41	44.9	11.9	1.67
× 50	14.7	50	17.99	0.355	7.495	0.570	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65
W 18 × 46	13.5	46	18.06	0.360	6.060	0.605	712	78.8	7.25	22.5	7.43	1.29
× 40	11.8	40	17.90	0.315	6.015	0.525	612	68.4	7.21	19.1	6.35	1.27
× 35	10.3	35	17.70	0.300	6.000	0.425	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W 16 × 100	29.4	100	16.97	0.585	10.425	0.985	1 490	175	7.10	186	35.7	2.51
× 89	26.2	89	16.75	0.525	10.365	0.875	1 300	155	7.05	163	31.4	2.49
× 77	22.6	77	16.52	0.455	10.295	0.760	1 110	134	7.00	138	26.9	2.47
× 67	19.7	67	16.33	0.395	10.235	0.665	954	117	6.96	119	23.2	2.46
W 16 × 57	16.8	57	16.43	0.430	7.120	0.715	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
× 50	14.7	50	16.26	0.380	7.070	0.630	659	81.0	6.68	37.2	10.5	1.59
× 45	13.3	45	16.13	0.345	7.035	0.565	586	72.7	6.65	32.8	9.34	1.57
× 40	11.8	40	16.01	0.305	6.995	0.505	518	64.7	6.63	28.9	8.25	1.57
× 36	10.6	36	15.86	0.295	6.985	0.430	448	56.5	6.51	24.5	7.00	1.52
W 16 × 31	9.12	31	15.88	0.275	5.525	0.440	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
× 26	7.68	26	15.69	0.250	5.500	0.345	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W 14 × 132	38.8	132	14.66	0.645	14.725	1.030	1 530	209	6.28	548	74.5	3.76
× 120	35.3	120	14.48	0.590	14.670	0.940	1 380	190	6.24	495	67.5	3.74
× 109	32.0	109	14.32	0.525	14.605	0.860	1 240	173	6.22	447	61.2	3.73
× 99	29.1	99	14.16	0.485	14.565	0.780	1 110	157	6.17	402	55.2	3.71
× 90	26.5	90	14.02	0.440	14.520	0.710	999	143	6.14	362	49.9	3.70
W 14 × 82	24.1	82	14.31	0.510	10.130	0.855	882	123	6.05	148	29.3	2.48
× 74	21.8	74	14.17	0.450	10.070	0.785	796	112	6.04	134	26.6	2.48
× 68	20.0	68	14.04	0.415	10.035	0.720	723	103	6.01	121	24.2	2.46
× 61	17.9	61	13.89	0.375	9.995	0.645	640	92.2	5.98	107	21.5	2.45

(Continúa en la página siguiente)

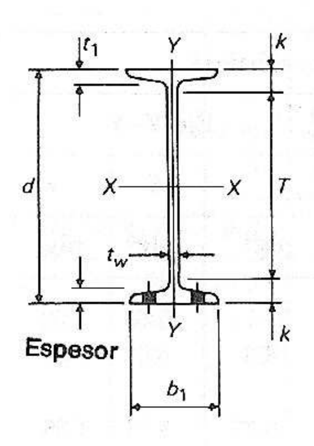
Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín: Ancho b_f	Patín: Espesor t_f	Propiedades elásticas: Eje X–X: I	Eje X–X: S	Eje X–X: r	Eje Y–Y: I	Eje Y–Y: S	Eje Y–Y: r
	plg²	lb	plg	plg	plg	plg	plg⁴	plg³	plg	plg⁴	plg³	plg
W 14 × 53	15.6	53	13.92	0.370	8.060	0.660	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
× 48	14.1	48	13.79	0.340	8.030	0.595	485	70.3	5.85	51.4	12.8	1.91
× 43	12.6	43	13.66	0.305	7.995	0.530	428	62.7	5.82	45.2	11.3	1.89
W 14 × 38	11.2	38	14.10	0.310	6.770	0.515	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
× 34	10.0	34	13.98	0.285	6.745	0.455	340	48.6	5.83	23.3	6.91	1.53
× 30	8.85	30	13.84	0.270	6.730	0.385	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
W 14 × 26	7.69	26	13.91	0.255	5.025	0.420	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08
× 22	6.49	22	13.74	0.230	5.000	0.335	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04
W 12 × 336	98.8	336	16.82	1.775	13.385	2.955	4 060	483	6.41	1 190	177	3.47
× 305	89.6	305	16.32	1.625	13.235	2.705	3 550	435	6.29	1 050	159	3.42
× 279	81.9	279	15.85	1.530	13.140	2.470	3 110	393	6.16	937	143	3.38
× 252	74.1	252	15.41	1.395	13.005	2.250	2 720	353	6.06	828	127	3.34
× 230	67.7	230	15.05	1.285	12.895	2.070	2 420	321	5.97	742	115	3.31
× 210	61.8	210	14.71	1.180	12.790	1.900	2 140	292	5.89	664	104	3.28
× 190	55.8	190	14.38	1.060	12.670	1.735	1 890	263	5.82	589	93.0	3.25
× 170	50.0	170	14.03	0.960	12.570	1.560	1 650	235	5.74	517	82.3	3.22
× 152	44.7	152	13.71	0.870	12.480	1.400	1 430	209	5.66	454	72.8	3.19
× 136	39.9	136	13.41	0.790	12.400	1.250	1 240	186	5.58	398	64.2	3.16
× 120	35.3	120	13.12	0.710	12.320	1.105	1 070	163	5.51	345	56.0	3.13
× 106	31.2	106	12.89	0.610	12.220	0.990	933	145	5.47	301	49.3	3.11
× 96	28.2	96	12.71	0.550	12.160	0.900	833	131	5.44	270	44.4	3.09
× 87	25.6	87	12.53	0.515	12.125	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
× 79	23.2	79	12.38	0.470	12.080	0.735	662	107	5.34	216	35.8	3.05
× 72	21.1	72	12.25	0.430	12.040	0.670	597	97.4	5.31	195	32.4	3.04
× 65	19.1	65	12.12	0.390	12.000	0.605	533	87.9	5.28	174	29.1	3.02
W 12 × 58	17.0	58	12.19	0.360	10.010	0.640	475	78.0	5.28	107	21.4	2.51
× 53	15.6	53	12.06	0.345	9.995	0.575	425	70.6	5.23	95.8	19.2	2.48
W 12 × 50	14.7	50	12.19	0.370	8.080	0.640	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
× 45	13.2	45	12.06	0.335	8.045	0.575	350	58.1	5.15	50.0	12.4	1.94
× 40	11.8	40	11.94	0.295	8.005	0.515	310	51.9	5.13	44.1	11.0	1.93

(Continúa en la página siguiente)

					Patín		Propiedades elásticas					
							Eje $X-X$			Eje $Y-Y$		
	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Ancho b_f	Espesor t_f	I	S	r	I	S	r
Designación	plg²	lb	plg	plg	plg	plg	plg⁴	plg³	plg	plg⁴	plg³	plg
W 12 × 35	10.3	35	12.50	0.300	6.560	0.520	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
× 30	8.79	30	12.34	0.260	6.520	0.440	238	38.6	5.21	20.3	6.24	1.52
× 26	7.65	26	12.22	0.230	6.490	0.380	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
W 12 × 22	6.48	22	12.31	0.260	4.030	0.425	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.847
× 19	5.57	19	12.16	0.235	4.005	0.350	130	21.3	4.82	3.76	1.88	0.822
× 16	4.71	16	11.99	0.220	3.990	0.265	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
× 14	4.16	14	11.91	0.200	3.970	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753
W 10 × 112	32.9	112	11.36	0.755	10.415	1.250	716	126	4.66	236	45.3	2.68
× 100	29.4	100	11.10	0.680	10.340	1.120	623	112	4.60	207	40.0	2.65
× 88	25.9	88	10.84	0.605	10.265	0.990	534	98.5	4.54	179	34.8	2.63
× 77	22.6	77	10.60	0.530	10.190	0.870	455	85.9	4.49	154	30.1	2.60
× 68	20.0	68	10.40	0.470	10.130	0.770	394	75.7	4.44	134	26.4	2.59
× 60	17.6	60	10.22	0.420	10.080	0.680	341	66.7	4.39	116	23.0	2.57
× 54	15.8	54	10.09	0.370	10.030	0.615	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
× 49	14.4	49	9.98	0.340	10.000	0.560	272	54.6	4.35	93.4	18.7	2.54
W 10 × 45	13.3	45	10.10	0.350	8.020	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
× 39	11.5	39	9.92	0.315	7.985	0.530	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
× 33	9.71	33	9.73	0.290	7.960	0.435	170	35.0	4.19	36.6	9.20	1.94
W 10 × 30	8.84	30	10.47	0.300	5.810	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
× 26	7.61	26	10.33	0.260	5.770	0.440	144	27.9	4.35	14.1	4.89	1.36
× 22	6.49	22	10.17	0.240	5.750	0.360	118	23.2	4.27	11.4	3.97	1.33
W 10 × 19	5.62	19	10.24	0.250	4.020	0.395	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
× 17	4.99	17	10.11	0.240	4.010	0.330	81.9	16.2	4.05	3.56	1.78	0.844
× 15	4.41	15	9.99	0.230	4.000	0.270	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
× 12	3.54	12	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785
W 8 × 67	19.7	67	9.00	0.570	8.280	0.935	272	60.4	3.72	88.6	21.4	2.12
× 58	17.1	58	8.75	0.510	8.220	0.810	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
× 48	14.1	48	8.50	0.400	8.110	0.685	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08
× 40	11.7	40	8.25	0.360	8.070	0.560	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
× 35	10.3	35	8.12	0.310	8.020	0.495	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
× 31	9.13	31	8.00	0.285	7.995	0.435	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02

(Continúa en la página siguiente)

	Area	Peso nominal por pie	Peralte o altura	Espesor del alma	Patín		Propiedades elásticas					
					Ancho	Espesor	Eje $X-X$			Eje $Y-Y$		
	A		d	t_w	b_f	t_f	I	S	r	I	S	r
Designación	**plg²**	**lb**	**plg**	**plg**	**plg**	**plg**	**plg⁴**	**plg³**	**plg**	**plg⁴**	**plg³**	**plg**
W 8 × 28	8.25	28	8.06	0.285	6.535	0.465	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
× 24	7.08	24	7.93	0.245	6.495	0.400	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
W 8 × 21	6.16	21	8.28	0.250	5.270	0.400	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
× 18	5.26	18	8.14	0.230	5.250	0.330	61.9	15.2	3.43	7.97	3.04	1.23
W 8 × 15	4.44	15	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
× 13	3.84	13	7.99	0.230	4.000	0.255	39.6	9.91	3.21	2.73	1.37	0.843
× 10	2.96	10	7.89	0.170	3.940	0.205	30.8	7.81	3.22	2.09	1.06	0.841
W 6 × 25	7.34	25	6.38	0.320	6.080	0.455	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
× 20	5.87	20	6.20	0.260	6.020	0.365	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
× 15	4.43	15	5.99	0.230	5.990	0.260	29.1	9.72	2.56	9.32	3.11	1.46
W 6 × 16	4.74	16	6.28	0.260	4.030	0.405	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.966
× 12	3.55	12	6.03	0.230	4.000	0.280	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
× 9	2.68	9	5.90	0.170	3.940	0.215	16.4	5.56	2.47	2.19	1.11	0.905
W 5 × 19	5.54	19	5.15	0.270	5.030	0.430	26.2	10.2	2.17	9.13	3.63	1.28
× 16	4.68	16	5.01	0.240	5.000	0.360	21.3	8.51	2.13	7.51	3.00	1.27
W 4 × 13	3.38	13	4.16	0.280	4.060	0.345	11.3	5.46	1.72	3.86	1.90	1.00

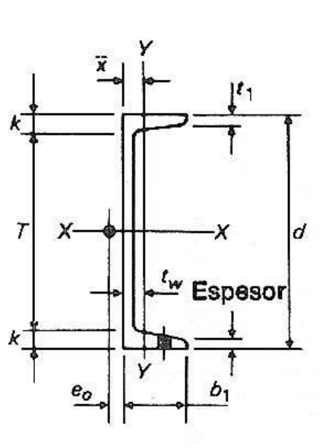


Perfiles I

Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín: Ancho b_f	Patín: Espesor t_f	Eje X–X: I	Eje X–X: S	Eje X–X: r	Eje Y–Y: I	Eje Y–Y: S	Eje Y–Y: r
	plg²	lb	plg	plg	plg	plg	plg⁴	plg³	p	plg⁴	plg³	plg
I 24 × 121	35.6	121	24.50	0.800	8.050	1.090	3,160	258	9.43	83.3	20.7	1.53
× 106	31.2	106	24.50	0.620	7.870	1.090	2 940	240	9.71	77.1	19.6	1.57
I 24 × 100	29.3	100	24.00	0.745	7.245	0.870	2 390	199	9.02	47.7	13.2	1.27
× 90	26.5	90	24.00	0.625	7.125	0.870	2,250	187	9.21	44.9	12.6	1.30
× 80	23.5	80	24.00	0.500	7.000	0.870	2.100	175	9.47	42.2	12.1	1.34
I 20 × 96	28.2	96	20.30	0.800	7.200	0.920	1 670	165	7.71	50.2	13.9	1.33
× 86	25.3	86	20.30	0.660	7.060	0.920	1,580	155	7.89	46.8	13.3	1.36
I 20 × 75	22.0	75	20.00	0.635	6.385	0.795	1,280	128	7.62	29.8	9.32	1.16
× 66	19.4	66	20.00	0.505	6.255	0.795	1.190	119	7.83	27.7	8.85	1.19
I 18 × 70	20.6	70	18.00	0.711	6.251	0.691	926	103	6.71	24.1	7.72	1.08
× 54.7	16.1	54.7	18.00	0.461	6.001	0.691	804	89.4	7.07	20.8	6.94	1.14
I 15 × 50	14.7	50	15.00	0.550	5.640	0.622	486	64.8	5.75	15.7	5.57	1.03
× 42.9	12.6	42.9	15.00	0.411	5.501	0.622	447	59.6	5.95	14.4	5.23	1.07
I 12 × 50	14.7	50	12.00	0.687	5.477	0.659	305	50.8	4.55	15.7	5.74	1.03
× 40.8	12.0	40.8	12.00	0.462	5.252	0.659	272	45.4	4.77	13.6	5.16	1.06

(Continúa en la página siguiente)

Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín: Ancho b_f	Patín: Espesor t_f	Propiedades elásticas, Eje X–X: I	Eje X–X: S	Eje X–X: r	Eje Y–Y: I	Eje Y–Y: S	Eje Y–Y: r
	plg²	lb	plg	plg	plg	plg	plg⁴	plg³	plg	plg⁴	plg³	plg
I 12 × 35	10.3	35	12.00	0.428	5.078	0.544	229	38.2	4.72	9.87	3.89	0.980
× 31.8	9.35	31.8	12.00	0.350	5.000	0.544	218	36.4	4.83	9.36	3.74	1.00
I 10 × 35	10.3	35	10.00	0.594	4.944	0.491	147	29.4	3.78	8.36	3.38	0.90
× 25.4	7.46	25.4	10.00	0.311	4.661	0.491	124	24.7	4.07	6.79	2.91	0.954
I 8 × 23	6.77	23	8.00	0.441	4.171	0.426	64.9	16.2	3.10	4.31	2.07	0.798
× 18.4	5.41	18.4	8.00	0.271	4.001	0.426	57.6	14.4	3.26	3.73	1.86	0.831
I 7 × 20	5.88	20	7.00	0.450	3.860	0.392	42.4	12.1	2.69	3.17	1.64	0.734
× 15.3	4.50	15.3	7.00	0.252	3.662	0.392	36.7	10.5	2.86	2.64	1.44	0.766
I 6 × 17.25	5.07	17.25	6.00	0.465	3.565	0.359	26.3	8.77	2.28	2.31	1.30	0.675
× 12.5	3.67	12.5	6.00	0.232	3.332	0.359	22.1	7.37	2.45	1.82	1.09	0.705
I 5 × 14.75	4.34	14.75	5.00	0.494	3.284	0.326	15.2	6.09	1.87	1.67	1.01	0.620
× 10	2.94	10	5.00	0.214	3.004	0.326	12.3	4.92	2.05	1.22	0.809	0.645
I 4 × 9.5	2.79	9.5	4.00	0.326	2.796	0.293	6.79	3.39	1.56	0.903	0.646	0.569
× 7.7	2.26	7.7	4.00	0.193	2.663	0.293	6.08	3.04	1.64	0.764	0.574	0.581
I 3 × 7.5	2.21	7.5	3.00	0.349	2.509	0.260	2.93	1.95	1.15	0.586	0.468	0.516
× 5.7	1.67	5.7	3.00	0.170	2.330	0.260	2.52	1.68	1.23	0.455	0.390	0.522





Canales americanos estándar

Designación	Area A	Peso nominal por pie	Peralte o altura d	Espesor del alma t_w	Patín: Ancho b_f	Patín: Espesor medio t_f	$\bar{x}$	Localización del centro de cortante C_O	Propiedades elásticas, Eje X–X: I	Eje X–X: S	Eje X–X: r	Eje Y–Y: I	Eje Y–Y: S	Eje Y–Y: r
	plg	lb	plg	plg	plg	plg	plg	plg	plg^4	plg^3	plg	plg^4	plg^3	plg
C 15 × 50	14.7	50	15.00	0.716	3.716	0.650	0.798	0.583	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867
× 40	11.8	40	15.00	0.520	3.520	0.650	0.777	0.767	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886
× 33.9	9.96	33.9	15.00	0.400	3.400	0.650	0.787	0.896	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904
C 12 × 30	8.82	30	12.00	0.510	3.170	0.501	0.674	0.618	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763
× 25	7.35	25	12.00	0.387	3.047	0.501	0.674	0.746	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780
× 20.7	6.09	20.7	12.00	0.282	2.942	0.501	0.698	0.870	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799
C 10 × 30	8.82	30	10.00	0.673	3.033	0.436	0.649	0.369	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669
× 25	7.35	25	10.00	0.526	2.886	0.436	0.617	0.494	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676
× 20	5.88	20	10.00	0.379	2.739	0.436	0.606	0.637	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692
× 15.3	4.49	15.3	10.00	0.240	2.600	0.436	0.634	0.796	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713
C 9 × 20	5.88	20	9.00	0.448	2.648	0.413	0.583	0.515	60.9	13.5	3.22	2.42	1.17	0.642
× 15	4.41	15	9.00	0.285	2.485	0.413	0.586	0.682	51.0	11.3	3.40	1.93	1.01	0.661
× 13.4	3.94	13.4	9.00	0.233	2.433	0.413	0.601	0.743	47.9	10.6	3.48	1.76	0.962	0.669

C 8×18.75	5.51	18.75	8.00	0.487	2.527	0.390	0.565	0.431	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599
×13.75	4.04	13.75	8.00	0.303	2.343	0.390	0.553	0.604	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615
×11.5	3.38	11.5	8.00	0.220	2.260	0.390	0.571	0.697	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625
C 7×14.75	4.33	14.75	7.00	0.419	2.299	0.366	0.532	0.441	27.2	7.78	2.51	1.38	0.779	0.564
×12.25	3.60	12.25	7.00	0.314	2.194	0.366	0.525	0.538	24.2	6.93	2.60	1.17	0.703	0.571
× 9.8	2.87	9.8	7.00	0.210	2.090	0.366	0.540	0.647	21.3	6.08	2.72	0.968	0.625	0.581
C 6×13	3.83	13	6.00	0.437	2.157	0.343	0.514	0.380	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525
×10.5	3.09	10.5	6.00	0.314	2.034	0.343	0.499	0.486	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529
× 8.2	2.40	8.2	6.00	0.200	1.920	0.343	0.511	0.599	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537
C 5× 9	2.64	9	5.00	0.325	1.885	0.320	0.478	0.427	8.90	3.56	1.83	0.632	0.450	0.489
× 6.7	1.97	6.7	5.00	0.190	1.750	0.320	0.484	0.552	7.49	3.00	1.95	0.479	0.378	0.493
C 4× 7.25	2.13	7.25	4.00	0.321	1.721	0.296	0.459	0.386	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450
× 5.4	1.59	5.4	4.00	0.184	1.584	0.296	0.457	0.502	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449
C 3× 6	1.76	6	3.00	0.356	1.596	0.273	0.455	0.322	2.07	1.38	1.08	0.305	0.268	0.416
× 5	1.47	5	3.00	0.258	1.498	0.273	0.438	0.392	1.85	1.24	1.12	0.247	0.233	0.410
× 4.1	1.21	4.1	3.00	0.170	1.410	0.273	0.436	0.461	1.66	1.10	1.17	0.197	0.202	0.404

Angulos
de lados iguales y de lados desiguales propiedades para diseño (lista selecta)

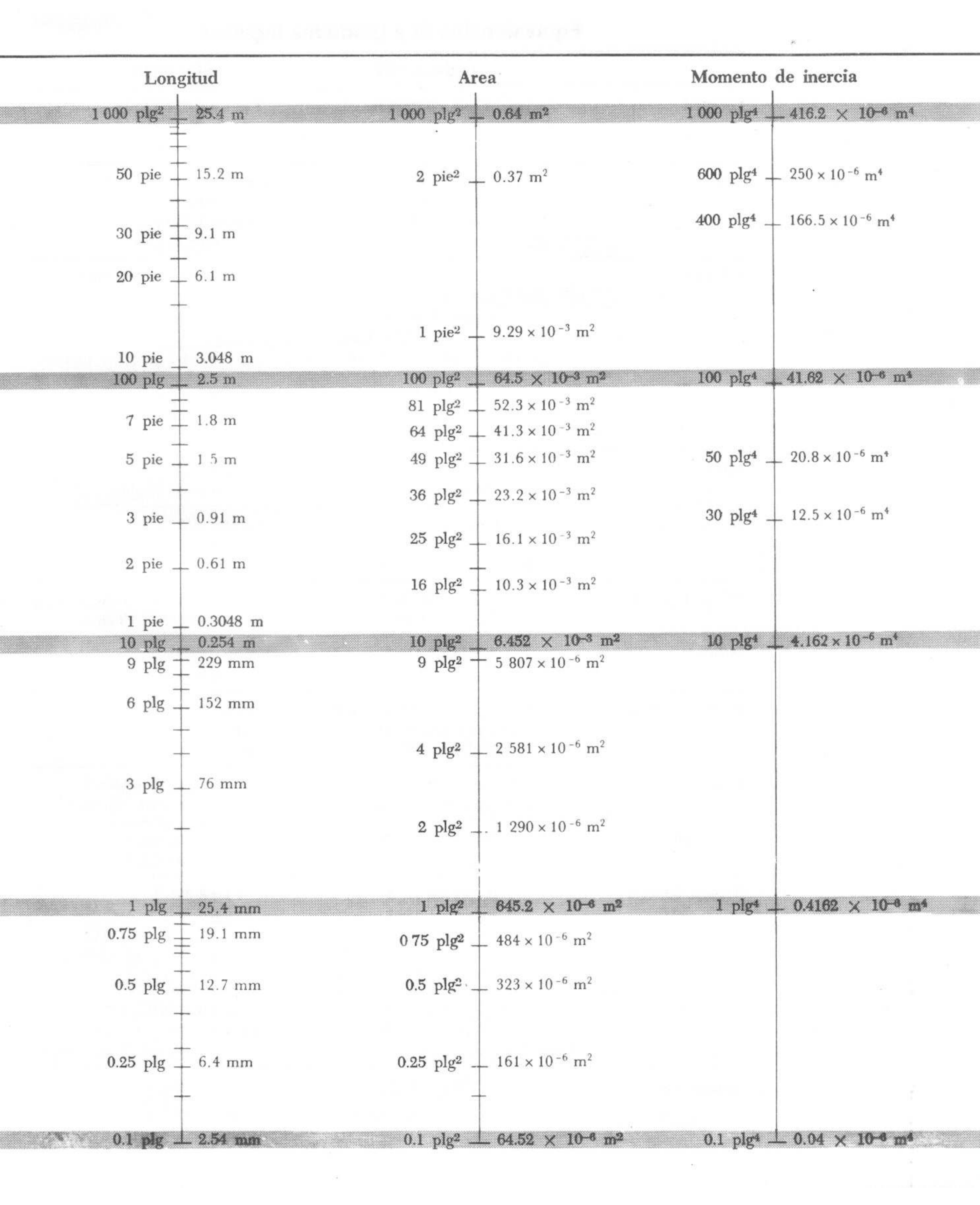
Tamaño y espesor	k	Peso por pie	Area	Eje X–X				Eje Y–Y				Eje Z–Z	
				I	S	r	y	I	S	r	x	r	tan α
plg	plg	lb	plg²	plg⁴	plg³	plg	plg	plg⁴	plg³	plg	plg	plg	
L 8×8 × 1⅛	1¾	56.9	16.7	98.0	17.5	2.42	2.41	98.0	17.5	2.42	2.41	1.56	1.000
1	1⅝	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56	1.000
⅞	1½	45.0	13.2	79.6	14.0	2.45	2.32	79.6	14.0	2.45	2.32	1.57	1.000
¾	1⅜	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58	1.000
⅝	1¼	32.7	9.61	59.4	10.3	2.49	2.23	59.4	10.3	2.49	2.23	1.58	1.000
½	1⅛	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59	1.000
L 8×6 × 1	1½	44.2	13.0	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
¾	1¼	33.8	9.94	63.4	11.7	2.53	2.56	30.7	6.92	1.76	1.56	1.29	0.551
½	1	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.558
L 8×4 × 1	1½	37.4	11.0	69.6	14.1	2.52	3.05	11.6	3.94	1.03	1.05	0.846	0.247
¾	1¼	28.7	8.44	54.9	10.9	2.55	2.95	9.36	3.07	1.05	0.953	0.852	0.258
½	1	19.6	5.75	38.5	7.49	2.59	2.86	6.74	2.15	1.08	0.859	0.865	0.267
L 7×4 × ¾	1¼	26.2	7.69	37.8	8.42	2.22	2.51	9.05	3.03	1.09	1.01	0.860	0.324
½	1	17.9	5.25	26.7	5.81	2.25	2.42	6.53	2.12	1.11	0.917	0.872	0.335
⅜	⅞	13.6	3.98	20.6	4.44	2.27	2.37	5.10	1.63	1.13	0.870	0.880	0.340

L 6 × 6 × 1	$1\frac{1}{2}$	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17	1.000
$\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{8}$	33.1	9.73	31.9	7.63	1.81	1.82	31.9	7.63	1.81	1.82	1.17	1.000
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17	1.000
$\frac{5}{8}$	$1\frac{1}{8}$	24.2	7.11	24.2	5.66	1.84	1.73	24.2	5.66	1.84	1.73	1.18	1.000
$\frac{1}{2}$	1	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18	1.000
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	14.9	4.36	15.4	3.53	1.88	1.64	15.4	3.53	1.88	1.64	1.19	1.000
L 6 × 4 × $\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	23.6	6.94	24.5	6.25	1.88	2.08	8.68	2.97	1.12	1.08	0.860	0.428
$\frac{5}{8}$	$1\frac{1}{8}$	20.0	5.86	21.1	5.31	1.90	2.03	7.52	2.54	1.13	1.03	0.864	0.435
$\frac{1}{2}$	1	16.2	4.75	17.4	4.33	1.91	1.99	6.27	2.08	1.15	0.987	0.870	0.440
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	12.3	3.61	13.5	3.32	1.93	1.94	4.90	1.60	1.17	0.941	0.877	0.446
L 6 × $3\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	11.7	3.42	12.9	3.24	1.94	2.04	3.34	1.23	0.988	0.787	0.767	0.350
$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{16}$	9.8	2.87	10.9	2.73	1.95	2.01	2.85	1.04	0.996	0.763	0.772	0.352
L 5 × 5 × $\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{8}$	27.2	7.98	17.8	5.17	1.49	1.57	17.8	5.17	1.49	1.57	0.973	1.000
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975	1.000
$\frac{1}{2}$	1	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983	1.000
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990	1.000
$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{16}$	10.3	3.03	7.42	2.04	1.57	1.37	7.42	2.04	1.57	1.37	0.994	1.000
L 5 × $3\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	19.8	5.81	13.9	4.28	1.55	1.75	5.55	2.22	0.977	0.996	0.748	0.464
$\frac{1}{2}$	1	13.6	4.00	9.99	2.99	1.58	1.66	4.05	1.56	1.01	0.906	0.755	0.479
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	10.4	3.05	7.78	2.29	1.60	1.61	3.18	1.21	1.02	0.861	0.762	0.486
$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{16}$	8.7	2.56	6.60	1.94	1.61	1.59	2.72	1.02	1.03	0.838	0.766	0.489
L 5 × 3 × $\frac{1}{2}$	1	12.8	3.75	9.45	2.91	1.59	1.75	2.58	1.15	0.829	0.750	0.648	0.357
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	9.8	2.86	7.37	2.24	1.61	1.70	2.04	0.888	0.845	0.704	0.654	0.364
$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{16}$	8.2	2.40	6.26	1.89	1.61	1.68	1.75	0.753	0.853	0.681	0.658	0.368
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	6.6	1.94	5.11	1.53	1.62	1.66	1.44	0.614	0.861	0.657	0.663	0.371

(Continúa en la página siguiente)

Tamaño y espesor	k	Peso por pie	Area	Eje X–X				Eje Y–Y				Eje Z–Z	
				I	S	r	y	I	S	r	x	r	tan α
plg	plg	lb	plg²	plg⁴	plg³	plg	plg	plg⁴	plg³	plg	plg	plg	
L 4 × 4 × $\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{8}$	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778	1.000
$\frac{5}{8}$	1	15.7	4.61	6.66	2.40	1.20	1.23	6.66	2.40	1.20	1.23	0.779	1.000
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782	1.000
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788	1.000
$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	8.2	2.40	3.71	1.29	1.24	1.12	3.71	1.29	1.24	1.12	0.791	1.000
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795	1.000
L 4 × $3\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	11.9	3.50	5.32	1.94	1.23	1.25	3.79	1.52	1.04	1.00	0.722	0.570
$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	9.1	2.67	4.18	1.49	1.25	1.21	2.95	1.17	1.06	0.955	0.727	0.755
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	7.7	2.25	3.56	1.26	1.26	1.18	2.55	0.994	1.07	0.932	0.730	0.757
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	6.2	1.81	2.91	1.03	1.27	1.16	2.09	0.808	1.07	0.909	0.734	0.759
L 4 × 3 × $\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$	11.1	3.25	5.05	1.89	1.25	1.33	2.42	1.12	0.864	0.827	0.639	0.543
$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	7.2	2.09	3.38	1.23	1.27	1.26	1.65	0.734	0.887	0.759	0.647	0.554
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	5.8	1.69	2.77	1.00	1.28	1.24	1.36	0.599	0.896	0.736	0.651	0.558
L $3\frac{1}{2}$ × $3\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687	1.000
$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	7.2	2.09	2.45	0.976	1.08	0.990	2.45	0.976	1.08	0.990	0.690	1.000
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694	1.000
L $3\frac{1}{2}$ × 3 × $\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	7.9	2.30	2.72	1.13	1.09	1.08	1.85	0.851	0.897	0.830	0.625	0.721
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	6.6	1.93	2.33	0.954	1.10	1.06	1.58	0.722	0.905	0.808	0.627	0.724
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	5.4	1.56	1.91	0.776	1.11	1.04	1.30	0.589	0.914	0.785	0.631	0.727
L $3\frac{1}{2}$ × $2\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	7.2	2.11	2.56	1.09	1.10	1.16	1.09	0.592	0.719	0.660	0.537	0.496
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	6.1	1.78	2.19	0.927	1.11	1.14	0.939	0.504	0.727	0.637	0.540	0.501
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	4.9	1.44	1.80	0.755	1.12	1.11	0.777	0.412	0.735	0.614	0.544	0.506

L 3 × 3 × $\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584	1.000
$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587	1.000
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$	6.1	1.78	1.51	0.707	0.922	0.865	1.51	0.707	0.922	0.865	0.589	1.000
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592	1.000
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	3.71	1.09	0.962	0.441	0.939	0.820	0.962	0.441	0.939	0.820	0.596	1.000
L 3 × $2\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	6.6	1.92	1.66	0.810	0.928	0.956	1.04	0.581	0.736	0.706	0.522	0.676
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	4.5	1.31	1.17	0.561	0.945	0.911	0.743	0.404	0.753	0.661	0.528	0.684
$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	3.39	0.996	0.907	0.430	0.954	0.888	0.577	0.310	0.761	0.638	0.533	0.688
L 3 × 2 × $\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	5.9	1.73	1.53	0.781	0.940	1.04	0.543	0.371	0.559	0.539	0.430	0.428
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$	5.0	1.46	1.32	0.664	0.948	1.02	0.470	0.317	0.567	0.516	0.432	0.435
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	4.1	1.19	1.09	0.542	0.957	0.993	0.392	0.260	0.574	0.493	0.435	0.440
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	3.07	0.902	0.842	0.415	0.966	0.970	0.307	0.200	0.583	0.470	0.439	0.446
L $2\frac{1}{2}$ × $2\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487	1.000
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$	5.0	1.46	0.849	0.482	0.761	0.740	0.849	0.482	0.761	0.740	0.489	1.000
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491	1.000
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	3.07	0.902	0.547	0.303	0.778	0.694	0.547	0.303	0.778	0.694	0.495	1.000
L $2\frac{1}{2}$ × 2 × $\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	5.3	1.55	0.912	0.547	0.768	0.831	0.514	0.363	0.577	0.581	0.420	0.614
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$	4.5	1.31	0.788	0.466	0.776	0.809	0.446	0.310	0.584	0.559	0.422	0.620
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	3.62	1.06	0.654	0.381	0.784	0.787	0.372	0.254	0.592	0.537	0.424	0.626
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	2.75	0.809	0.509	0.293	0.793	0.764	0.291	0.196	0.600	0.514	0.427	0.631
L 2 × 2 × $\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389	1.000
$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$	3.92	1.15	0.416	0.300	0.601	0.614	0.416	0.300	0.601	0.614	0.390	1.000
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	3.19	0.938	0.348	0.247	0.609	0.592	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391	1.000
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	2.44	0.715	0.272	0.190	0.617	0.569	0.272	0.190	0.617	0.569	0.394	1.000
$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{16}$	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398	1.000



Longitud
Area
Momento de inercia
1 000 plg² — 25.4 m
50 pie — 15.2 m
30 pie — 9.1 m
20 pie — 6.1 m
10 pie — 3.048 m
100 plg — 2.5 m
7 pie — 1.8 m
5 pie — 1.5 m
3 pie — 0.91 m
2 pie — 0.61 m
1 pie — 0.3048 m
10 plg — 0.254 m
9 plg — 229 mm
6 plg — 152 mm
3 plg — 76 mm
1 plg — 25.4 mm
0.75 plg — 19.1 mm
0.5 plg — 12.7 mm
0.25 plg — 6.4 mm
0.1 plg — 2.54 mm
1 000 plg² — 0.64 m²
2 pie² — 0.37 m²
1 pie² — 9.29 × 10⁻³ m²
100 plg² — 64.5 × 10⁻³ m²
81 plg² — 52.3 × 10⁻³ m²
64 plg² — 41.3 × 10⁻³ m²
49 plg² — 31.6 × 10⁻³ m²
36 plg² — 23.2 × 10⁻³ m²
25 plg² — 16.1 × 10⁻³ m²
16 plg² — 10.3 × 10⁻³ m²
10 plg² — 6.452 × 10⁻³ m²
9 plg² — 5 807 × 10⁻⁶ m²
4 plg² — 2 581 × 10⁻⁶ m²
2 plg² — 1 290 × 10⁻⁶ m²
1 plg² — 645.2 × 10⁻⁶ m²
0 75 plg² — 484 × 10⁻⁶ m²
0.5 plg² — 323 × 10⁻⁶ m²
0.25 plg² — 161 × 10⁻⁶ m²
0.1 plg² — 64.52 × 10⁻⁶ m²
1 000 plg⁴ — 416.2 × 10⁻⁶ m⁴
600 plg⁴ — 250 × 10⁻⁶ m⁴
400 plg⁴ — 166.5 × 10⁻⁶ m⁴
100 plg⁴ — 41.62 × 10⁻⁶ m⁴
50 plg⁴ — 20.8 × 10⁻⁶ m⁴
30 plg⁴ — 12.5 × 10⁻⁶ m⁴
10 plg⁴ — 4.162 × 10⁻⁶ m⁴
1 plg⁴ — 0.4162 × 10⁻⁶ m⁴
0.1 plg⁴ — 0.04 × 10⁻⁶ m⁴

Equivalencias SI y Unidades Inglesas

	Inglesas → SI	SI → Inglesas
Longitud	1 plg = 0.0254 m = 25.4 mm 1 pie = 0.3048 m	1 mm ≃ 0.039 37 plg 1 m ≃ 39.37 plg ≃ 3.28 pie
Area	1 $plg^2 \simeq 645.2 * 10^{-6}\ m^2$ $\simeq 645.2\ mm^2$ 1 $pie^2 \simeq 0.0929\ m^2$ $\simeq 9\ 290\ mm^2$	1 $mm^2 \simeq 1.55 * 10^{-3}\ plg^2$ $\simeq 10.76 * 10^{-6}\ pie^2$ 1 $m^2 \simeq 1\ 550\ plg^2$ $\simeq 10.76\ pie^2$
Volumen	1 $plg^3 \simeq 16.39 * 10^{-6}\ m^3$ $\simeq 16.390\ mm^3$ 1 $pie^3 \simeq 0.028\ 32\ m^3$ ≃ 28.32 ℓ (litro) 1 gal (U. S. líquido) ≃ 3.785 ℓ	1 $mm^3 \simeq 61.02 * 10^{-6}\ plg^3$ 1 ℓ ≃ 0.035 31 pie^3 ≃ 0.2642 gal (U.S. líquido) 1 $m^3 \simeq 35.31\ pie^3$ ≃ 264.2 gal (U.S. líquido)
Longitud⁴	1 $plg^4 \simeq 0.4162 * 10^{-6}\ m^4$ $\simeq 416\ 200\ mm^4$ 1 $pie^4 \simeq 8.631 * 10^{-3}\ m^4$	1 $mm^4 \simeq 2.403 * 10^{-6}$ 1 $m^4 \simeq 2.430 * 10^6\ plg^4$ $\simeq 115.9\ pie^2$
Masa	1 lbm ≃ 0.4536 kg 1 slug ≃ 14.59 kg	1 kg ≃ 2.205 lbm ≃ 0.068 52 slug
Fuerza	1 onza ≃ 0.278 N 1 lb ≃ 4.448 N 1 klb (10^3 lb) ≃ 4 448 N	1 N ≃ 3.597 onza ≃ 0.2248 lb $\simeq 2.248 * 10^{-4}$ klb
Fuerza/longitud	1 lb/pie = 14.593 N/m 1 klb/pie = 14.593 kN/m	1 N/m = 0.068525 lb/pie 1 kN/m = 0.068525 klb/pie
Momento	1 lb · plg ≃ 0.113 N · m 1 lb · pie ≃ 1.356 N · m	1 N · m = 8.851 lb · plg = 0.7376 lb · pie
Esfuerzo, Presión	1 $lb/pie^2 \simeq 47.88$ Pa (N/m^2) 1 $lb/plg^2 \simeq 6.895$ kPa 1 $klb/plg^2 \simeq 6.895$ MPa	1 Pa ≃ 0.020 89 lb/pie^2 1 kPa ≃ 0.145 lb/plg^2 1 MPa ≃ 0.145 klb/plg^2
Densidad	1 $lbm/pie^3 \simeq 16.02\ kg/m^3$ 1 $slug/pie^3 \simeq 515.4\ kg/m^3$	1 $kg/m^3 \simeq 0.062\ lbm/pie^3$ $\simeq 1.94 * 10^{-3}\ slug/pie^3$
Peso específico	1 $lb/pie^3 \simeq 157.1\ N/m^3$ 1 $lb/plg^3 \simeq 0.2714\ MN/m^3$	1 $kN/m^3 \simeq 6.366\ lb/pie^3$ 1 $MN/m^3 \simeq 3.684\ lb/plg^3$
Trabajo, Energía	1 lb · plg ≃ 0.113 J 1 lb · pie ≃ 1.356 J 1 BTU ≃ 1055 J 1 kW · hr = 3.6 M J 1 W · s = 1 J	1 J ≃ 8.851 lb · plg ≃ 0.7376 lb · pie $\simeq 9.478 * 10^{-4}$ BTU $\simeq 0.2778 * 10^{-6}$ kW · hr = 1 W · s
Potencia	1 lb · pie/s ≃ 1.356 W 1 BTU/min ≃ 17.59 W 1 caballo de potencia ≃ 745.7 W	1 W ≃ 0.7376 lb · pie/s 1 kW ≃ 56.87 BTU/min ≃ 1.341 caballo de potencia
Temperatura	$°F = \frac{9}{5}°C + 32$ $°F = \frac{9}{5} K - 459.67$	$°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$ $K = \frac{5}{9}(°F + 459.67)$ $K = °C + 273.15$

Respuestas a problemas selectos

Capítulo 2

2.1 $\sigma = 191$ MPa
2.3 $\sigma = 7.96$ MPa
2.5 $P = 9\,920$ lb
2.7 Carga distribuida = 26.7 kN/m²
2.9 Tubo de acero std. de 3 plg
2.11 $D_0 = 81.4$ mm
2.13 $\delta = 1.50$ plg
2.15 a) $\epsilon = 0.00115$
b) $\delta = 2.3$ mm
2.17 a) $\epsilon = 0.00052$
b) $\sigma = 0.0041$ plg
2.19 a) $\sigma = 5.62$ klb/plg²
b) $\delta = 0.00675$ plg
c) $\epsilon = 0.0005625$
2.21 $P = 6\,140$ lb
2.23 $D = 32$ mm
2.25 $P = 28\,000$ N
2.29 $\tau = 250$ kPa
2.31 $\tau = 6\,800$ lb/plg²
2.33 $P = 17\,700$ lb
2.35 $P = 217$ MN
2.37 $t = 0.88$ plg
2.39 a) $\sigma = 500$ lb/plg²
b) $\sigma = 3\,000$ lb/pie²
2.41 $P = 78\,750$ N
2.43 $\sigma = 100$ MPa
2.45 $\sigma = 12\,800$ lb/plg²
2.47 $P = 19\,400$ N
2.49 $P_2 = 28\,000$ lb
2.51 $P_{máx} = 204$ lb
2.53 $A = 1.92$ plg²
2.55 $D_i = 90.4$ mm
2.57 $P = 2\,100$ lb
2.59 $\delta_{VC} = 4.6$ mm
2.61 a) $x = 2.41$ m
b) $\sigma_{LAT} = 115$ MPa
c) $\sigma_{AC} = 115$ MPa
2.63 $D = 0.75$ plg
2.65 $P = 2\,840$ lb
2.67 $P = 600$ N
2.69 $T_1 = 1\,400$ lb
$T_2 = 280$ lb
2.71 $\frac{1}{2}$ plg diámetro de varilla roscada

Capítulo 3

3.1 $T = 100$ N · m
3.3 $T_A = 300$ N · m
$T_B = 400$ N · m
3.5 $T_A = 70$ klb-plg
$T_B = 10$ klb-plg
$T_C = 10$ klb-plg
$T_D = 18$ klb-plg
$T_E = 0$
3.7 $T_A = 270$ N · m
$T_B = 90$ N · m
$T_C = 540$ N · m
3.9 $\tau = 6\,120$ lb/pie
3.11 $T = 442$ lb/pie
3.13 $D = 40.2$ mm
3.15 $D = 1.72\sqrt[3]{(T/\tau)}$
3.17 Sección A: $\tau = 7.07$ MPa
Sección B: $\tau = 9.43$ MPa
3.19 $\tau_{máx} = 4.23$ MPa (exterior)
$\tau = 2.64$ MPa (interior)
3.21 $T = 2\,180$ N · m
3.23 $T = 4\,690$ N · m
3.25 $D_O = 67.7$ mm
$D_I = 33.9$ mm
3.27 $\theta = 0.00395$ rad
$\theta = 0.23°$
3.29 $T = 5\,550$ lb/pie
3.31 $D = 2.9$ plg
3.33 $\theta_{AB} = 0.0027$ rad
$\theta_{BC} = 0.0014$ rad
$\theta_{AC} = 0.0013$ rad
3.35 $T = 8\,330$ lb-pie
3.37 $N = 833$ rpm
3.39 $\tau = 4\,040$ lb/plg²
$\theta = 2.8°$
3.41 $D = 1.1$ plg
3.43 $D = 32.3$ mm
3.45 $D = 187$ mm
3.47 $\tau = 2\,720$ lb/plg²
3.49 $T = 8\,600$ lb-pie
3.51 $\tau_{máx} = 193$ MPa
$D = 646$ mm
3.53 $k = 3.4$ lb/plg
3.55 $d = 0.66$ plg
3.57 $D_O = 128$ mm
$D_I = 86$ mm
3.59 $D = 174$ mm
3.61 $D = 2.4$ plg
3.63 Sección AB: $\tau_{AB} = 28.0$ MPa
$\theta_{AB} = 0.102$ rad
Sección BC: $\tau_{BC} = 17.8$ MPa
$\theta_{BC} = 0.0324$ rad
Sección CD: $\tau_{CD} = 5.6$ MPa
$\theta_{CD} = 0.0102$ rad
$\theta_{AD} = 0.0594$ rad
3.65 $D = 35$ mm
3.67 $D = 2.08$ plg

Capítulo 4

4.1 Sección a: $V = +6.26$ kN
$M = +5.01$ kN · m
Sección b: $V = +2.26$ kN
$M = +8.07$ kN · m
Sección c: $V = -6.74$ kN
$M = +5.39$ kN · m

4.3 Sección a: $V = +2.47$ kN
$M = +5.47$ kN · m
Sección b: $V = -3.53$ kN
$M = +4.94$ kN · m
Sección c: $V = -3.53$ kN · m
$M = +1.41$ kN · m

4.5 Sección a: $V = -8$ klb
$M = -32$ klb-pie
Sección b: $V = +15$ klb
$M = -32$ klb-pie
Sección c: $V = 0$
$M = +5.5$ klb-pie

4.7 Sección ab: $V = 32$ (origen en a)
$M = 32x$ (origen en a)
Sección bc: $V = 32 - 5x$ (origen en b)
$M = 32(1 + x) - 2.5x^2$ (origen en b)

4.9 Sección ab: $V = (2/9)x^2 - 4.5$ (origen en b)
$M = -(2/27)x^3 + 4.5x + 13.5$ (origen en b)
Sección bc: $V = -4.5$ (origen en c)
$M = 4.5x$ (origen en c)

Nota: Las ordenadas para los diagramas V y M en el caso de los siguientes problemas se dan en los lugares indicados.

4.11 Distancia desde el extremo izquierdo	0	1 m	3 m	4.6 m
V		+6.26	+2.26	
	+6.26	+2.26	−6.74	−6.74
M	0	+6.26	+10.78	0

4.13 Distancia desde el extremo izquierdo	0	1.41 m	2 m	3.4 m
V	+8.47	0	−3.53	−3.53
M	0	+5.98	+4.94	0

4.15 Distancia desde el extremo izquierdo	0	4	9	14	18
V		−8		−15	
	−8	+15	0	+8	+8
M	0	−32	+5.5	−32	0

4.17 Distancia desde el extremo izquierdo	0	0.8 m	1.2 m	2 m	2,4 m
V		+96	−24	−144	
	+96	−24	−144	+120	+120
M	0	+76.8	+67.2	−48.0	0

4.19 Distancia desde el extremo izquierdo	0	8	16	20
V		−6.5	+3.5	
	−6.5	+3.5	+6	+6
M	0	−5.2	−24	0

4.21 Distancia desde el extremo izquierdo	0	2	5	8	11	13
V			+800	0		
	0	+800	0	−800	−800	0
M	0	+800	+3 200	+3 200	+800	0

4.23 Distancia desde el extremo izquierdo	0	2 m	4 m	5.8 m
V		+29.2	−30.8	
	+29.2	−30.8	+3.6	0
M	0	+58.4	−3.2	0

4.25 Distancia desde el extremo izquierdo	0	25 cm	50 cm	75 cm	1
V		+120	−240	+240	
	+120	−240	+240	−120	−120
M	0	+30	−30	+30	0

4.27	Distancia desde el extremo izquierdo	0	$(L/2)$	L
	V	$(wL/2)$	0	$-(wL/2)$
	M	0	$\frac{1}{8}wL^2$	0

4.29	Distancia desde el extremo izquierdo	0	4	8	12	16
	V		−1 200	+600	+200	
		0	+600	+200	−200	−200
	M	0	−2 400	0	+800	0

4.31	Distancia desde el extremo izquierdo	0	4	7	10	14
	V		+13.7		+10.3	
		0	−10.3	0	−13.7	0
	M	0	+27.4	+12.0	+27.4	0

4.33	Distancia desde el extremo izquierdo	0	6	16	26	32
	V			−10		
		+6	0	+10	0	−6
	M	0	+18	−32	+18	0

4.35	Distancia desde el extremo izquierdo	0	6.65′	12′
	V	+14	0	−22
	M	0	+54.4	0

4.37	Distancia desde el extremo izquierdo	0	4	10	12	20
	Carga	$P = 16$	$P = 12$	$P = 8$	$w = 1.5$	$P = 16$
	M	0	+64	+88	+80	0

4.39	Distancia desde el extremo izquierdo	0	8	12
	Carga	$P = 2$ $w = 1$	$P = 22$	$P = 12$
	M	0	+48	0

4.41	Distancia desde el extremo izquierdo	0	4	6	10.8	14
	Carga	$w = 3$	$P = 19.2$	$w = 1.5$	$w = 1.5$	$P = 4.8$
	M	−12	−24	−9.6	+7.7	0

4.43	Distancia desde el extremo izquierdo	0	0.1 m	0.3 m
	V		−120	
		−120	−320	−320
	M	0	−12.0	−76.0

4.45	Distancia desde el extremo izquierdo	0	2	4	14
	V		+14		
		+14	+10	+10	0
	M	−98	−70	−50	0

4.47	Distancia desde el extremo izquierdo	0	3	4	5
	V			−4	
		+12	0	+4	0
	M	−18	0	−2	0

4.49	Distancia desde el extremo izquierdo	0	L
	V	$+(M/L)$	$-(M/L)$
	M	0	$+M$

4.51	Distancia desde el extremo izquierdo	0	0.2 m	0.6 m	1 m	1.4 m
	V		+44.57	+24.57	−15.43	
		+44.57	+24.57	−15.43	−35.43	−35.43
	M		+8.91	+19.14	+13.77	
		0	+9.31	+19.94	+14.17	0

4.53 $V_{BA} = V_{BC} = 21.91$ kN
$V_{BC} = V_{CB} = 39.2$ kN
$M_B = M_C = 16.33$ kN · m
$M_{\text{línea central}} = 22.87$ kN · m
4.55 Caso 1 y Caso 4
$V_{\text{máx}} = 19$ klb
$M_{\text{máx}} = 115$ klb-pie
4.57 No se aplica el Apéndice D
$V_{\text{máx}} = 64$ kN
$M_{\text{máx}} = 96$ kN · m
4.59 No se aplica el Apéndice D
$V_{\text{máx}} = 36$ kN
$M_{\text{máx}} = 66.7$ kN · m
4.61 No se aplica el Apéndice D
$V_{\text{máx}} = 38$ kN
$M_{\text{máx}} = 36$ kN · m
4.63 No se aplica el Apéndice D
$V_{\text{máx}} = 12$ klb
$M_{\text{máx}} = 30$ pie-klb
4.65 No se aplica el Apéndice D
$V_{\text{máx}} = 2{,}200$ N
$M_{\text{máx}} = 4\,033$ N · m
4.67 Caso 7 y Caso 9
$V_{\text{máx}} = wL - P$ o bien, $V_{\text{máx}} = P$
$M_{\text{máx}} = (wL^2/2) - PL$ (en apoyo) o bien, $M_{\text{máx}} = (P^2/2w)$

Capítulo 5

5.1 $\sigma = 128$ MPa
5.3 $\sigma = 60$ MPa
5.5 $\sigma = 19.1$ klb/plg²
5.7 $\sigma = 6.1$ klb/plg²
5.9 $\sigma_{\text{inferior}} = 20.5$ klb/plg²
$\sigma_{\text{superior}} = 11.1$ klb/plg²
5.11 $\sigma_{\text{inferior}} = 22.6$ klb/plg²
$\sigma_{\text{superior}} = 13.7$ klb/plg²
5.13 $\sigma = 10.8$ klb/plg²
5.15 $P = 1{,}400$ lb
5.17 $P = 3{,}570$ lb
5.19 5.16% disminuye
5.21 $P = 1{,}970$ lb
5.23 $M = 2{,}850$ pie-klb
5.25 $C = 5{,}880$ lb
5.27 Se da la profundidad medida desde la parte superior y los esfuerzos cortantes horizontales correspondientes: 0.0 m, $\tau = 0$; 0.1 m, $\tau =$ 0.278 MPa; 0.2 m, $\tau = 0.444$ MPa; 0.3 m, $\tau = 0.500$ MPa; 0.4 m, $\tau = 0.444$ MPa; 0.5 m, $\tau =$ 0.278 MPa; 0.6 m, $\tau = 0$.
5.29 $\tau = 850$ lb/plg²
5.31 $\tau_a = 34.7$ kPa
$\tau_b = 23.1$ kPa
5.33 $V = 300$ lb
5.35 Espaciamiento teórico = 5.35 plg
5.37 $h = 3.0$ plg
5.39 $D = 59$ mm
5.41 $b = 18$ mm
$h = 54$ mm
5.43 W 16 × 40
5.45 W 16 × 40
5.47 W 12 × 26
5.49 S 12 × 31.8
5.51 Dos ángulos, $4 \times 3 \times \frac{5}{16}$
5.53 Dos ángulos, $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$
5.55 2″ × 12″
5.57 10″ × 16″
5.59 3″ × 12″

Capítulo 6

6.1 $\sigma = -125.3$ kPa
6.3 $\sigma = -13$ klb/plg²
6.5 $P = 172$ kN
6.7 $P = 5\,500$ lb
6.9 $P_2 = 3\,500$ lb
$P_1 = 3\,620$ lb
6.11 $\sigma = -20.5$ klb/plg²
6.13 $\sigma_{AB} = +2.67$ MPa
$\sigma_{CD} = -5.33$ MPa
Los bordes AD y BC varían linealmente desde $\sigma = +2.67$ MPa hasta $\sigma = -5.33$ MPa.
6.15 $\sigma_{AB} = -492$ lb/plg²
$\sigma_{CD} = -42$ lb/plg²
Los bordes AD y BC varían linealmente desde $\sigma = -492$ lb/plg² hasta $\sigma = -42$ lb/plg²
6.17 Sección A: $\sigma = -300$ lb/plg²
Sección B: $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{bc}$
$= -375$ lb/plg²
6.19 a) $P = 7.64$ kN
b) $P = 4.04$ kN
6.21 $P = 17.2$ klb
6.23 $\sigma_{\text{interior}} = +4\,810$ lb/plg² (T)
$\sigma_{\text{exterior}} = -5\,770$ lb/plg² (C)
6.25 $P = 3\,450$ N
6.27 $\sigma_{\text{superior}} = -567$ kPa
$\sigma_{\text{inferior}} = +695$ kPa
6.29 $P = 43.7$ klb
6.31 W = 16.5 klb
6.33 $\sigma_A = -7.5$ klb/plg²
$\sigma_B = +1.5$ klb/plg²
$\sigma_C = +4.5$ klb/plg²
$\sigma_D = -4.5$ klb/plg²
6.35 $\sigma_A = +63.2$ klb/plg²
$\sigma_B = +8.5$ klb/plg²
$\sigma_C = -38.5$ klb/plg²
$\sigma_D = +16.2$ klb/plg²
6.37 Círculo con $e = (R/4)$
6.39 $\sigma' = 27$ MPa
$\tau' = 15.6$ MPa
6.41 $\sigma' = 5.6$ klb/plg²
$\tau' = 2.4$ klb/plg²
6.43 $\sigma' = \dfrac{144\sigma_x - 120\tau + 25\sigma_y}{169}$
$\tau' = \dfrac{60\sigma_x + 119\tau - 60\sigma_y}{169}$
6.45 60°: $\sigma' = 1.8$ MPa (T)
$\tau' = 27.5$ MPa
75°: $\sigma' = 14.2$ MPa (C)
$\tau = 32.4$ MPa
6.47 $\sigma' = 27$ MPa
$\tau' = 15.6$ MPa
6.49 $\sigma' = 5.6$ klb/plg²
$\tau' = 2.4$ klb/plg²
6.51 $\sigma' = 0.852\sigma_x - 0.71\tau + 0.148\sigma_y$
$\tau' = 0.355\sigma_x + 0.705\tau - 0.355\sigma_y$
6.53 60°: $\sigma' = 1.8$ MPa (T)
$\tau' = 27.5$ MPa
75°: $\sigma' = 14.2$ MPa (C)
$\tau' = 32.4$ MPa
6.55 $\sigma_{\text{máx}} = 6\,400$ lb/plg²
$\sigma_{\text{mín}} = 1\,600$ lb/plg²
6.57 $\sigma_{\text{máx}} = +17.12$ MPa
$\sigma_{\text{mín}} = -47.68$ MPa
6.59 Punto A: $\sigma_{\text{máx}} = -9\,460$ lb/plg²
$\sigma_{\text{mín}} = +1\,240$ lb/plg²
Punto B: $\sigma_{\text{máx}} = +8\,770$ lb/plg²
$\sigma_{\text{mín}} = -970$ lb/plg²
6.61 $\sigma_{\text{máx}} = 7\,775$ lb/plg²
$\sigma_{\text{mín}} = 1\,725$ lb/plg²
6.63 $\tau_{\text{máx}} = 32.4$ MPa
6.65 Punto A: $\tau_{\text{máx}} = 5\,350$ lb/plg²
Punto B: $\tau_{\text{máx}} = 4{,}870$ lb/plg²

6.67 $\tau_{máx} = 19.2$ MPa
6.69 $\tau_{máx} = \tau$
6.71 $\tau_{máx} = 4\,750$ lb/plg^2
6.73 $\sigma_{máx} = 23.2$ klb/plg^2
$\sigma_{mín} = 8.8$ klb/plg^2
$\tau = 7.2$ klb/plg^2
6.75 $\sigma_{máx} = 98$ MPa
$\sigma_{mín} = -58$ MPa
$\tau_{máx} = 78$ MPa
$\theta = 19.9°$
6.77 $\sigma_{máx} = -15.2$ klb/plg^2
$\sigma_{mín} = -0.8$ klb/plg^2
$\tau_{máx} = 7.2$ klb/plg^2
$\theta = 28.2°$
6.79 $\sigma_{máx} = 73.2$ MPa
$\sigma_{mín} = -49.2$ MPa
$\tau_{máx} = 61.2$ MPa
$\theta = 39.3°$
6.81 $\sigma_{máx} = -67.3$ MPa
$\sigma_{mín} = +19.3$ MPa
$\tau_{máx} = 43.3$ MPa
$\theta = 28.2°$
6.83 $\sigma_{máx} = 5\,460$ lb/plg^2
$\sigma_{mín} = -200$ lb/plg^2
$\tau_{máx} = 2\,830$ lb/plg^2
6.85 $P_{máx} = 78.3$ lb
6.87 $\tau_{máx} = 3\,000$ lb/plg
6.89 $D = 3.4$ plg
6.91 $D = 96$ mm
6.93 $\sigma_{máx} = 42.3$ MPa
$\tau_{máx} = 21.1$ MPa
6.95 $\sigma_{máx} = -60$ MPa
$\tau_{máx} = 0$
6.97 $\sigma_{máx} = +60$ MPa
$\tau_{máx} = 42$ MPa
6.99 $\sigma_y = 54.9$ MPa
6.101 $\sigma_x = 36$ MPa
$\sigma_y = 18$ MPa
6.103 $\epsilon_{máx} = +844 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{mín} = -984 \times 10^{-6}$
$\gamma_{máx} = 934 \times 10^{-6}$
6.105 $\epsilon_{máx} = +67 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{mín} = -1\,000 \times 10^{-6}$
$\gamma_{máx} = 533 \times 10^{-6}$
6.107 $\epsilon_{máx} = 807 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{mín} = -707 \times 10^{-6}$
$\gamma_{máx} = 757$
6.109 $\epsilon_{0°} = -200 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{45°} = -235 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{90°} = -733 \times 10^{-6}$

Capítulo 7

7.1 a) $\sigma = 4\,000$ MPa
b) $\sigma = 2\,670$ MPa
c) $\sigma = 2\,000$ MPa
7.3 $M = 650$ lb-plg
$\sigma = 31\,200$ lb/plg^2
7.5 A 0.4 m, $\rho = 142$ m
A 0.8 m, $\rho = 71$ m
A 1.2 m = A 1.6 m, $\rho = 56.8$ m
7.7 Pendiente: $(dy/dx) = (1/4EI)[2L^2x - (9/2)Lx^2 + (2/3)x^2]$
Momento: $M = (d^2y/dx^2)(EI) = \frac{1}{4}(2L^2 - 9Lx + 2x^2)$
Cortante: $(d^3y/dx^3) = \frac{1}{4}(-9L + 4x)$
Carga: $(d^4y/dx^4) = 1$ (p. ejemp., $w = 1$ klb/pie)
7.9 Pendiente: $(dy/dx) = (5a/6EI)(3L - 6x)$
Momento: $M = (d^2y/dx^2)EI = -5a$
Cortante: $x = 0$
Carga: $w = 0$
7.11 a) Claro AB: $EIy = \dfrac{Px^3}{6} - \dfrac{Px^2a}{2} \qquad 0 < x < a$

Claro BC: $EIy = \dfrac{Pa^2x}{2} + \dfrac{Pa^3}{6EI} \qquad a < x < L$

b) Claro AB: $EIy = \dfrac{PLx^2}{2} - \dfrac{Px^3}{6} - \dfrac{Px^2a}{2} + Plax$

$- \dfrac{PL^2x}{2} + \dfrac{PL^3}{6} - \dfrac{PaL^2}{2} \qquad (L-a) < x < L$

Claro BC: $EIy = \dfrac{Pa^2x}{2} - \dfrac{PLa^2}{2} + \dfrac{Pa^3}{6}$

$+ \dfrac{Pl^2a}{2} - \dfrac{PaL^2}{2} \qquad 0 < x < (L-a)$

7.13 a) Claro AB: $EIy = -\dfrac{0.1x^4}{6} + \dfrac{2.6x^3}{3} - 13.6x \qquad 0 < x < 6$

Claro BC: $EIy = -\dfrac{0.1x^4}{6} + \dfrac{2x^3}{3} - 10x^2 - 21.4x + 450$

$6 < x < 10$

b) Claro AB: $EIy = 18x^2 - \dfrac{x^3}{2} - 152x + 96 \qquad 4 < x < 12$

Claro BC: $EIy = x^3 - 80x \qquad 0 < x < 4$

7.15 $EIy = -(wx^4/24) + (wLx^3/12) - (wL^3x/12)$
7.17 $EIy = (Px^3/12) - (PL^2x/16) \quad 0 < x < (L/2)$
7.19 $EIy = -(Px^3/6) + (PL^2x/8) - (PL^3/24) \quad 0 < x < (L/2)$
$EIy = -(PLx^3/4) + (PL^2x/2) - (3PL^3/16) \quad (L/2) < x < (3L/2)$
7.21 $EIy = -(x^4/6) + 3x^3 - 144x \quad 0 < x < 12$
7.23 Claro AB: $EIy = (x^4/24) + 144x - 810 \quad 0 < x < 6$
Claro BC: $EIy = 9x^2 + 216x - 972 \quad 6 < x < 118$
Claro CD: $EIy = (x^3/2) - 36x^2 + 702x - 3{,}888 \quad 18 < x < 24$
7.25 $EIy = -\dfrac{Px^3}{6} + \dfrac{P[x-(L/2)]^3}{3} - \dfrac{P(x-L)^3}{6} + \dfrac{43}{48}PxL^2 - \dfrac{3}{32}PL^3$
$EIy_A = -(3/32)PL^3$
$EIy_B = (65/96)PL^3$
7.27 $EIy = -4x^3 + 9(x-4) - \dfrac{(x-4)^4}{8} + 192x - 512$
$y_A = -(512/EI)$
$y_B = -(1.792/EI)$
7.29 $EIy = 2x^3 - \dfrac{8}{3}(x-4)^3 - 2L^2x + \dfrac{8(L-4)^3x}{3L}$
$\Delta_A = (938.7/EI)$
7.31 $\theta = -(107.5/EI)$
$\Delta = -(228.3/EI)$
7.33 $\theta = +(24/EI)$ (en el sentido de las manecillas del reloj)
$\Delta = +(124/EI)$ (hacia arriba)
7.35 $\theta = 0.0065$ rad (en sentido contr. al de las manecillas)
$\Delta = 27.2$ mm (hacia arriba)
7.37 $\theta = 0.000089$ rad (en el sentido de las manecillas)
$\Delta = 0.0023$ plg (hacia abajo)
7.39 $P = \frac{3}{8}WL$
7.41 $\theta = 0$ (línea central)
$\Delta = \dfrac{P_a}{2EI}\left(\dfrac{L^2}{4} - \dfrac{a^2}{3}\right)$
$\theta_{extremo} = (P_a/2EI)(L-a)$
7.43 $\theta = (ML/6EI)$ (ext. izq.)
$\theta = (ML/24EI)$ (centro)
$\Delta = (ML^2/16EI)$ (centro)
$\theta = (ML/3EI)$ (extremo derecho)
7.45 $\Delta = (5/EI)$ (línea central)
$\theta = (1/2EI)$ (línea central)
$\theta = (9/2EI)$ (extremo izquierdo)
$\theta = (7/2EI)$ (extremo derecho)
7.47 $\Delta = (1\,130\,000/EI)$ (línea central)
$\theta = 0$ (línea central)
$\theta = (97\,200/EI)$ (extremos)
7.49 $\Delta = (12\,500/6EI)$ (línea central)
$\theta = (2\,500/18EI)$ (línea central)
$\theta = (32\,500/9EI)$ (extremo izquierdo)
$\theta = (35\,000/9EI)$ (extremo derecho)
7.51 $\Delta_{máx} = (ML^2/9\sqrt{3}EI)$
7.57 $\theta_B = (PL^2/12EI)$ (en sentido contr. al de las manecillas)
$\Delta_B = (PL^3/4EI)$ (hacia arriba)
$\theta_D = (7PL^2/6EI)$ (en el sentido de las manecillas)
$\Delta_D = (PL^3/EI)$ (hacia abajo)
7.59 $\Delta = (5.85/EI)$ (línea central)
$\theta = (22.125/EI)$ (extremo izquierdo)
$\theta = (22.875/EI)$ (extremo derecho)
7.61 $\Delta = 0$ (línea central)
$\theta = (235.7/EI)$ (línea central)
7.63 $\Delta_A = (678/EI)$ (hacia abajo)
$\theta_A = (115/EI)$ (en el sentido de las manecillas)
$\Delta_C = (144/EI)$ (hacia abajo)
$\theta_C = (16/EI)$ (en sentido contr. al de las manecillas)
7.65 $\Delta_{máx} = (0.0645ML^2/EI)$
7.67 $\Delta_{máx} = (320\,000/EI)$
7.69 $\theta = 0.00073$ rad
$\Delta = 0.035$ plg
7.71 $\theta = 0.00025$ rad
$\Delta = 0.13$ mm
7.73 $\Delta = 0.0007$ plg (línea central)
$\theta = 0.0000053$ rad (extremos)
7.75 $\Delta_C = 9.8$ mm
$\theta_C = 0.00256$ rad
7.77 $\theta = -(107.5/EI)$
$\Delta = -(228.3/EI)$
7.79 $P = \frac{3}{8}wL$
7.81 $\Delta_{máx} = (ML^2/9\sqrt{3EI})$
7.83 $\Delta = (27{,}000/EI)$ (línea central)
$\theta = 0$ (apoyos)
7.85 $\theta = 0$ (línea central)
$\Delta = \dfrac{Pa}{2EI}\left(\dfrac{L^2}{4} - \dfrac{a^2}{3}\right)$
$\theta_{extremo} = (Pa/2EI)(L-a)$
7.87 $\theta = (ML/6EI)$ (extremo izquierdo)
$\theta = (ML/24EI)$ (centro)
$\Delta = (ML^2/16EI)$ (centro)
$\theta = (ML/3EI)$ (extremo derecho)
7.89 $\Delta = (12\,500/6EI)$ (línea central)
$\theta = (2\,500/18EI)$ (línea central)
$\theta = (32\,500/9EI)$ (extremo izquierdo)
$\theta = (35\,000/9EI)$ (extremo derecho)
7.91 $\theta_B = (PL^2/12EI)$ (en el sentido de las manecillas)
$\Delta_B = (PL^3/4EI)$ (hacia arriba)
$\theta_D = (7PL^2/6EI)$ (sentido de las manecillas)
$\Delta_D = (PL^3/EI)$ (hacia abajo)
7.93 $\Delta = (27\,000/EI)$ (línea central)
$\theta = 0$ (reacciones)

Capítulo 8

8.1 $R_{AV} = 943$ lb (hacia arriba)
$M_A = 2\ 180$ lb-pie
$R_B = 557$ lb (hacia arriba)
8.3 $R_{AV} = (11/16)P$ (hacia arriba)
$M_A = (3PL/16)$
$R_B = (5P/16)$ (hacia arriba)
8.5 $R_{AV} = 3\ 180$ lb (hacia arriba)
$M_A = 7\ 020$ lb-pie
$R_B = 2\ 120$ lb (hacia arriba)
8.7 $R_A = R_C = \frac{3}{8}wL$
$R_B = (5/4)wL$
8.9 $R_A = 24.4$ kN (hacia arriba)
$R_B = 41.2$ kN (hacia arriba)
$R_C = 5.6$ kN (hacia abajo)
8.11 $R_A = 6$ klb (hacia arriba)
$R_B = 1.5$ klb (hacia arriba)
$R_C = 16.5$ klb (hacia arriba)
8.13 $R_A = R_D = (3/40)P$ (hacia abajo)
$R_B = R_C = (23/40)P$ (hacia arriba)
8.15 $R_A = 2.7$ kN (hacia arriba)
$M_A = 0.6$ kN · m
$R_B = 6.9$ kN (hacia arriba)
$R_C = 2.4$ kN (hacia arriba)
8.17 $M_A = 160$ lb-pie
$R_{AV} = 170$ lb (hacia arriba)
$M_B = 107$ lb-pie
$R_{BV} = 70$ lb (hacia arriba)
8.19 $\sigma = 23.1$ klb/plg
8.21 $R_A = R_C = 2.18$ kN
$R_B = 55.64$ kN
8.23 $R_A = R_C = 7.92$ kN
$R_B = 44.16$ kN
8.25 $R_B = 3.27$ kN
8.27 $R_A = 7.4$ klb (hacia arriba)
$R_B = 27.9$ klb (hacia arriba)
$T_{CD} = 15.3$ klb (hacia abajo)
8.29 $\sigma_{acero} = 16\ 400$ lb/plg²
$\sigma_{madera} = 3\ 950$ lb/plg²
8.31 $R_A = 0$
$R_B = 32$ kN (hacia arriba)
$R_C = 16$ kN (hacia arriba)
8.33 $R_A = 24.4$ kN (hacia arriba)
$R_B = 41.2$ kN (hacia arriba)
$R_C = 5.6$ kN (hacia abajo)
8.35 $R_A = 6$ klb (hacia arriba)
$R_B = 1.5$ klb (hacia arriba)
$R_C = 16.5$ klb (hacia arriba)
8.37 $R_A = R_D = (3/40)P$ (hacia abajo)
$R_B = R_C = (23/40)P$ (hacia arriba)

Capítulo 9

9.1 $P_{cr} = 13\ 700$ lb
9.3 $P_{cr} = 36$ kN
9.5 a) $P_{cr} = 1.29$ kN
b) $P_{cr} = 5.17$ kN
c) $P_{cr} = 0.32$ kN
d) $P_{cr} = 2.63$ kN
9.7 $x = 20.8$ plg (desde A) o bien,
$x = 15.2$ plg (desde A)
9.9 $P_{cr} = (4\pi^2 EI/L^2)$
9.11 $(L/r_x) = 39.0$
$(L/r_y) = 87.5$
9.13 $(L/r) = 106$
9.15 a) $L = 15.7'$
b) $L = 7.7'$
c) $L = 6.7'$
d) $L = 10.3'$
9.17 $D = 29.8$ mm
9.19 a) $\sigma_a = 18.0$ klb/plg²
b) $\sigma_a = 12.0$ klb/plg²
c) $\sigma_a = 5.7$ klb/plg²
9.21 a) $P = 101$ klb
b) $P = 54$ klb
9.23 a) $P = 58.8$ klb
b) $P = 27.0$ klb
9.25 a) $P = 49$ klb
b) $P = 29.4$ klb
9.27 a) $\sigma_u = 45$ klb/plg²
b) $\sigma_u = 29.9$ klb/plg²
c) $\sigma_u = 14.3$ klb/plg²
9.29 a) $P = 15\ 900$ lb
b) $P = 3\ 160$ lb
9.31 a) $P = 103$ klb
b) $P = 84$ klb
c) $P = 59$ klb
9.33 a) $P = 307$ klb
b) $P = 222$ klb
9.35 W 8 × 31
9.37 Use tubo de 5 plg
9.39 Angulo $4 \times 4 \times \frac{3}{8}$
9.41 Use tubo de 2 plg
9.43 $P = 5.7$ lb/plg
9.45 $P = 787$ lb
$Q = 4{,}110$ lb
9.47 $h = 22.6$ mm
9.49 $b = 5.3$ mm
9.51 $P = 45.7$ kN
9.53 $D = 1.1$ plg
9.55 a) $P = 106$ klb
b) $P = 45.7$ klb
c) $P = 29.2$ klb
9.57 Tubo de acero de 6 plg std.
9.59 W 8 × 40

Capítulo 10

10.1 $\sigma_{AC} = 28\ 600$ lb/plg²
$\sigma_{LAT} = 14\ 300$ lb/plg²
10.3 $\sigma_{AC} = 88.3$ MPa
$\sigma_{LAT} = 41.7$ MPa
10.5 $\sigma_{superior} = 66.7$ MPa
$\sigma_{inferior} = 16.7$ MPa
10.7 a) $\sigma_{AC} = 10$ klb/plg²
$\sigma_{concreto} = 10$ klb/plg²
b) $\delta = 0.01$ plg
10.9 a) $\delta = 0.225$ plg
b) $P = 96\ 000$ lb
10.11 $\sigma_{AC} = 26\ 200$ lb/plg²
$\sigma_{LAT} = 27\ 600$ lb/plg²
10.13 $P = 60.2$ kN
10.15 $P_A = P_C = 88.9$ lb
$P_B = 222.2$ lb
$\Delta = 0.44$ plg
10.17 $\Delta_A = 3.4$ mm
10.19 $\tau_{AB} = 186$ kPa
$\tau_{BC} = 187$ kPa
$\theta_B = 0.000052$ rad
$\theta_B = 0.003°$
10.21 $T = 19.7$ N · m
10.23 $T = 15\ 240$ N · m
10.25 $L = 99.9675$ pies
10.27 $D = 75.225$ mm
10.29 $T = 1\ 500°F$
10.31 $\sigma = 288$ MPa (tensión)
10.33 $\sigma = 18\ 700$ lb/plg² (compresión)
10.35 $\sigma_{AC} = 25\ 800$ lb/plg² (tensión)
$\sigma_{LAT} = 8\ 600$ lb/plg² (tensión)
10.37 $\Delta T = 57.5°C$
10.39 a) $T = 270°F$
b) $\sigma = 30\ 000$ lb/plg²
10.41 $\sigma_{AC} = 8.9$ MPa
$\sigma_{LAT} = 35.6$ MPa

10.43 a) $\sigma_{AC} = 192$ MPa
$\sigma_C = 115$ MPa
b) $\sigma_{AC} = 227$ MPa
$\sigma_C = 46$ MPa
10.45 $\sigma_{viga} = 22\ 100$ lb/plg^2
$\sigma_{cable} = 9\ 810$ lb/plg^2
10.47 $\tau = 24$ MPa
10.49 $\sigma = 31.2$ MPa
10.51 $t = 5$ mm
10.53 $p = 1.38$ MPa
10.55 Espaciamiento = 14 plg
10.57 Esfuerzo circunferencial:
$\sigma = 7\ 500$ lb/plg^2
Esfuerzo longitudinal:
$\sigma = 3\ 750$ lb/plg^2
10.59 $t = 6.6$ mm
10.61 $\tau = 1\ 875$ lb/plg^2
10.63 $\sigma_{prom.} = 16\ 000$ lb/plg^2
Sección A-A:
$\sigma_{máx} = 38\ 400$ lb/plg^2
Sección B-B:
$\sigma_{máx} = 32\ 000$ lb/plg^2
10.65 Sección A:
$\sigma_{prom.} = 5\ 000$ lb/plg^2
$\sigma_{máx} = 12\ 500$ lb/plg^2
Sección B:
$\sigma_{prom.} = 10\ 000$ lb/plg^2
$\sigma_{máx} = 22,000$ lb/plg^2
Sección C:
$\sigma_{prom.} = 6\ 670$ lb/plg^2
$\sigma_{máx} = 15\ 000$ lb/plg^2
10.67 Sección A: $\sigma_{prom.} = 53$ MPa
$\sigma_{máx} = 53$ MPa
Sección B: $\sigma_{prom.} = 73.8$ MPa
$\sigma_{máx} = 177$ MPa
Sección C: $\sigma_{prom.} = 53$ MPa
$\sigma_{máx} = 96$ MPa
Sección D: $\sigma_{prom.} = 48$ MPa
$\sigma_{máx} = 48$ MPa
Sección E: $\sigma_{prom.} = 80$ MPa
$\sigma_{máx} = 176$ MPa
Sección F: $\sigma_{prom.} = 80$ MPa
$\sigma_{máx} = 120$ MPa
Sección G: $\sigma_{prom.} = 80$ MPa
$\sigma_{máx} = 80$ MPa
10.69 $P = 14\ 400$ lb
10.71 $P = 31.7$ kN
10.73 $r = 11$ mm

Capítulo 11

11.1 a) $\sigma_A = 119$ lb/plg^2 (compresión)
$\sigma_B = 473$ lb/plg^2 (compresión)
$\sigma_C = 119$ lb/plg^2 (tensión)
$\sigma_D = 473$ lb/plg^2 (tensión)
b) El eje neutro intersecta el lado AD 1.2 plg desde A y el lado BC 1.2 plg desde C.
11.3 $P = 450$ lb
11.5 $\omega = 1.31$ klb/pie
11.7 $P = 25.8$ kN
11.9 $\sigma_{máx} = 12.1$ klb/plg^2
11.11 $\sigma_{máx} = 4.14$ MPa
11.13 $e = 2.8$ plg, desde el patín de 8 plg
11.15 $e = 0$ plg, desde el punto de intersección de los patines
11.17 $e = 17$ mm desde el alma
11.19 $e = 2R$ medida desde el centro
11.21 $e = 144.6$ mm medida desde el centro del semicírculo
11.23 $\sigma_B = 52.1$ lb/plg
11.25 $P = 0.84$ klb
11.27 $P = 139.5$ lb

Capítulo 12

12.1 $P_{máx} = 36$ klb
12.3 $P_{máx} = 12.8$ klb
12.5 $P_{máx} = 8.84$ klb
12.7 $P_{máx} = 200$ kN
12.9 $P_y = 337\ 500$ N
$P_u = 450\ 000$ N
12.11 $P_u = 300$ kN
12.13 $P_u = 585$ kN
12.15 $P_u = 147.6$ klb
12.17 $P_y = 91$ kN
$P_u = 146.1$ kN
12.19 $P_y = 214$ klb
$P_u = 216$ klb
12.21 $(T_u/T_y) = 1.17$
12.23 $\theta = 0.151$ rad
12.25 $T_y = 92.4$ klb - plg; $\theta_y = 0.033$ rad;
$T_u = 122.5$ klb - plg
12.27 $M_y = 12\ 330$ klb - plg
@ 2″ profundidad,
$M = 14\ 400$ klb - plg
@ 4″ profundidad,
$M = 14\ 861$ klb - plg
totalmente de plástico,
$M_P = 16\ 416$ klb - plg
12.29 $M_y = 3.29 \times 10^6$ N · m
@ 60 mm profundidad,
$M = 3.99 \times 10^6$ N · m
@ 120 mm profundidad,
$M = 4.43 \times 10^6$ N · m
totalmente de plástico
$M_P = 4.72 \times 10^6$ N · m
12.31 $f = 1.70$
12.33 $f = 1.70$
12.35 $f = 1.67$
12.37 $f = 1.11$
12.39 a) $\phi = 0.000117$
b) $\phi = 0.00015$
12.41 $(\phi/\phi_y) = 1.0$; $(M/M_y) = 1.0$
$(\phi/\phi_y) = 2.0$; $(M/M_y) = 1.375$
$(\phi/\phi_y) = 3.0$; $(M/M_y) = 1.444$
$(\phi/\phi_y) = 4.0$; $(M/M_y) = 1.469$
$(\phi/\phi_y) = 5.0$; $(M/M_y) = 1.480$
$(\phi/\phi_y) = 6.0$; $(M/M_y) = 1.486$
12.43 $(\phi/\phi_y) = 1.0$; $(M/M_y) = 1.0$
$(\phi/\phi_y) = 2.0$; $(M/M_y) = 1.444$
$(\phi/\phi_y) = 4.0$; $(M/M_y) = 1.611$
$(\phi/\phi_y) = 6.0$; $(M/M_y) = 1.642$
12.45 $x = (2\ 565/\sqrt{\omega})$
desde el extremo libre
12.47 $x = (9.514\sigma_y/P)$
desde el extremo libre
12.49 Resistencia de reserva = 1.58
12.51 Resistencia de reserva = 1.71

Capítulo 13

13.1 $\Delta_C = 4.1$ mm
13.3 $\Delta_C = 0.7$ mm
13.5 $\Delta_C = \dfrac{(5\ 184)(1\ 728)}{EI}$
13.7 $\Delta = \dfrac{1\ 280}{EI}$
13.9 $\theta_A = \dfrac{22.4}{EI}$
13.11 $\theta = \dfrac{96(144)}{JG}$
13.13 $\Delta_C = 3.67$ mm
13.15 $\Delta_E = 0.75$ plg
13.17 $\Delta = 0.16$ plg

13.19 $\Delta_C = \dfrac{(5\,184)(1\,728)}{EI}$

13.21 $\Delta_A = \dfrac{24.96}{EI}$

13.23 $\Delta_D = \dfrac{4\,096}{EI}$

13.25 $\Delta_{centro} = \dfrac{3\,000}{8EI}$ (hacia arriba)

13.27 $\theta_A = \dfrac{2\,000}{EI}$ (en el sentido de las manecillas)

13.29 $\theta_A = \dfrac{4\,000}{EI}$ (en sentido contr. al de las manecillas)

13.31 $\Delta_H = \dfrac{16.8 \times 10^6}{EI}$

13.33 $\Delta_H = 140$ mm

13.35 $\Delta_H = \dfrac{PR^3}{2EI} + \dfrac{PR}{EI}$

13.37 $\Delta_H = \dfrac{PR^3}{EI}$

13.39 $\theta = 0.3°$

13.41 $\Delta_C = 0.21$ mm

13.43 $\Delta = 0.665$ plg

13.45 $\Delta = 0.11$ plg

13.47 $\Delta_C = 3.67$ mm

13.49 $\Delta = 0.16$ plg

13.51 $\Delta_D = \dfrac{4\,096}{EI}$

13.53 $\Delta_{centro} = \dfrac{3\,000}{8EI}$ (hacia arriba)

13.55 $\Delta_H = \dfrac{16.8 \times 10^6}{EI}$

13.57 $\Delta = \dfrac{3\pi PR^3}{2EI}$

13.59 $\Delta_C = 0.21$ mm

13.61 a) $\sigma = 62.45$ MPa
$\Delta_{estática} = 0.31$ mm
b) $\Delta_{máx} = 0.62$ mm
c) $\sigma_{máx} = 124$ MPa
d) Factor de impacto = 2

13.63 a) $\Delta_{máx} = 1.7$ mm
b) $\sigma_{máx} = 237$ MPa
c) Factor de impacto = 4.8

13.65 a) $\sigma_{máx} = 1\,000$ lb/plg²
$\Delta_{máx} = 0.0016$ plg
Factor de impacto = 2
b) $\sigma_{máx} = 87\,000$ lb/plg²
$\Delta_{máx} = 0.139$ plg
Factor de impacto = 174
c) $\sigma_{máx} = 123\,000$ lb/plg²
$\Delta_{máx} = 0.194$ plg
Factor de impacto = 246

13.67 $h = 0.6$ m

13.69 a) $\sigma_{máx} = 338$ lb/plg²
$\Delta_{máx} = 0.0049$ plg
Factor de impacto = 2
b) $\sigma_{máx} = 16\,700$ lb/plg²
$\Delta_{máx} = 0.24$ plg
Factor de impacto = 99

Capítulo 14

14.1 a) $L = 16.2$ plg
b) $L = 12.9$ plg
c) $L = 10.7$ plg

14.3 $P = 33.4$ klb

14.5 $a = \frac{5}{16}$ plg

14.7 $\tau = 12.4$ klb/plg²

14.9 $P = 11.3$ klb

14.11 $P = 74.2$ klb

14.13 $x = 1.25$ plg

14.15 $L_1 = 11.6$ plg
$L_2 = 4.6$ plg

14.17 Use ángulo de $4 \times 3 \times \frac{5}{16}$ y $\frac{1}{4}$ plg unido;
$L_1 = 8.5$ plg
$L_2 = 3.9$ plg

14.19 $P = 18.6$ klb

14.21 $q = 7.16$ klb/plg

14.23 8 remaches

14.25 $P = 33.1$ klb

14.27 $P = 55.7$ klb

14.29 $P = 26.5$ klb

14.31 $R = 44.2$ klb

14.33 $F_a = F_e = 6.0$ klb

14.35 $F_a = 6.0$ klb
$F_b = 8.5$ klb
$F_c = 0$
$F_d = 6.0$ klb
$F_e = 6.0$ klb
$F_f = 8.5$ klb

14.37 $F_a = F_b = 6.85$ klb
$F_c = F_d = 13.0$ klb

14.39 $P = 11.1$ klb

14.41 $P = 6.5$ klb

14.43 $F = 7.8$ klb

14.45 $F_a = F_e = 5.95$ klb

14.47 $F = 15.7$ klb

14.49 $F = 3.0$ klb

Apéndice A

A.1 $F_x = 2{,}571$ N ←
$F_y = 3{,}064$ N ↑

A.3 $F_x = 3.94$ kN ←
$F_y = 9.19$ kN ↓

A.5 $R = 44.7$ kN

A.7 $R = 2{,}370$ N

A.9 $BC = 48$ kN (tensión)
$AC = 41.6$ kN (compresión)

A.11 $AC = 127.2$ kN (tensión)
$BC = 103.3$ kN (compresión)

A.13 $AC = 3.5$ lb (tensión)
$BC = 2{,}926$ lb (compresión)

A.15 $A = 1\,730$ lb
$B = 2{,}000$ lb

A.17 $M_A = 2{,}500$ lb-pie ↺
$M_B = 1{,}250$ lb-pie ↺

A.19 $M_A = 9.5$ kN·m ↻
$M_B = 7.94$ kN·m ↻

A.21 $P = 2{,}000$ N ↓
$M = 1{,}600$ N·m ↻

A.23 $P = 60$ kN ↘
$M = 36$ kN·m ↻

A.25 $P = 1{,}200$ lb ↓
$M = 7{,}200$ lb-plg ↺

A.27 $P = 4{,}000$ lb →
$M = 12\,000$ lb-plg ↻

A.29 $A_x = 4{,}490$ N →
$A_y = 2\,220$ N ↑
$B_y = 1\,110$ N ↑

A.31 $A_x = 20$ kN ←
$A_y = 37.9$ kN ↑
$B_y = 12.5$ kN ↑

A.33 $A_x = 20$ lb →
$A_y = 1\,390$ lb ↑
$M_A = 3\,310$ lb-plg ↻

A.35 $P = 11.5$ kN
$B_x = 5.75$ kN →
$B_y = 13.96$ kN ↑

A.37 $P = 375$ N
$A = 900$ N

A.39 $A_x = 250$ lb ←
$A_y = 866$ lb ↓
$D_x = 0$
$D_y = 866$ ↑
$F_y = 433$ lb ↑
A.41 $A_y = 30$ kN ↑
$A_x = 0$
$M_A = 45$ kN · m ↺
$C_x = 0$
$C_y = 20$ kN ↓
A.43 $D_y = 2\,200$ lb ↑
$A_x = 800$ lb ↑
$A_x = 0$
A.45 $A_x = 4\,050$ N ←
$A_y = 2\,630$ N ↑
$B_x = 4\,050$ N →
$B_y = 370$ N ↑
A.47 $A_y = 2.4$ kN ↑
$A_x = 0$
$B_y = 9.6$ kN ↑
A.49 $A_y = 28.5$ kN ↑
$A_x = 0$
$B_y = 37.5$ kN ↑
A.51 $A_y = 11$ klb ↑
$A_x = 0$
$M_A = 69$ klb-pie ↺
A.53 $p = 23.1$ kPa
A.55 $\bar{y} = 7.33$ plg de la base de la parte inferior
A.57 $\bar{y} = 83.7$ mm de la base de la parte inferior
A.59 $\bar{y} = 169.6$ mm de la base de la parte inferior
A.61 $\bar{x} = 5.8$ plg desde el extremo izquierdo
$\bar{y} = 3.3$ plg de la base de la parte inferior
A.63 $\bar{y} = 258.2$ mm de la base de la parte inferior
A.65 $\bar{y} = 5.6$ plg de la base de la parte inferior
A.67 $\bar{y} = 4.72$ plg
A.69 $I_x = 348.4 \times 10^{-6}$ m^4
$I_y = 100.4 \times 10^{-6}$ m^4
A.71 $I_x = 208$ plg^4
$I_y = 154$ plg^4
A.73 $I_x = 516.7 \times 10^{-6}$ m^4
$I_y = 167.8 \times 10^{-6}$ m^4
A.75 $I_x = 84.4$ plg^4
$I_y = 39.0$ plg^4
A.77 $I_x = 481.3$ plg^4
$I_y = 51.6$ plg^4
A.79 $J = (\pi D^4/32) = (\pi R^4/2)$
A.81 $J = \frac{1}{12}bt(b^2 + t^2)$
A.83 $J = 448.8 \times 10^{-6}$ m^4
A.85 $J = 362$ plg^4
A.87 $J = 123.4$ plg^4
A.89 $P_{xy} = +672$ plg^4
A.91 $P_{xy} = +3\,538$ plg^4
A.93 $P_{xy} = +2.81$ plg^4
A.95 $P_{xy} = +17.1$ plg^4
A.97 $P_{xy} = +57.8 \times 10^{-6}$ m^4
A.99 $I_U = 10.45$ plg^4
$I_V = 1.58$ plg^4
$\alpha = 19.6°$
A.101 $I_U = 182.0$ plg^4
$I_V = 9.6$ plg^4
$\alpha = 5.7°$
A.103 $I_U = 13.5$ plg^4
$I_V = 3.0$ plg^4
$\alpha = 5.7°$
A.105 $I_U = 0.000396$ m^4
$I_V = 0.000084$ m^4
$\alpha = 13.7°$
A.107 $r_x = 2.52$ plg
$r_y = 1.77$ plg
A.109 $r_x = 3.72$ plg
$r_y = 1.54$ plg
A.111 $r_x = 1.91$ plg
$r_y = 1.15$ plg
$r_U = 2.06$ plg
$r_V = 0.87$ plg
A.113 $r_x = 1.95$ plg
$r_y = 1.30$ plg
$r_U = 2.12$ plg
$r_V = 0.99$ plg

Indice

Esta edición se terminó de imprimir en octubre de 2007. Publicada por ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. Apartado Postal 73-267, 03311, México, D.F. La impresión se realizó en IMPRESOS GÉMINIS, Av. Morelos No. 438, Col. Magdalena Mixhuca, Venustiano Carranza, México, D.F.

Relaciones equivalentes para estimación de diseño (Inglesas/SI)

